

## Übungsaufgaben 3

### Zahlenfolgen und Zahlenreihen

**Aufgabe 1.** Man zeige, daß die Reihe  $(\sum_{k=1}^n \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell})$  reeller Zahlen für beliebig vorgegebenes  $m \in \mathbb{N}$  im Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  gegen die Summe  $\frac{1}{m \cdot m!}$  konvergiert! ©

*Lösung.* 1. Sei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig vorgegeben. Quotienten- bzw. Wurzelkriterium versagen bei der Entscheidung, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Jedoch ist die direkte Berechnung der Teilsummen durch vorhergehende Zerlegung der Summanden in Teilbrüche möglich: Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt zunächst

$$\prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} = \frac{k+m}{m} \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} - \frac{k}{m} \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} = \frac{1}{m} \prod_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{k+\ell} - \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell}.$$

Eine Indexverschiebung im ersten Produkt auf der rechten Seite liefert somit

$$\prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} = \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell-1} - \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

2. Daraus folgt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  durch Summation über  $k \in \{1, \dots, n\}$  und Indexverschiebung in der ersten Summe auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k-1+\ell} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{k+\ell} = \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell} - \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{n+\ell}. \end{aligned}$$

Wegen der Grenzwertbeziehung

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{n+\ell} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(n+1)^m} = 0$$

ergibt sich demzufolge die Konvergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell})$  gegen die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=0}^m \frac{1}{k+\ell} = \frac{1}{m \cdot m!}$$

für jedes festgehaltene  $m \in \mathbb{N}$ . □

**Aufgabe 2.** Man weise nach, daß die Reihe  $(\sum_{k=0}^n a_k x^{2k})$  bzw.  $(\sum_{k=0}^n b_k x^{2k+1})$  mit den durch  $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$  bzw.  $b_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$  für  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definierten Koeffizienten für jedes  $x \in \mathbb{K}$  jeweils absolut gegen eine endliche Summe

$$(1) \quad c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} \in \mathbb{K} \quad \text{bzw.} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1} \in \mathbb{K}$$

konvergiert und schließe durch Multiplikation solcher Reihen darauf, daß die durch diese Grenzwerte definierten Funktionen  $c, s : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  den Additionstheoremen

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \quad \text{sowie} \quad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  genügen!

⑧

*Lösung.* 1. Die Reihe  $(\sum_{k=0}^n a_k x^{2k})$  bzw.  $(\sum_{k=0}^n b_k x^{2k+1})$  konvergiert aufgrund des Quotientenkriteriums für jedes  $x \in \mathbb{K}$  absolut, denn es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k)! |x|^{2k+2}}{(2k+2)! |x|^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1$$

bzw.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)! |x|^{2k+3}}{(2k+3)! |x|^{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 < 1.$$

2. Die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k a_m x^{2m} a_{k-m} y^{2(k-m)})$  der Cauchy-Produkte konvergiert wegen Schritt 1 für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  absolut gegen das Produkt

$$\begin{aligned} c(x)c(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \frac{(-1)^{k-m}}{(2k-2m)!} y^{2k-2m} \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{m=0}^k \binom{2k}{2m} x^{2m} y^{2k-2m} \end{aligned}$$

der durch (1) definierten Summen.

3. Die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k b_m x^{2m+1} b_{k-m} y^{2(k-m)+1})$  der Cauchy-Produkte konvergiert wegen Schritt 1 für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  absolut gegen das Produkt

$$\begin{aligned} s(x)s(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \frac{(-1)^{k-m}}{(2k-2m+1)!} y^{2k-2m+1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \sum_{m=0}^k \binom{2k+2}{2m+1} x^{2m+1} y^{2k+2-(2m+1)} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{m=0}^{k-1} \binom{2k}{2m+1} x^{2m+1} y^{2k-(2m+1)} \end{aligned}$$

der durch (1) definierten Summen, wobei der Index  $k$  verschoben wurde.

4. Aus Schritt 2 und 3 folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} c(x)c(y) - s(x)s(y) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{\ell=0}^{2k} \binom{2k}{\ell} x^{\ell} y^{2k-\ell} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x+y)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x+y)^{2k} = c(x+y) \end{aligned}$$

aufgrund der binomischen Formel.

5. Die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k b_m x^{2m+1} a_{k-m} y^{2(k-m)})$  der Cauchy-Produkte konvergiert wegen Schritt 1 für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  absolut gegen das Produkt

$$\begin{aligned} s(x)c(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} \frac{(-1)^{k-m}}{(2k-2m)!} y^{2k-2m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{2k+1}{2m+1} x^{2m+1} y^{2k+1-(2m+1)} \end{aligned}$$

der durch (1) definierten Summen.

6. Die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k a_m x^{2m} b_{k-m} y^{2(k-m)+1})$  der Cauchy-Produkte konvergiert wegen Schritt 1 für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  absolut gegen das Produkt

$$\begin{aligned} c(x)s(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \frac{(-1)^{k-m}}{(2k-2m+1)!} y^{2k-2m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{2k+1}{2m} x^{2m} y^{2k+1-2m} \end{aligned}$$

der durch (1) definierten Summen.

