Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Jens A. Griepentrog

Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020
2. März 2020

Klausur

Name:	
Vorname:	
Studiengang:	
Matrikelnummer:	

Ergebnis

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	40
Erreichte Punktzahl						
Korrektor						

Hinweise

1. Bitte füllen Sie das Deckblatt vollständig und gut lesbar aus!
2. Sie können als Hilfsmittel ein beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt benutzen.
3. Sie haben 90 Minuten Zeit für die Lösung der Aufgaben.
4. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!
5. Versehen Sie *alle* Lösungsblätter mit Ihrer Matrikelnummer und Ihrem Namen!
6. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen möglichst gut begründet werden!
7. Aufgaben können auch in Teilen bearbeitet werden.
8. Nach dem Klausurende sind die Lösungsblätter im Faltblatt abzugeben!

Aufgabe 1. Man berechne alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der *biquadratischen* Gleichung

$$\big(z^2 - (2,3)z - (1,0)\big)^2 = \big((-2,3)z + (9,0)\big)^2$$

durch Zurückführung auf geeignete *quadratische* Gleichungen! ⑧

Lösung. Gesucht sind die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\big(z^2 - (2,3)z - (1,0)\big)^2 - \big((-2,3)z + (9,0)\big)^2 = (0,0).$$

Da für alle v, $w \in \mathbb{C}$ die binomische Formel $v^2 - w^2 = (v + w)(v - w)$ gilt, ergibt sich daraus die äquivalente Gleichung

$$\big(z^2 - (4,0)z + (8,0)\big)\big(z^2 - (0,6)z - (10,0)\big) = (0,0).$$

Durch quadratische Ergänzung in beiden Faktoren erhält man die Zerlegung

$$\begin{aligned}(0,0) &= \big((z-(2,0))^2 + (4,0)\big)\big((z-(0,3))^2 - (1,0)\big)\\ &= \big(z-(2,2)\big)\big(z-(2,-2)\big)\big(z-(1,3)\big)\big(z-(-1,3)\big)\end{aligned}$$

in ein Produkt von Linearfaktoren und somit die vier Lösungen

$$z_1 = (2,2), \quad z_2 = (2,-2), \quad z_3 = (1,3), \quad z_4 = (-1,3)$$

der vorgegebenen biquadratischen Gleichung. □

Aufgabe 2. 1. Man bestimme die reellen Koeffizienten (a_k) jener Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 = 0$, welche in $\mathbb{R}$ gegen die durch

$$s(x) = \big(\exp(x) - 1 - x\big)^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert!

2. Man ermittle den *kleinsten* Index $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für den $a_k \neq 0$ gilt! ⑧

Lösung. 1. Wegen der Beziehung

$$s(x) = \big(\exp(x) - 1 - x\big)^2 = \exp(2x) - 2\exp(x) - 2x\exp(x) + 1 + 2x + x^2$$

liefert die Gestalt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

der Exponentialreihe um den Mittelpunkt $x_0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Entwicklung

$$\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + \big(1 + 2x + x^2\big) \\
&= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - 2\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 2\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + \big(1 + 2x + x^2\big) \\
&\quad + \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}\right) - \left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) - \big(2x + 2x^2 + x^3\big) \\
&= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2^k - 2 - 2k}{k!}\, x^k
\end{aligned}$$

der Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe (s_n) um $x_0 = 0$. Somit haben die Koeffizienten (a_k) die Gestalt

$$a_k = 0 \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{sowie} \quad a_k = \frac{2^k - 2 - 2k}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 4.$$

2. Wegen $a_4 = \frac{1}{4}$ ist $k = 4$ der *kleinste* Index $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für den $a_k \neq 0$ gilt. Somit hat die Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ eine Nullstelle vierter Ordnung. □

Aufgabe 3. 1. Man beweise (induktiv), daß die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt!} \tag{1}$$

2. Man zeige, daß die Ungleichungen

$$\int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi + 1} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2 \text{ gelten!} \tag{2}$$

3. Man weise mit Hilfe der beiden Beziehungen (1) und (2) nach, daß die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right)$ gegen die Summe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln(2)$ konvergiert! ⑧

Lösung. 1. Der Beweis der Beziehung (1) erfolgt induktiv über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt in der Tat

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k}.$$

Induktionsschritt: Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung (1) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich die Induktionsbehauptung für $n + 1$ durch

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k}.$$

2. Für jedes $\xi \in]k-1, k]$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 2$ gilt $\xi \leq k \leq \xi + 1$, also

$$\frac{1}{\xi+1} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\xi} \quad \text{und somit auch} \quad \int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi+1} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi}.$$

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus durch Summation über $k \in \{n+1, \ldots, 2n\}$

$$\ln\frac{2n+1}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) = \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi+1}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{d\xi}{\xi} = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k-1) = \ln(2).$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ in diesen Ungleichungen und in (1) liefert die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$$

der (nach dem Leibniz-Kriterium) konvergenten Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right)$. □

Aufgabe 4. Seien die beiden Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig fixiert.

