Vorlesung 8

Stetige Funktionen

Es werden verschiedene Stetigkeitsbegriffe für Funktionen $f : X \to \mathbb{L}$ eingeführt, wobei $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist und $\mathbb{K}, \mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vorgegebene Körper sind.

Stetigkeit. Sei $f : X \to \mathbb{L}$ eine Funktion.

1. Man nennt f *in* $x_0 \in X$ *stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ gilt.
2. Die Funktion f ist genau dann in einem Häufungspunkt $x_0 \in X$ von X stetig, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
3. Ist $x_0 \in X$ ein isolierter Punkt, also kein Häufungspunkt von X, dann ist jede Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ stetig in $x_0 \in X$.
4. Man nennt $f : X \to \mathbb{L}$ *stetig*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Rechtsseitige Stetigkeit. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann nennt man eine Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ *in* $x_0 \in X$ *rechtsseitig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ gilt.

Linksseitige Stetigkeit. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann nennt man eine Funktion $f : X \to \mathbb{L}$ *in* $x_0 \in X$ *linksseitig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 - \delta \leq x \leq x_0$ stets $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ gilt.

Operationen mit stetigen Funktionen. Sind $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge sowie die Funktionen $f, h : X \to \mathbb{L}$ im Punkt $x_0 \in X$ stetig, dann gilt:

1. Die Summe $f + h$ und das Produkt fh sind in x_0 stetig.
2. Im Falle $h(x_0) \neq \mathbb{0}$ ist der Quotient $\frac{f}{h}$ in x_0 stetig.

Stetigkeit rationaler Funktionen. 1. Seien $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit der durch $f_0(x) = a_0$ und $f_1(x) = x$ für $x \in \mathbb{K}$ definierten Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist somit auch die durch $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ für $x \in \mathbb{K}$ definierte *ganze rationale* Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ stetig.

2. Seien ferner $\ell \in \mathbb{N}$ und $b_0, b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{K}$ sowie eine Menge $X \subset \mathbb{K}$ vorgegeben, so daß die durch $h(x) = \sum_{k=0}^{\ell} b_k x^k$ für $x \in X$ definierte ganze rationale Funktion $h : X \to \mathbb{K}$ *keine* Nullstellen in X besitzt. Dann ist auch die *gebrochene rationale Funktion* $\frac{f}{h} : X \to \mathbb{K}$ stetig.

Stetigkeit der Verkettung. Seien $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge sowie $f : X \to \mathbb{L}$ eine in $x_0 \in X$ stetige Funktion, ferner $Y \subset \mathbb{L}$ eine Teilmenge, so daß $f[X] \subset Y$ gilt sowie $g : Y \to \mathbb{M}$ eine in $f(x_0) \in f[X]$ stetige Funktion mit Werten in einem weiteren Körper $\mathbb{M} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to \mathbb{M}$ in $x_0 \in X$ stetig.

Gleichmäßig konvergente Folgen stetiger Funktionen. Ist $X \subset \mathbb{K}$ eine Teilmenge und (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{L}$, welche gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{L}$ konvergiert, dann ist f ebenfalls stetig.

Stetigkeit der Grenzfunktion von Potenzreihen. Sei (s_n) eine Potenzreihe um den Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{K}$ mit den Koeffizienten (a_k) in $\mathbb{K}$ und dem Konvergenzradius $R > 0$, die in $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R\}$ gegen die Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{K}$ konvergiert. Da die Folge (s_n) stetiger Funktionen $s_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ für jedes $r \in]0, R[$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < r\}$ gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion s stetig.

Zwischenwertsatz. 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$) und $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y_0 < f(b)$ (bzw. $f(a) > y_0 > f(b)$) gegeben. Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y_0$.

2. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, daß sowohl $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ als auch $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ gilt, dann ist f surjektiv.

(Einfach) zusammenhängende Mengen. 1. Man bezeichnet eine Menge $X \subset \mathbb{K}$ als *zusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in X$ eine stetige Funktion $\varphi : [0, 1] \to X$ existiert, so daß $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$ gilt.

2. Eine zusammenhängende Menge $X \subset \mathbb{K}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn für jede stetige Funktion $\varphi : \{z \in \mathbb{K} \mid |z| = 1\} \to X$ eine stetige Fortsetzung $\psi : \{z \in \mathbb{K} \mid |z| \leq 1\} \to X$ von φ existiert.

3. Jedes Intervall $X \subset \mathbb{R}$ ist einfach zusammenhängend.

4. Ist $X \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, so ist X ein Intervall.

5. Der Kreis $\{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| \leq r\}$ um $x_0 \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r > 0$ ist einfach zusammenhängend.

6. Der Kreisring $\{x \in \mathbb{C} \mid \rho \leq |x - x_0| \leq r\}$ um $x_0 \in \mathbb{C}$ mit dem inneren Radius $\rho > 0$ und dem äußeren Radius $r > \rho$ ist (*nicht* einfach) zusammenhängend.

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen. Ist die Menge $X \subset \mathbb{K}$ (einfach) zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{L}$ eine stetige Funktion, dann ist auch die Bildmenge $f[X] \subset \mathbb{L}$ (einfach) zusammenhängend.

(Strenge) Monotonie. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Die Funktion f heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), wenn für alle $x, y \in X$ aus $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$) folgt.

2. Man nennt die Funktion f *streng monoton wachsend* (bzw. *fallend*), wenn für alle $x, y \in X$ aus $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$) folgt.

3. Ist $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f stetig und injektiv, dann ist f streng monoton.

4. Ist $X \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f streng monoton, dann ist die Inverse f^{-1} stetig.

Stetigkeit der Wurzelfunktionen. Sind $m \in \mathbb{N}$ und das Intervall $X = [0, \infty[$ vorgegeben, so ist die durch $f(x) = x^m$ für $x \in X$ definierte ganze rationale Funktion $f : X \to X$ stetig und wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ auch surjektiv. Da in der binomischen Formel

$$f(x) - f(y) = x^m - y^m = (x - y) \sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k} \quad \text{für } x, y \in X$$

die Summe im zweiten Faktor nur im Falle $x = y = 0$, $m > 1$ verschwindet, folgt aus $f(x) = f(y)$ stets $x = y$, woraus sich die Injektivität und somit die strenge Monotonie von f ergibt. Damit ist auch die durch $f^{-1}(x) = \sqrt[m]{x}$ für $x \in X$ definierte Inverse $f^{-1} : X \to X$ von f stetig und bijektiv, also ebenfalls streng monoton.

Stetige Bilder abgeschlossener beschränkter Mengen. Ist $X \subset \mathbb{K}$ eine abgeschlossene beschränkte Menge und $f : X \to \mathbb{L}$ eine stetige Funkion, dann gilt:

1. Die Bildmenge $f[X] \subset \mathbb{L}$ ist ebenfalls beschränkt und abgeschlossen.
2. Im Falle $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ besitzt die Bildmenge $f[X] \subset \mathbb{R}$ Maximum und Minimum.
3. Die Funktion f ist *gleichmäßig stetig:* Es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x_0 \in X$ mit $|x - x_0| \le \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ gilt.