7. Aus Schritt 5 und 6 erhält man durch Addition

$$\begin{aligned} s(x)c(y) + c(x)s(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{\ell=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{\ell} x^{\ell} y^{2k+1-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x+y)^{2k+1} = s(x+y) \end{aligned}$$

mit Hilfe der binomischen Formel. □

**Aufgabe 3.** Seien reelle Zahlen  $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a_1 \leq b_1$  beliebig vorgegeben und die beiden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  reeller Zahlen durch

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{sowie} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ definiert.}$$

1. Man weise nach, daß die beiden Relationen

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad a_n b_n = a_1 b_1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gelten!}$$

2. Man schließe daraus, daß die beiden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  jeweils gegen denselben Grenzwert  $\sqrt{a_1 b_1}$  konvergieren! ⑥

*Lösung.* 1.1. Die beiden Relationen  $0 < a_n \leq b_n$  und  $a_n b_n = a_1 b_1$  sollen induktiv über  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden:

*Induktionsanfang:* Im Falle  $n = 1$  gilt  $0 < a_n \leq b_n$  und  $a_n b_n = a_1 b_1$ .

*Induktionsschritt:* Unter der Annahme, daß  $0 < a_n \leq b_n$  sowie  $a_n b_n = a_1 b_1$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelten, sollen die Relationen  $0 < a_{n+1} \leq b_{n+1}$  und  $a_{n+1} b_{n+1} = a_1 b_1$  hergeleitet werden: Wegen der Relation

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 = (a_n - b_n)^2 + 4a_n b_n \geq 4a_n b_n$$

und der Induktionsvoraussetzung  $0 < a_n \leq b_n$  erhält man somit

$$0 < a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

Die Induktionsvoraussetzung  $a_n b_n = a_1 b_1$  liefert außerdem

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n b_n = a_1 b_1,$$

womit beide Induktionsbehauptungen bewiesen sind.

1.2. Aus  $0 < a_n \leq b_n$  folgen für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Beziehungen

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geq \frac{2a_n b_n}{b_n + b_n} = a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

2.1. Die Ergebnisse aus Schritt 1 zeigen, daß die Folge  $(a_n)$  monoton wächst und nach oben durch  $b_1 > 0$  beschränkt ist und die Folge  $(b_n)$  monoton fällt und nach unten durch  $a_1 > 0$  beschränkt ist. Damit konvergiert einerseits die Folge  $(a_n)$  gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 \leq a \leq b_1$  und andererseits die Folge  $(b_n)$  gegen einen Grenzwert  $b \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 \leq b \leq b_1$ . Durch den Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  in

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{ergibt sich} \quad b = \frac{a + b}{2} \quad \text{und demzufolge} \quad a = b.$$

2.2. Der Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  liefert  $ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a_1 b_1$  und somit wegen  $a = b > 0$  schließlich  $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$  als Grenzwert beider Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$ .  $\square$

**Aufgabe 4.** Man weise nach, daß die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)})$  reeller Zahlen konvergiert und berechne ihre Summe!

*Lösung.* Sowohl Quotienten- als auch Wurzelkriterium versagen bei der Entscheidung, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Jedoch ist die direkte Berechnung der Teilsummen durch vorhergehende Zerlegung der Summanden in Teilbrüche erfolgreich: Im Teilbruchansatz

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{a}{3k+1} + \frac{b}{3k+4} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

sollen die unbekanntenen Koeffizienten  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  bestimmt werden: Es gilt dann  $(3k+4)a + (3k+1)b = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor den Termen gleicher Ordnung in  $k$  sofort  $a+b=0$  sowie  $4a+b=1$  ergibt. Daraus folgt  $a = \frac{1}{3}$  und  $b = -\frac{1}{3}$ . Mit Hilfe einer Indexverschiebung folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+4} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+4)} \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(3n+4)} = 0$  konvergiert die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)})$  gegen die Summe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{1}{3}$ .  $\square$

**Aufgabe 5.** Man zeige, daß die durch

$$a_\ell = \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell \quad \text{bzw.} \quad b_\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{1}{m!} \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen  $(a_\ell)$  und  $(b_\ell)$  reeller Zahlen konvergieren und den gleichen Grenzwert besitzen!

*Lösung.* 1. Da für  $\ell \in \mathbb{N}$  stets  $1 - \frac{1}{\ell^2} \geq 0$  gilt, liefert die Bernoulli-Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^\ell = \left(1 - \frac{1}{\ell^2}\right)^\ell \geq 1 - \frac{1}{\ell} \quad \text{und} \quad a_\ell = \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell \geq \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{1-\ell}.$$

Daraus folgt das monotone Wachstum der Folge  $(a_\ell)$  vermöge

$$a_\ell \geq \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{1-\ell} = \left(\frac{\ell}{\ell-1}\right)^{\ell-1} = \left(1 + \frac{1}{\ell-1}\right)^{\ell-1} = a_{\ell-1} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2.$$

Da für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  offenbar auch  $b_{\ell+1} = \sum_{m=0}^{\ell+1} \frac{1}{m!} = b_\ell + \frac{1}{(\ell+1)!} \geq b_\ell$  gilt, ist auch die Folge  $(b_\ell)$  monoton wachsend.

