Vorlesung 16

Integration reeller Funktionen

Seien Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ein Körper $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vorgegeben.

Integral von Linearkombinationen. Sind $g, h : [a,b] \to \mathbb{L}$ zwei regulierte Funktionen, dann gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$ die Identität

$$\int_a^b \big(\lambda g(\xi) + \mu h(\xi)\big)\, d\xi = \lambda \int_a^b g(\xi)\, d\xi + \mu \int_a^b h(\xi)\, d\xi.$$

Transformation der Variablen. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ eine regulierte Funktion, ferner $X = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha < \beta$ sowie $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion einer regulierten Funktion $\gamma : X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi[X] \subset [a,b]$. Ist g stetig oder φ monoton, dann gilt die Formel

$$\int_\alpha^\beta g(\varphi(t)) D\varphi(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(\xi)\, d\xi.$$

Teilweise Integration. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{L}$ bzw. $\varphi : [a,b] \to \mathbb{L}$ eine Stammfunktion einer regulierten Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ bzw. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{L}$, dann gilt stets

$$\int_a^b \big(f(\xi) D\varphi(\xi) + \varphi(\xi) Df(\xi)\big)\, d\xi = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a).$$

Mittelwertsatz. Für jede regulierte Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ gilt die Abschätzung

$$\left| \int_a^b g(\xi)\, d\xi \right| \le \int_a^b |g(\xi)|\, d\xi \le |b-a| \sup_{\xi \in [a,b]} |g(\xi)|.$$

Vergleichsprinzip. Sind $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ regulierte Funktionen, welche $|g(\xi)| \le h(\xi)$ für alle $\xi \in [a,b]$ erfüllen, dann gilt die Ungleichung

$$\left| \int_a^b g(\xi)\, d\xi \right| \le \int_a^b |g(\xi)|\, d\xi \le \int_a^b h(\xi)\, d\xi.$$

Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. 1. Konvergiert die Folge (g_n) regulierter Funktionen $g_n : [a,b] \to \mathbb{L}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$, so konvergiert die Zahlenfolge $\big(\int_a^b g_n(\xi)\, d\xi\big)$ der Integrale über g_n gegen das Integral $\int_a^b g(\xi)\, d\xi$ über die regulierte Grenzfunktion g.

2. Konvergiert die Reihe $\big(\sum_{k=0}^n g_k\big)$ mit regulierten Summanden $g_k : [a,b] \to \mathbb{L}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{L}$, so konvergiert die summandenweise integrierte Reihe $\big(\sum_{k=0}^n \int_a^b g_k(\xi)\, d\xi\big)$ gegen das Integral $\int_a^b g(\xi)\, d\xi$ über die regulierte Grenzfunktion g, und es gilt

$$\sum_{k=0}^\infty \int_a^b g_k(\xi)\, d\xi = \int_a^b \sum_{k=0}^\infty g_k(\xi)\, d\xi = \int_a^b g(\xi)\, d\xi.$$

Integration der Grenzfunktion von Potenzreihen. 1. Ist (s_n) eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit den Koeffizienten a_k in $\mathbb{R}$ und dem Konvergenzradius $R > 0$, so konvergiert (s_n) in $X = \{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi - x_0| < R\}$ gegen eine analytische Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{R}$, wobei diese Konvergenz für jedes $r \in]0, R[$ im Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig ist.

2. Betrachtet man für $x \in X$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die durch summandenweise Integration

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} s_n(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k(\xi - x_0)^k d\xi = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

definierte Stammfunktion $f_n : X \to \mathbb{R}$ der Teilsumme $s_n : X \to \mathbb{R}$, dann hat die Potenzreihe (f_n) um x_0 ebenfalls den Konvergenzradius $R > 0$ und konvergiert in X gegen die für $x \in X$ durch

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} s(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi - x_0)^k d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

definierte analytische Stammfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ der Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{R}$.

Taylor-Formel mit integralem Restglied. Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, ferner $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : X \to \mathbb{L}$ $(n+1)$-mal differenzierbar mit stetiger $(n+1)$-ter Ableitung $D^{n+1} f : X \to \mathbb{L}$. Für festgehaltenes $x \in X$ besitzt die durch

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(\xi)}{k!} (x - \xi)^k \quad \text{für jedes } \xi \in X$$

definierte Funktion $g : X \to \mathbb{L}$ eine stetige Ableitung $Dg : X \to \mathbb{L}$, und es gilt

