Vorlesung 11

Analytische Funktionen

Es wird eine Klasse unendlichmal differenzierbarer Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ eingeführt, wobei $X \subset \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper sind.

Unendlichmal differenzierbare Grenzfunktionen von Potenzreihen. 1. Ist (s_n) eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) in $\mathbb{K}$ und dem Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert (s_n) in $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R\}$ gegen eine unendlichmal differenzierbare Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$.

2. Die für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ summandenweise ℓ-mal differenzierte Potenzreihe $(D^\ell s_n)$ um $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten $\left(\binom{\ell+k}{\ell} \ell!\, a_{k+\ell}\right)$ in $\mathbb{K}$ hat denselben Konvergenzradius $R > 0$ und konvergiert in X gegen die ℓ-te Ableitung $D^\ell s : X \to \mathbb{K}$ der Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$, das heißt, es gilt

$$D^\ell s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell + k}{\ell} \ell!\, a_{k+\ell}(x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in X$$

und somit $D^\ell s(x_0) = \ell!\, a_\ell \in \mathbb{K}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, daß die Taylor-Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k s(x_0)(x - x_0)^k\right)$ der Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$ in $x \in X$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in X$ mit der absolut konvergenten Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k\right)$ übereinstimmt und somit gegen den Grenzwert $s(x) \in \mathbb{K}$ konvergiert.

Verkettung von Potenzreihen. Sei (f_n) bzw. (g_n) eine Potenzreihe um den Nullpunkt mit den Koeffizienten (a_k) bzw. (b_ℓ) in $\mathbb{K}$, welche jeweils für den Radius $r_1 > 0$ bzw. $r_2 > 0$ in $X_1 = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r_1\}$ bzw. $X_2 = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| < r_2\}$ gegen eine Grenzfunktion $f : X_1 \to \mathbb{K}$ bzw. $g : X_2 \to \mathbb{K}$ konvergiert.

Gilt $|a_0| < r_2$, dann gibt es einen Radius $r > 0$ und eine Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 = \mathbb{0}$ mit Koeffizienten (c_ℓ) in $\mathbb{K}$, welche in $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$ gegen die Verkettung $g \circ f : X \to \mathbb{K}$ konvergiert. Die Koeffizienten (c_ℓ) in der Summe

$$g(f(x)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell \quad \text{für } x \in X$$

erhält man, indem man in der Summe $g(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Potenz z^ℓ durch die Summe der ℓ-fachen Produktreihe

$$z^\ell = f(x)^\ell = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^\ell \quad \text{für } x \in X$$

ersetzt und anschließend nach Potenzen von x ordnet.

Analytische Funktionen. Eine Funktion $s : X \to \mathbb{K}$ heißt *analytisch*, wenn für jeden Punkt $x_0 \in X$ ein Radius $r_0 > 0$ mit $X_0 = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < r_0\} \subset X$ und eine Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt x_0 existiert, welche in X_0 gegen die Grenzfunktion s konvergiert. In diesem Falle ist $s : X \to \mathbb{K}$ unendlichmal differenzierbar, und die Ableitungen $D^k s : X \to \mathbb{K}$ sind selbst für jedes $k \in \mathbb{N}$ analytisch.

Geometrische Potenzreihen. Die durch die Vorschrift

$$s(x) = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x} \quad \text{für } x \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\}$$

definierte Funktion $s : \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\} \to \mathbb{K}$ besitzt in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\}$ für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die k-te Ableitung

$$D^k s(x_0) = \frac{k!}{(\mathbb{1} - x_0)^{k+1}} \in \mathbb{K}.$$

Somit liefert die Summenformel für die geometrische Reihe für jeden Punkt $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < |\mathbb{1} - x_0|$ die Konvergenz der Taylor-Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k s(x_0)(x - x_0)^k\right)$ gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k s(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x - x_0}{\mathbb{1} - x_0}\right)^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x_0} \cdot \frac{\mathbb{1} - x_0}{\mathbb{1} - x} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - x},$$

das heißt, die Potenzreihe (s_n) mit den Koeffizienten $\left((\mathbb{1} - x_0)^{-k-1}\right)$ um $x_0 \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\}$ hat den Konvergenzradius $R_0 = |\mathbb{1} - x_0| > 0$ und konvergiert in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R_0\}$ gegen die Grenzfunktion $s : \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{1}\} \to \mathbb{K}$, die somit analytisch ist.