2. Für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  folgt aufgrund der binomischen Formel

$$\begin{aligned} a_\ell &= \left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \frac{1}{\ell^m} = 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^m} \prod_{k=1}^m \frac{\ell-k+1}{k} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \frac{\ell-k+1}{\ell} = 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{k-1}{\ell}\right) \leq \sum_{m=0}^{\ell} \frac{1}{m!} = b_\ell. \end{aligned}$$

3. Daraus ergibt sich wegen  $m! \geq 2^{m-1}$  und der geometrischen Summenformel

$$a_\ell \leq b_\ell = 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m!} \leq 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{2^{m-1}} = 1 + \sum_{m=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^m} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^\ell}\right) \leq 3$$

für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Also konvergieren die monoton wachsenden und beschränkten Folgen  $(a_\ell)$  und  $(b_\ell)$  jeweils gegen einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b \leq 3$ .

4. Aus der Rechnung von Schritt 2 ist ersichtlich, daß

$$1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{k-1}{\ell}\right) \leq 1 + \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{k-1}{\ell}\right) = a_\ell$$

für alle  $n, \ell \in \mathbb{N}$  mit  $n \leq \ell$  gilt. Hält man  $n \in \mathbb{N}$  fest, dann folgt daraus wegen

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{k-1}{\ell}\right)\right) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} = b_n$$

und  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = a$  im Grenzprozeß  $\ell \rightarrow \infty$  die Relation  $b_n \leq a$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Somit liefert Schritt 3 schließlich  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq a \leq b$ , also  $a = b$ . Dieser Grenzwert wird als *Euler-Zahl*  $e \in \mathbb{R}$  bezeichnet.  $\square$

**Aufgabe 6.** Sei  $a_1 \in \mathbb{R}$  mit  $a_1 \geq 0$  vorgeben und eine Folge  $(a_k)$  reeller Zahlen durch  $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}$  für  $k \in \mathbb{N}$  definiert. Man zeige, daß die Folge  $(a_k)$  monoton, beschränkt und damit konvergent ist und berechne ihren Grenzwert!

*Lösung.* 1. Man zeigt induktiv, daß  $a_k \geq 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt, denn nach Voraussetzung gilt  $a_1 \geq 0$ . Gilt  $a_k \geq 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , dann folgt daraus  $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \geq 0$ .

2. Außerdem ergibt sich aus der Definition  $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}$  die Beziehung

$$(a_{k+1} - 2)(a_{k+1} + 2) = a_{k+1}^2 - 4 = (a_k + 2) - 4 = a_k - 2 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

was zu einer Unterscheidung der beiden Fälle  $a_1 \geq 2$  und  $0 \leq a_1 \leq 2$  Anlaß gibt:

2.1. Im Falle  $a_1 \geq 2$  folgt aus der induktiven Annahme, daß  $a_k - 2 \geq 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt, wegen Schritt 1 und 2 stets  $a_{k+1} - 2 = \frac{a_k - 2}{a_{k+1} + 2} \geq 0$ , das heißt, es gilt im Falle  $a_1 \geq 2$  auch  $a_k \geq 2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $a_{k+1} - 2 = \frac{a_k - 2}{a_{k+1} + 2} \leq a_k - 2$ , also  $a_{k+1} \leq a_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

2.2. Im Falle  $0 \leq a_1 \leq 2$  folgt aus der induktiven Annahme, daß  $a_k - 2 \leq 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt, wegen Schritt 1 und 2 stets  $a_{k+1} - 2 = \frac{a_k - 2}{a_{k+1} + 2} \leq 0$ , also im Falle  $0 \leq a_1 \leq 2$  auch  $0 \leq a_k \leq 2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $a_{k+1} - 2 = \frac{a_k - 2}{a_{k+1} + 2} \geq a_k - 2$  und somit  $a_{k+1} \geq a_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Somit ist gezeigt, daß  $(a_k)$  in jedem Falle eine monotone, beschränkte und somit konvergente Folge reeller Zahlen ist. Ist  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \geq 0$  ihr Grenzwert, dann liefert der Grenzprozeß  $k \rightarrow \infty$  in  $a_{k+1}^2 = a_k + 2$  die Beziehung  $a^2 = a + 2$ , das heißt,  $(a + 1)(a - 2) = 0$ , woraus wegen  $a \geq 0$  schließlich  $a = 2$  folgt.  $\square$

**Aufgabe 7.** Man zeige, daß die Identität

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt,}$$

schließe daraus auf die Konvergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k})$  und berechne ihre Summe!

*Lösung.* 1. Zunächst soll durch vollständige Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt werden, daß die Identität  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  gilt:

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  gilt in der Tat  $\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$ .