1. Man berechne für jeden Parameter $\xi \in \mathbb{R}$ den Wert des Integrals

$$f(\xi) = \int_a^b x \cosh(\xi x)\, dx.$$

2. Man weise nach, daß die dadurch definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist! ⑧

Lösung. 1.1. Im Falle $\xi \neq 0$ führt teilweise Integration auf ein Grundintegral: Es gilt

$$\begin{aligned} f(\xi) = \int_a^b x \cosh(\xi x)\, dx &= \frac{b \sinh(b\xi) - a \sinh(a\xi)}{\xi} - \int_a^b \frac{\sinh(\xi x)\, dx}{\xi} \\ &= \frac{b \sinh(b\xi) - a \sinh(a\xi)}{\xi} - \frac{\cosh(b\xi) - \cosh(a\xi)}{\xi^2}\,. \end{aligned}$$

1.2. Im Falle $\xi = 0$ erhält man wegen $\cosh 0 = 1$ sofort das Grundintegral

$$f(0) = \int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}\,.$$

2. Als Verkettung von hyperbolischen und rationalen Funktionen ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $\xi \neq 0$ stetig. Die Stetigkeit im Punkt $\xi = 0$ wird durch Anwendung der Regel von Bernoulli-de L'Hospital gezeigt: Nach Schritt 1.1 gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \to 0} f(\xi) &= \lim_{\xi \to 0} \frac{b\xi \sinh(b\xi) - \cosh(b\xi) - a\xi \sinh(a\xi) + \cosh(a\xi)}{\xi^2} \\ &= \lim_{\xi \to 0} \frac{b^2\xi \cosh(b\xi) - a^2\xi \cosh(a\xi)}{2\xi} \\ &= \lim_{\xi \to 0} \frac{b^2 \cosh(b\xi) - a^2 \cosh(a\xi)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

und somit schließlich $\lim_{\xi \to 0} f(\xi) = f(0)$ aufgrund von Schritt 1.2. □

Aufgabe 5. Seien die *geschlossenen* Wege $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{für } \theta \in [0, 2\pi],$$
$$\sigma(\theta) = (1, 0) + (1 - \cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi]$$

sowie die Linearisierung $\gamma_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die γ in $\theta \in [0, 2\pi]$ tangential berührt, durch

$$\gamma_\theta(t) = \gamma(\theta) + (t - \theta) D\gamma(\theta) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß $\sigma(\theta) \in \mathbb{C}$ für jedes $\theta \in [0, 2\pi]$ derjenige Punkt der Geraden $\{\gamma_\theta(t) \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist, welcher den *kürzesten* Abstand vom Punkt $(1, 0) \in \mathbb{C}$ hat!
2. Man berechne die Länge des Weges $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$! ⑧

Lösung. 1. Sei $\theta \in [0, 2\pi]$ beliebig vorgegeben. Die durch $f(t) = |\gamma_\theta(t) - (1, 0)|^2$ für $t \in \mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll minimiert werden: Aufgrund der Gestalt $D\gamma(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ der Ableitung von γ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos\theta - 1 - (t - \theta)\sin\theta)^2 + (\sin\theta + (t - \theta)\cos\theta)^2 \\ &= (\cos\theta - 1)^2 - 2(t - \theta)(\cos\theta - 1)\sin\theta + (t - \theta)^2 \sin^2\theta \\ &\quad + \sin^2\theta + 2(t - \theta)\sin\theta\cos\theta + (t - \theta)^2\cos^2\theta \end{aligned}$$

und wegen $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ desweiteren

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos\theta - 1)^2 + (t - \theta)^2 + 2(t - \theta)\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= (\cos\theta - 1)^2 + (t - \theta + \sin\theta)^2 \end{aligned}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$. Demnach besitzt die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein globales Minimum im *eindeutig* bestimmten Punkt $t_\theta = \theta - \sin\theta \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \gamma_\theta(t_\theta) &= \gamma(\theta) + (t_\theta - \theta)D\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) \\ &= (\cos\theta, \sin\theta) + (1, 0) - \cos\theta\,(\cos\theta, \sin\theta) = \sigma(\theta). \end{aligned}$$

2. Um die Länge des Weges $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zu berechnen, wird dessen Ableitung

$$D\sigma(\theta) = \big((\cos\theta - 1)\sin\theta + \sin\theta\cos\theta, (1 - \cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\big)$$

in den Punkten $\theta \in [0, 2\pi]$ herangezogen. Als Betragsquadrat erhält man somit

$$\begin{aligned} |D\sigma(\theta)|^2 &= \big((\cos\theta - 1)\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\big)^2 + \big((1 - \cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\big)^2 \\ &= \big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)(1 - \cos\theta)^2 + \big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)\sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta. \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung $2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\big(\frac{\theta}{2}\big)$ ergibt sich daraus die Länge

$$\int_0^{2\pi} |D\sigma(\theta)|\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\tfrac{\theta}{2}\,d\theta = 4\cos 0 - 4\cos\pi = 8$$

des Weges $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. □