Vorlesung 1

Mengen und Abbildungen

Axiom der vollständigen Induktion. Wenn eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die folgenden Eigenschaften besitzt, dann gilt $M = \mathbb{N}$:

1. Induktionsanfang: $1 \in M$,
2. Induktionsschritt: Aus $n \in M$ folgt $n + 1 \in M$.

Teilmengen endlicher Mengen. 1. Die endliche Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ besitzt genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ Elementen. Hierbei definiert man die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

2. Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3. Es gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$.
4. Insgesamt enthält $\{1, 2, \dots, n\}$ also $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ verschiedene Teilmengen.

Operationen mit Mengen. Für Mengen X und Y definiert man die Operationen

1. Vereinigung: $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\}$,
2. Durchschnitt: $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\}$,
3. Differenz: $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin Y\}$,
4. Kartesisches Produkt: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$.

Dies läßt sich auf endlich oder unendlich viele Mengen ausweiten: Ist A eine Menge (von Indizes) und wird für jedes $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben, so bildet man deren

5. Vereinigung: $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in A \text{ mit } x \in X_\alpha\}$,
6. Durchschnitt: $\cap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x \mid \text{Für jedes } \alpha \in A \text{ gilt } x \in X_\alpha\}$.

Dabei gelten unter anderem die folgenden distributiven Rechenregeln:

7. $(\cap_{\alpha \in A} X_\alpha) \cup Y = \cap_{\alpha \in A}(X_\alpha \cup Y)$ sowie $(\cup_{\alpha \in A} X_\alpha) \cap Y = \cup_{\alpha \in A}(X_\alpha \cap Y)$,
8. $(\cap_{\alpha \in A} X_\alpha) \setminus Y = \cap_{\alpha \in A}(X_\alpha \setminus Y)$ sowie $(\cup_{\alpha \in A} X_\alpha) \setminus Y = \cup_{\alpha \in A}(X_\alpha \setminus Y)$,
9. $X \setminus (\cap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \cup_{\alpha \in A}(X \setminus X_\alpha)$ sowie $X \setminus (\cup_{\alpha \in A} X_\alpha) = \cap_{\alpha \in A}(X \setminus X_\alpha)$.

Grundregeln der Logik. Sind A, B, C Aussagen mit dem Wahrheitsgehalt *wahr* oder *falsch*, dann gelten die folgenden Regeln:

1. *›Nicht »A und B«‹* ist äquivalent zu *›»Nicht A« oder »Nicht B«‹*,
2. *›Nicht »A oder B«‹* ist äquivalent zu *›»Nicht A« und »Nicht B«‹*,
3. *»A äquivalent zu B«* ist äquivalent zu *›»Aus A folgt B« und »Aus B folgt A«‹*,
4. Aus *›»Aus A folgt B« und »Aus B folgt C«‹* folgt *»Aus A folgt C«*,
5. *»Aus A folgt B«* ist äquivalent zu *›Aus »Nicht B« folgt »Nicht A«‹*,
6. *›Nicht »Aus A folgt B«‹* ist äquivalent zu *›A und »Nicht B«‹*.

Abbildungen. 1. Eine *Abbildung* $f : X \to Y$, welche eine Menge X in eine Menge Y abbildet, ordnet jedem Element $x \in X$ *genau* ein Element $y = f(x) \in Y$ zu.

2. Die Mengen X bzw. Y nennt man *Definitionsbereich* bzw. *Wertebereich*, die Teilmenge $f[X] = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \subset Y$ heißt *Bildmenge* der Abbildung $f : X \to Y$.

3. Die Produktmenge $\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ wird *Graph* der Abbildung $f : X \to Y$ genannt.

4. Die identische Abbildung auf X wird mit $I_X : X \to X$ bezeichnet, es gilt also $I_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

Einschränkung und Fortsetzung. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Für jede Teilmenge $Z \subset X$ heißt die durch $g(x) = f(x)$ für alle $x \in Z$ definierte Abbildung $g : Z \to Y$ die *Einschränkung* $f|Z$ von f auf Z.

2. Für Teilmengen $X \subset Z$ wird eine Abbildung $g : Z \to Y$ als eine *Fortsetzung* von f bezeichnet, wenn $g|X = f$ gilt.

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$, so heißt f *injektiv*.
(Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y \in Y$ *höchstens* eine Lösung $x \in X$.)

2. Gibt es für jedes $y \in Y$ *mindestens* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so heißt f *surjektiv*.

3. Wenn f injektiv und surjektiv ist, dann nennt man f *bijektiv*.
(Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y \in Y$ *genau* eine Lösung $x \in X$.)

Verkettung. Seien $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die durch $h(x) = g(f(x))$ für jedes $x \in X$ definierte Abbildung $h : X \to Z$ die *Verkettung* $g \circ f$ von g und f.

Inverse Abbildung. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = I_X$ und $f \circ g = I_Y$ existiert. Die Abbildung g wird als *inverse Abbildung* f^{-1} von f bezeichnet.

Inverse Abbildung einer Verkettung. Seien $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.

Bilder und Urbilder von Mengen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Für $X_0 \subset X$ nennt man $f[X_0] = \{f(x) \in Y \mid x \in X_0\}$ das *Bild* von X_0 bzgl. f.

2. Für $Y_0 \subset Y$ heißt $f^{-1}[Y_0] = \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\}$ das *Urbild* von Y_0 bzgl. f.

Für alle Teilmengen $X_1, X_2 \subset X$ und $Y_1, Y_2 \subset Y$ gelten die folgenden Rechenregeln:

3. $X_1 \subset f^{-1}[f[X_1]]$,
4. $f[f^{-1}[Y_1]] = Y_1 \cap f[X] \subset Y_1$,
5. $f[X_1 \cap X_2] \subset f[X_1] \cap f[X_2]$ sowie $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$,
6. $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$ sowie $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$.