*Induktionsschritt:* Unter der Annahme der Induktionsvoraussetzung, daß die Identität für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt, soll deren Gültigkeit für  $n + 1$  gezeigt werden: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

womit der Induktionsbeweis erbracht ist.

2. Da die Folge  $(\frac{2^n}{n^\ell})$  für jedes  $\ell \in \mathbb{Z}$  bestimmt divergent ist und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^\ell} = \infty$  gilt, folgt daraus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\ell}{2^n} = 0$  für alle  $\ell \in \mathbb{Z}$  und somit die Konvergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k})$  gegen die Summe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{n+2}{2^n}) = 2$ .  $\square$

**Aufgabe 8.** 1. Man weise die Identität

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{K}, x \neq 1 \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ nach!}$$

2.1. Man zeige, daß die Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| > 1$  divergiert!

2.2. Man beweise, daß die Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  für jedes  $x \in \mathbb{K}$  mit  $|x| < 1$  konvergiert und berechne ihre Summe!

*Lösung.* 1. Sei  $x \in \mathbb{K}$  beliebig gegeben und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhält man durch Indexverschiebungen in der ersten und dritten Summe auf der rechten Seite der Identität

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \cdot \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1} - \sum_{k=1}^n 2kx^k + \sum_{k=1}^n kx^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k - \sum_{k=1}^n 2kx^k + \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)x^k \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+1) - 2k + (k-1))x^k + 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1} \end{aligned}$$

und somit

$$(1-x)^2 \cdot \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}.$$

Da im Falle  $x \neq 1$  stets  $(1-x)^2 \neq 0$  gilt, folgt daraus durch Multiplikation mit  $(1-x)^{-2} \in \mathbb{K}$  die Identität

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.1. Im Falle  $|x| > 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} |n(x-1) - 1| = \infty$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |nx^{n+1} - (n+1)x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n |n(x-1) - 1| = \infty,$$

und demnach  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sum_{k=1}^n kx^{k-1}| = \infty$  aufgrund von Schritt 1, woraus die Divergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  folgt.

2.2. Im Falle  $0 < |x| < 1$  gilt  $\frac{1}{|x|} > 1$  und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^n} = \infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n|x|^n} = \infty \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n|x|^{n+1}} = \infty,$$

woraus sich  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n|x|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n|x|^{n+1} = 0$  ergibt, was auch im Falle  $x = 0$  stimmt. Daraus folgt mit Schritt 1, daß die Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  gegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

konvergiert. □



*Alternative Lösung.* 2. Für jedes  $x \in \mathbb{K}$ ,  $x \neq 0$  konvergiert der absolute Betrag aufeinanderfolgender Summanden der Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  gegen den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)|x|^k}{k|x|^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |x| = |x|.$$

2.1. Im Falle  $x \in \mathbb{K}$ ,  $|x| > 1$  folgt daraus die Divergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$  mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

2.2. Im Falle  $x \in \mathbb{K}$ ,  $|x| < 1$  erhält man daraus aufgrund des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe  $(\sum_{k=1}^n kx^{k-1})$ . Da die geometrische Reihe  $(\sum_{k=0}^n x^k)$  für  $|x| < 1$  absolut gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

konvergiert, muß die Reihe  $(\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k x^m x^{k-m})$  der Cauchy-Produkte absolut gegen das Produkt

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k x^m x^{k-m} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

der geometrischen Summen konvergieren. □

**Aufgabe 9.** Man zeige, daß die Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)})$  reeller Zahlen konvergiert und berechne ihre Summe!

*Lösung.* Eine direkte Berechnung der Teilsummen durch vorhergehende Zerlegung der Summanden in Teilbrüche beginnt mit dem Teilbruchansatz

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} \quad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

wobei die unbekanntenen Koeffizienten  $a, b, c \in \mathbb{R}$  bestimmt werden: Daraus folgt für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung  $(k+1)(k+2)a + k(k+2)b + k(k+1)c = 1$ , also

$$(k^2 + 3k + 2)a + (k^2 + 2k)b + (k^2 + k)c = 1,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor den Termen gleicher Ordnung in  $k$  sofort  $2a = 1$ ,  $3a + 2b + c = 0$  sowie  $a + b + c = 0$  ergibt. Wegen  $a = \frac{1}{2}$  folgt daraus  $2b + c = -\frac{3}{2}$  sowie  $b + c = -\frac{1}{2}$  und somit  $b = -1$  sowie  $c = \frac{1}{2}$ . Indexverschiebungen in der ersten und dritten Summe auf der rechten Seite liefern für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Die Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)})$  konvergiert somit gegen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$ .  $\square$

*Alternative Lösung.* Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  betrachtet man die alternative Zerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Eine Indexverschiebung in der ersten Summe auf der rechten Seite liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Demzufolge konvergiert die Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)})$  gegen die Summe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$ .  $\square$

**Aufgabe 10.** Sei eine Folge  $(d_k)$  rationaler Zahlen durch

$$d_1 = 2, \quad d_{k+1} = \frac{d_k}{2} + \frac{1}{d_k} \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß  $0 < d_{k+1} < d_k$  sowie  $d_k^2 > 2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt!
2. Man weise nach, daß die Folge  $(d_k)$  gegen den Grenzwert  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  konvergiert!
3. Man beweise, daß es *keine* rationale Zahl  $d \in \mathbb{Q}$  mit  $d^2 = 2$  gibt, mit anderen Worten, daß  $d = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$  eine *irrationale* Zahl ist!