Analytische Grenzfunktionen von Potenzreihen. Jede Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit dem Konvergenzradius $R > 0$ konvergiert in der Menge $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R\}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$, denn es gibt für jedes $x_1 \in X$ eine Potenzreihe (g_n) um den Mittelpunkt $x_1 \in X$, welche in der Menge $\{z \in \mathbb{K} \mid |z - x_1| < R - |x_1 - x_0|\}$ gegen s konvergiert.

Ganze analytische Funktionen. Eine Funktion $s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ wird *ganze analytische* Funktion genannt, wenn es für einen (und damit für jeden) Punkt $x_0 \in \mathbb{K}$ eine Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit dem Konvergenzradius $R = \infty$ gibt, welche im ganzen Körper $\mathbb{K}$ gegen die Grenzfunktion s konvergiert.

Operationen mit analytischen Funktionen. Sind $f, g : X \to \mathbb{K}$ analytische Funktionen, dann sind auch die Summe $f + g : X \to \mathbb{K}$ und das Produkt $fg : X \to \mathbb{K}$ analytische Funktionen.

Verkettung analytischer Funktionen. Seien $X, Y \subset \mathbb{K}$ offene Teilmengen sowie $f : X \to \mathbb{K}$ und $g : Y \to \mathbb{K}$ analytische Funktionen. Dann ist im Falle $f[X] \subset Y$ auch die Verkettung $g \circ f : X \to \mathbb{K}$ eine analytische Funktion.

Fortsetzung von Potenzreihen. Sei eine Potenzreihe (s_n) bzw. (g_n) um den Mittelpunkt $x_1 \in \mathbb{K}$ bzw. $x_2 \in \mathbb{K}$ gegeben, welche jeweils für den Radius $r_1 > 0$ bzw. $r_2 > 0$ in $X_1 = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_1| < r_1\}$ bzw. $X_2 = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_2| < r_2\}$ gegen die Grenzfunktion $s : X_1 \to \mathbb{K}$ bzw. $g : X_2 \to \mathbb{K}$ konvergiert.

Gilt $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ und gibt es eine nichtleere offene Menge $X \subset X_1 \cap X_2$ derart, daß $s(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt, dann folgt daraus $s(x) = g(x)$ für alle $x \in X_1 \cap X_2$.

Fortsetzung analytischer Funktionen. Seien $s : X \to \mathbb{K}$ und $g : X \to \mathbb{K}$ zwei analytische Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Menge $X \subset \mathbb{K}$.

1. Existiert eine nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ derart, daß $s(x) = g(x)$ für jedes $x \in U$ gilt, dann folgt daraus $s(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

2. Gibt es eine abgeschlossene beschränkte Menge $F \subset X$ derart, daß die Menge $\{x \in F \mid s(x) = g(x)\}$ unendlich viele Punkte enthält, dann ergibt sich auch daraus schon $s(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Fortsetzung analytischer Funktionen vom Reellen ins Komplexe. Sei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $s : U \to \mathbb{R}$ eine analytische Funktion. Wird die Funktion $f : U \times \{0\} \to \mathbb{C}$ durch $f(a, 0) = (s(a), 0) \in \mathbb{C}$ für $a \in U$ definiert, dann gilt:

1. Es gibt eine offene Menge $X \subset \mathbb{C}$ mit $X \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = U \times \{0\}$ und eine Fortsetzung von $f : X \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{C}$ zu einer analytischen Funktion $g : X \to \mathbb{C}$.

2. Ist $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Falle $U = \mathbb{R}$ eine ganze analytische Funktion, dann gibt es eine Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{C}$ zu einer ganzen analytischen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.