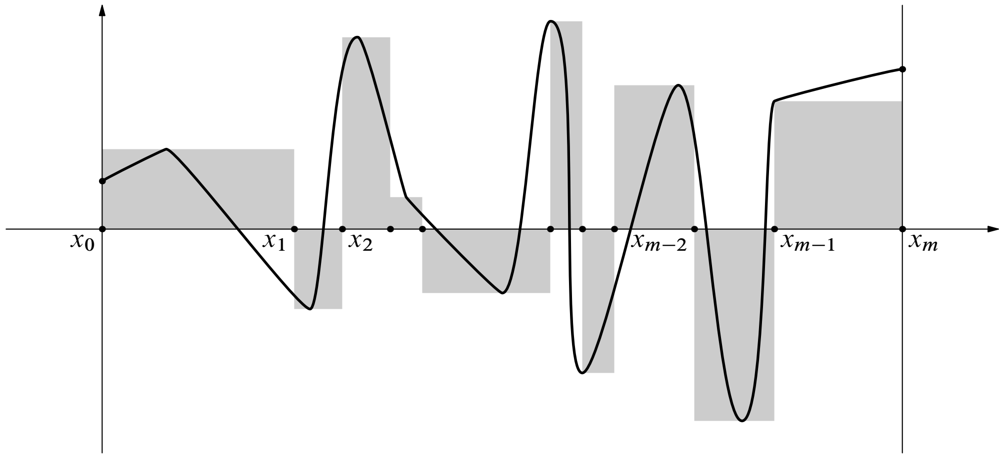
$$\begin{aligned} Dg(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{k+1} f(\xi)}{k!} (x - \xi)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k f(\xi)}{k!} k(x - \xi)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{D^k f(\xi)}{(k-1)!} (x - \xi)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k f(\xi)}{(k-1)!} (x - \xi)^{k-1} = \frac{D^{n+1} f(\xi)}{n!} (x - \xi)^n \end{aligned}$$

für jedes $\xi \in X$. Somit liefert die Integration über die Ableitung $Dg : X \to \mathbb{L}$ von $x_0 \in X$ bis $x \in X$ wegen

$$f(x) = g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} Dg(\xi)\, d\xi$$

die *Taylor-Formel* mit integralem Restglied

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{D^{n+1} f(\xi)}{n!} (x - \xi)^n d\xi.$$

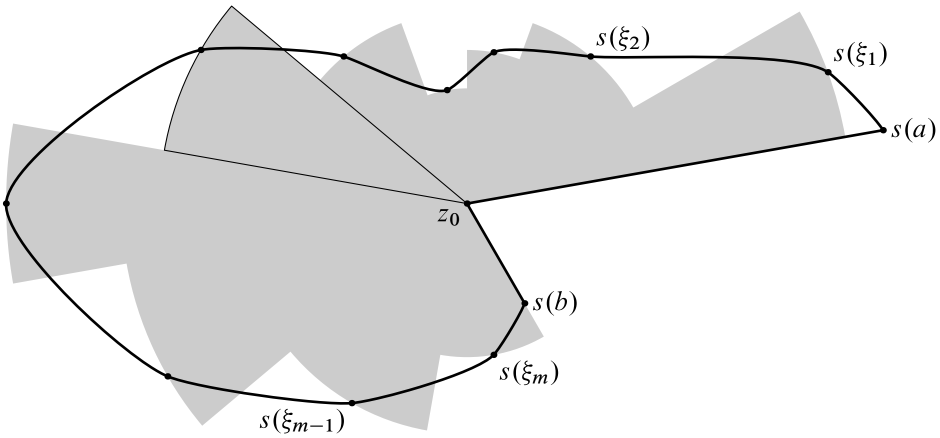


Integral als Grenzwert von Riemann-Summen. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{L}$ eine regulierte Funktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jede endliche Folge

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \cdots \le x_{k-1} \le \xi_k \le x_k \le \cdots \le x_{m-1} \le \xi_m \le x_m$$

von Punkten aus $[a,b]$, welche $x_k - x_{k-1} \le \delta$ für alle $k \in \{1,\ldots,m\}$ erfüllen, die Differenz von *Integral* und *Riemann-Summe über* g folgender Abschätzung genügt:

$$\left| \int_{x_0}^{x_m} g(\xi)\, d\xi - \sum_{k=1}^{m} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \le \varepsilon.$$



Leibniz-Sektorformel. Sei $[a,b] \subset [\tau, 2\pi + \tau]$ für $\tau \in \mathbb{R}$ ein gegebenes Intervall von Winkeln. Für jede regulierte Funktion $\rho : [a,b] \to [0,\infty[$ wird durch

$$s(t) = z_0 + \rho(t)(\cos t, \sin t) \in \mathbb{C} \quad \text{für } t \in [a,b]$$

eine Funktion $s : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert, die eine Kurve in Polarkoordinaten bzgl. des Pols $z_0 \in \mathbb{C}$ darstellt, wobei der Sektor $\big\{(1-\lambda)z_0 + \lambda s(t) \in \mathbb{C} \mid t \in [a,b],\ \lambda \in [0,1]\big\}$ den Flächeninhalt $\int_a^b \frac{1}{2}|\rho(t)|^2 dt$ besitzt.