Index	$k$	1	2	3	4	5
Näherung	$d_k$	2	3/2	17/12	577/408	665 857/470 832
Abweichung	$d_k^2 - 2$	2	1/4	1/144	1/166 464	1/221 682 772 224

*Lösung.* 1.1. Induktiv wird gezeigt, daß  $d_k > 0$  und  $d_k^2 > 2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

*Induktionsanfang:* Für  $k = 1$  gilt in der Tat  $d_1 = 2 > 0$  und  $d_1^2 = 4 > 2$ .

*Induktionsschritt:* Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzungen  $d_k > 0$  sowie  $d_k^2 > 2$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt sind, erhält man  $d_{k+1} = \frac{d_k}{2} + \frac{1}{d_k} > 0$  sowie

$$\begin{aligned} d_{k+1}^2 &= \left( \frac{d_k}{2} + \frac{1}{d_k} \right)^2 = \frac{(d_k^2 + 2)^2}{4d_k^2} = \frac{d_k^4 + 4d_k^2 + 4}{4d_k^2} \\ &= \frac{d_k^4 - 4d_k^2 + 4}{4d_k^2} + \frac{8d_k^2}{4d_k^2} = \frac{(d_k^2 - 2)^2}{4d_k^2} + 2 > 2. \end{aligned}$$

1.2. Da  $d_k > 0$  und  $d_k^2 > 2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt, ergibt sich daraus die Monotonie

$$d_{k+1} = \frac{d_k}{2} + \frac{1}{d_k} = d_k - \frac{d_k^2 - 2}{2d_k} < d_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

2. Da die Folge  $(d_k)$  monoton fallend und nach unten durch  $\sqrt{2}$  beschränkt ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert  $d \geq \sqrt{2}$ . Der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  in

$$d_{k+1} = \frac{d_k}{2} + \frac{1}{d_k} \quad \text{liefert} \quad d = \frac{d}{2} + \frac{1}{d}$$

und somit  $d^2 = 2$ , also den Grenzwert  $d = \sqrt{2}$ .

2. Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl  $d \in \mathbb{Q}$  mit  $d^2 = 2$ , etwa mit der Darstellung  $d = \frac{a}{b}$ , wobei  $a, b \in \mathbb{N}$  nicht gleichzeitig gerade Zahlen sein sollen, da man ansonsten kürzen könnte. Außerdem erhielte man  $b \neq 1$ , da es kein  $a \in \mathbb{N}$  mit  $a^2 = 2$  gibt. Aus  $d^2 = 2$  würde somit  $a^2 = 2b^2$  folgen, das hieße,  $a \in \mathbb{N}$  wäre eine gerade Zahl  $a = 2m$  mit  $m \in \mathbb{N}$ . Man erhielte daraus  $a^2 = 4m^2 = 2b^2$  und somit  $b^2 = 2m^2$ , das hieße,  $b \in \mathbb{N}$  wäre ebenfalls eine gerade Zahl im Widerspruch zur Wahl von  $a, b \in \mathbb{N}$ . Die obige Annahme war daher falsch: Es gibt *keine* rationale Zahl  $d \in \mathbb{Q}$  mit  $d^2 = 2$ , also ist  $d = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$  eine *irrationale* Zahl.  $\square$

**Aufgabe 11.** Sei  $(a_k)$  eine Zahlenfolge, die gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{K}$  konvergiert. Man zeige, daß die durch  $b_\ell = \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} a_k \in \mathbb{K}$  für  $\ell \in \mathbb{N}$  definierte Folge  $(b_\ell)$  der arithmetischen Mittelwerte ebenfalls gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{K}$  konvergiert!

*Lösung.* 1. Sei  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $\delta > 0$  beliebig fixiert. Dann gibt es wegen der Konvergenz der Folge  $(a_k)$  gegen  $a \in \mathbb{K}$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $|a_k - a| \leq \frac{\delta}{2}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq k_0$  gilt. Daraus ergibt sich zunächst für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\ell \geq k_0 + 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_\ell - a| &= \left| \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} a_k - a \right| = \left| \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} (a_k - a) \right| \leq \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} |a_k - a| \\ &\leq \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{k_0} |a_k - a| + \frac{1}{\ell} \sum_{k=k_0+1}^{\ell} |a_k - a| \leq \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{k_0} |a_k - a| + \frac{\ell - k_0}{\ell} \cdot \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

2. Wählt man anschließend  $\ell_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $\ell_0 \geq \frac{2}{\delta} \sum_{k=1}^{k_0} |a_k - a|$  gilt, so folgt

$$\frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{k_0} |a_k - a| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N} \text{ mit } \ell \geq \ell_0.$$

Mit der Abschätzung aus Schritt 1 ergibt sich  $|b_\ell - a| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\ell - k_0}{\ell} \cdot \frac{\delta}{2} \leq \delta$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\ell \geq \max\{k_0 + 1, \ell_0\}$ , also die Konvergenz der Folge  $(b_\ell)$  gegen  $a \in \mathbb{K}$ .  $\square$

**Aufgabe 12.** Man zeige, daß für jedes  $b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 0$  jede der beiden Folgen  $(\sqrt[n]{b})$  und  $(\sqrt[n]{n})$  reeller Zahlen jeweils gegen den Grenzwert 1 konvergiert!

*Lösung.* 1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt aus  $n \geq 1$  stets  $\sqrt[n]{n} \geq 1$ , also  $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ . Demnach liefert die binomische Formel für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  die Abschätzung

$$n = ((\sqrt[n]{n} - 1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geq \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

und somit  $0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$ , also  $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  folgt daraus die Konvergenzbeziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

2. Im Falle  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 1$  erhält man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq b$  stets  $1 \leq \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{n}$  und somit wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ .

3. Im Falle  $b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < b \leq 1$  ergibt sich für  $d = \frac{1}{b} \geq 1$  zunächst  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{d} = 1$  und daraus schließlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{d}} = 1$ .  $\square$

**Aufgabe 13.** Eine echt gebrochene rationale Funktion  $\frac{\varphi}{f} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\} \rightarrow \mathbb{C}$  sei als Quotient zweier teilerfremder ganzer rationaler Funktionen  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Dabei habe  $f$  die Anzahl von  $\ell \in \mathbb{N}$  verschiedenen Nullstellen  $z_1, \dots, z_\ell \in \mathbb{C}$  der Ordnungen  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}$ , mit anderen Worten, die Gestalt

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\ell} (x - z_k)^{\alpha_k} \quad \text{für } x \in \mathbb{C},$$

und  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  habe die Ordnung  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $m < \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k$ .

Man zeige, daß es eine Darstellung der Funktion  $\frac{\varphi}{f}$  als *Teilbruchzerlegung*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(x - z_k)^j} \quad \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$$

mit Koeffizienten  $a_{k1}, \dots, a_{k\alpha_k} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  gibt!

*Lösung.* 1. Sei die ganze rationale Funktion  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f_1(x) = \prod_{k=2}^{\ell} (x - z_k)^{\alpha_k} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

gegeben. Dann gilt  $f(x) = (x - z_1)^{\alpha_1} f_1(x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}$  sowie  $f_1(z_1) \neq 0$ . Somit existiert ein  $a_{1\alpha_1} \in \mathbb{C}$ , so daß  $\varphi(z_1) - a_{1\alpha_1} f_1(z_1) = 0$  gilt. Daher gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_{1\alpha_1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ordnung kleiner als  $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k - 1$  ist, so daß

$$\varphi(x) - a_{1\alpha_1} f_1(x) = (x - z_1) \varphi_{1\alpha_1}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Für alle  $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$  folgt daraus

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{a_{1\alpha_1}}{(x - z_1)^{\alpha_1}} = \frac{(x - z_1) \varphi_{1\alpha_1}(x)}{(x - z_1)^{\alpha_1} f_1(x)} = \frac{\varphi_{1\alpha_1}(x)}{(x - z_1)^{\alpha_1 - 1} f_1(x)}.$$

Wegen  $f_1(z_1) \neq 0$  existiert ein  $a_{1\alpha_1 - 1} \in \mathbb{C}$ , so daß  $\varphi_{1\alpha_1}(z_1) - a_{1\alpha_1 - 1} f_1(z_1) = 0$  gilt. Daher gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_{1\alpha_1 - 1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ordnung kleiner als  $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k - 2$  ist, so daß

$$\varphi_{1\alpha_1}(x) - a_{1\alpha_1 - 1} f_1(x) = (x - z_1) \varphi_{1\alpha_1 - 1}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Daraus folgt für alle  $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$

$$\frac{\varphi_{1\alpha_1}(x)}{(x - z_1)^{\alpha_1 - 1} f_1(x)} - \frac{a_{1\alpha_1 - 1}}{(x - z_1)^{\alpha_1 - 1}} = \frac{(x - z_1) \varphi_{1\alpha_1 - 1}(x)}{(x - z_1)^{\alpha_1 - 1} f_1(x)} = \frac{\varphi_{1\alpha_1 - 1}(x)}{(x - z_1)^{\alpha_1 - 2} f_1(x)}.$$

Führt man in dieser Weise fort, so existiert im  $\alpha_1$ -ten Teilschritt wegen  $f_1(z_1) \neq 0$  ein  $a_{11} \in \mathbb{C}$ , so daß  $\varphi_{12}(z_1) - a_{11} f_1(z_1) = 0$  gilt. Daher gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Ordnung  $m_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $m_1 < \sum_{k=2}^{\ell} \alpha_k$ , so daß

$$\varphi_{12}(x) - a_{11} f_1(x) = (x - z_1) \varphi_1(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Daraus folgt für alle  $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$

$$\frac{\varphi_{12}(x)}{(x - z_1)f_1(x)} - \frac{a_{11}}{x - z_1} = \frac{(x - z_1)\varphi_1(x)}{(x - z_1)f_1(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

sowie schließlich

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \sum_{j=1}^{\alpha_1} \frac{a_{1j}}{(x - z_1)^j} = \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

durch die Kombination aller  $\alpha_1$  Teilschritte.

2. Wird die ganze rationale Funktion  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f_2(x) = \prod_{k=3}^{\ell} (x - z_k)^{\alpha_k} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

definiert, dann gibt es aufgrund einer zu Schritt 1 analogen Argumentation eine ganze rationale Funktion  $\varphi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Ordnung  $m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m_2 < \sum_{k=2}^{\ell} \alpha_k$ , so daß sich die Funktion  $\frac{\varphi_1}{f_1}$  wie folgt mit Koeffizienten  $a_{21}, \dots, a_{2\alpha_2} \in \mathbb{C}$  darstellen läßt:

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \sum_{j=1}^{\alpha_2} \frac{a_{2j}}{(x - z_2)^j} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_2, \dots, z_\ell\}.$$

Führt man auf diese Weise fort, dann gelangt man im  $(\ell - 1)$ -ten Schritt zu einer ganzen rationalen Funktion  $f_{\ell-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die durch

$$f_{\ell-1}(x) = (x - z_\ell)^{\alpha_\ell} \quad \text{für } x \in \mathbb{C}$$

definiert wird. Aufgrund einer zu Schritt 1 analogen Argumentation gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_{\ell-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , so daß sich die Funktion  $\frac{\varphi_{\ell-2}}{f_{\ell-2}}$  in der Form

$$\frac{\varphi_{\ell-2}(x)}{f_{\ell-2}(x)} = \sum_{j=1}^{\alpha_{\ell-1}} \frac{a_{\ell-1,j}}{(x - z_{\ell-1})^j} + \frac{\varphi_{\ell-1}(x)}{f_{\ell-1}(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_{\ell-1}, z_\ell\}$$

mit Koeffizienten  $a_{\ell-1,1}, \dots, a_{\ell-1,\alpha_{\ell-1}} \in \mathbb{C}$  darstellen läßt, wobei  $\varphi_{\ell-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Ordnung  $m_{\ell-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m_{\ell-1} < \alpha_\ell$  hat.

3. Im  $\ell$ -ten und letzten Schritt angelangt, wählt man im ersten Teilschritt zunächst  $a_{\ell\alpha_\ell} = \varphi_{\ell-1}(z_\ell)$ . Dann gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_{\ell\alpha_\ell} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ordnung kleiner ist als  $\alpha_\ell - 1$  ist, so daß

$$\varphi_{\ell-1}(x) - a_{\ell\alpha_\ell} = (x - z_\ell)\varphi_{\ell\alpha_\ell}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Daraus folgt

$$\frac{\varphi_{\ell-1}(x)}{f_{\ell-1}(x)} - \frac{a_{\ell\alpha_\ell}}{(x - z_\ell)^{\alpha_\ell}} = \frac{(x - z_\ell)\varphi_{\ell\alpha_\ell}(x)}{(x - z_\ell)^{\alpha_\ell}} = \frac{\varphi_{\ell\alpha_\ell}(x)}{(x - z_\ell)^{\alpha_\ell - 1}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_\ell\}.$$

In dieser Weise fortfahrend, wählt man im  $(\alpha_\ell - 1)$ -ten Teilschritt  $a_{\ell 2} = \varphi_{\ell 3}(z_\ell)$ . Demnach gibt es eine ganze rationale Funktion  $\varphi_{\ell 2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ordnung kleiner ist als 1, das heißt, eine konstante Funktion mit

$$\varphi_{\ell 3}(x) - a_{\ell 2} = (x - z_\ell) \varphi_{\ell 2}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Daraus folgt

$$\frac{\varphi_{\ell 3}(x)}{(x - z_\ell)^2} - \frac{a_{\ell 2}}{(x - z_\ell)^2} = \frac{(x - z_\ell) \varphi_{\ell 2}(x)}{(x - z_\ell)^2} = \frac{\varphi_{\ell 2}(x)}{x - z_\ell} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_\ell\}.$$

Im  $\alpha_\ell$ -ten und letzten Teilschritt wählt man  $a_{\ell 1} = \varphi_{\ell 2}(z_\ell)$ . Offenbar kann man die konstante Funktion  $\varphi_{\ell 2}$  nicht weiter zerlegen und erhält

$$\frac{\varphi_{\ell 2}(x)}{x - z_\ell} = \frac{a_{\ell 1}}{x - z_\ell} \quad \text{und somit} \quad \frac{\varphi_{\ell-1}(x)}{f_{\ell-1}(x)} = \sum_{j=1}^{\alpha_\ell} \frac{a_{\ell j}}{(x - z_\ell)^j} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_\ell\}$$

durch die Kombination aller  $\alpha_\ell$  Teilschritte. Die Gesamtheit aller  $\ell$  Schritte liefert mit

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(x - z_k)^j} \quad \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$$

schließlich die vollständige Teilbruchzerlegung.  $\square$

**Aufgabe 14.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit  $a_n = 1$  sowie die ganze rationale Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  für  $x \in \mathbb{R}$  gegeben. Dabei sei vorausgesetzt, daß es Zahlen  $\ell, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sowie  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{N}$  und  $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k + \sum_{k=1}^q 2\beta_k = n$  sowie  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ ,  $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{R}$  und  $d_1, \dots, d_q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt, so daß  $f$  die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q ((x - y_k)^2 + d_k^2)^{\beta_k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

als Produkt teilerfremder Faktoren besitzt. Seien  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $m < n$  und Koeffizienten  $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  mit  $b_m \neq 0$  gegeben, so daß die durch  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  für  $x \in \mathbb{R}$  definierte ganze rationale Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  teilerfremd zu  $f$  ist.

Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen die echt gebrochene rationale Funktion  $\frac{\varphi}{f} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Darstellung als *Teilbruchzerlegung*

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{kj}}{(x - x_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{B_{kj}(x - y_k) + C_{kj}}{((x - y_k)^2 + d_k^2)^j} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$$

mit Koeffizienten  $A_{k1}, \dots, A_{k\alpha_k} \in \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  sowie  $B_{k1}, \dots, B_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$  und  $C_{k1}, \dots, C_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, q\}$  hat!

*Lösung.* 1. Definiert man die ganzen rationalen Funktionen  $h, \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $h(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  und  $\psi(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$  für  $z \in \mathbb{C}$ , dann besitzt  $h$  nach Voraussetzung die Produktdarstellung

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\ell} (z - z_k)^{\alpha_k} \cdot \prod_{k=1}^q (z - w_k)^{\beta_k} \cdot \prod_{k=1}^q (z - \bar{w}_k)^{\beta_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

mit einer Anzahl von  $\ell + 2q \in \mathbb{N}$  verschiedenen Nullstellen

$$z_k = (x_k, 0) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, \ell\}$$

sowie

$$w_k = (y_k, d_k) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \bar{w}_k = (y_k, -d_k) \in \mathbb{C} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, q\}.$$

Somit existiert eine Darstellung der rationalen Funktion  $\frac{\psi}{h}$  als Teilbruchzerlegung

$$\frac{\psi(z)}{h(z)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{b_{kj}}{(z - w_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{c_{kj}}{(z - \bar{w}_k)^j}$$

für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell, w_1, \dots, w_q, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_q\}$  mit Koeffizienten  $a_{k1}, \dots, a_{k\alpha_k} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  sowie  $b_{k1}, \dots, b_{k\beta_k} \in \mathbb{C}$  und  $c_{k1}, \dots, c_{k\beta_k} \in \mathbb{C}$  für  $k \in \{1, \dots, q\}$ .

2. Da der Imaginärteil des Funktionswerts  $\frac{\psi(z)}{h(z)}$  für alle  $z = (x, 0) \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$  verschwindet, liefert die komplexe Konjugation der obigen Teilbruchzerlegung für jedes  $z = (x, 0) \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{b_{kj}}{(z - w_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{c_{kj}}{(z - \bar{w}_k)^j} \\ = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\bar{a}_{kj}}{(z - z_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\bar{b}_{kj}}{(z - \bar{w}_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\bar{c}_{kj}}{(z - w_k)^j}, \end{aligned}$$

also  $\bar{a}_{kj} = a_{kj}$  für alle  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  und  $j \in \{1, \dots, \alpha_k\}$  sowie  $\bar{c}_{kj} = b_{kj}$  für alle  $k \in \{1, \dots, q\}$  und  $j \in \{1, \dots, \beta_k\}$  wegen der Eindeutigkeit der Teilbruchzerlegung, woraus sich für jedes  $z = (x, 0) \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_\ell\}$  die Darstellung

$$\frac{\psi(z)}{h(z)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\bar{c}_{kj}(z - \bar{w}_k)^j + c_{kj}(z - w_k)^j}{(z - w_k)^j (z - \bar{w}_k)^j}$$

ergibt. Damit hat die rationale Funktion  $\frac{\varphi}{f} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Darstellung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{A_{kj}}{(x - x_k)^j} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{B_{kj}(x - y_k) + C_{kj}}{((x - y_k)^2 + d_k^2)^j} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$$

mit Koeffizienten  $A_{k1}, \dots, A_{k\alpha_k} \in \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  sowie  $B_{k1}, \dots, B_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$  und  $C_{k1}, \dots, C_{k\beta_k} \in \mathbb{R}$  für  $k \in \{1, \dots, q\}$ .  $\square$