

## Vorlesung 9

# Differenzierbare Funktionen

Es wird der Begriff der Differenzierbarkeit von Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  eingeführt, welche auf einer Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  des Körpers  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  definiert sind, der im Körper  $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  enthalten ist.

**Differenzierbarkeit.** 1. Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  heißt *differenzierbar in*  $x_0 \in X$ , wenn  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $X$  ist und der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \in \mathbb{L}$$

existiert. Dieser Grenzwert  $Df(x_0) \in \mathbb{L}$  heißt *Ableitung von*  $f$  *in*  $x_0 \in X$ .

2. Wenn die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  in  $x_0 \in X$  differenzierbar ist, dann ist die Funktion  $f$  in  $x_0$  auch stetig.

3. Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  heißt *differenzierbar*, wenn sie differenzierbar in jedem Punkt  $x_0 \in X$  ist. Diejenige Funktion  $Df : X \rightarrow \mathbb{L}$ , die jedem  $x_0 \in X$  die Ableitung  $Df(x_0) \in \mathbb{L}$  zuordnet, wird *Ableitung von*  $f$  *genannt*.

**Linearisierung.** Ist die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  in  $x_0 \in X$  differenzierbar, dann erhält man für die durch

$$g(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) \quad \text{für } x \in \mathbb{K}$$

definierte *Linearisierung*  $g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  *von*  $f$  *in*  $x_0 \in X$  die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = Dg(x_0) = Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der *tangentialen Berührung von*  $f$  *und*  $g$  *in*  $x_0 \in X$ .

**Rechtsseitige Differenzierbarkeit.** Ist  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge, dann nennt man eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  *rechtsseitig differenzierbar in*  $x_0 \in X$ , wenn  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $X \cap [x_0, \infty[$  ist und der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_{\oplus} f(x_0) \in \mathbb{L}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *rechtsseitige Ableitung von*  $f$  *in*  $x_0 \in X$ .

**Linksseitige Differenzierbarkeit.** Ist  $X \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge, dann heißt eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  *linksseitig differenzierbar in*  $x_0 \in X$ , wenn  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $X \cap ]-\infty, x_0]$  ist und der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D_{\ominus} f(x_0) \in \mathbb{L}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird *linksseitige Ableitung von*  $f$  *in*  $x_0 \in X$  *genannt*.

**Operationen mit differenzierbaren Funktionen.** Sind die Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  und  $h : X \rightarrow \mathbb{L}$  im Punkt  $x_0 \in X$  differenzierbar, dann gilt:

1. Die Summe  $f + h$  und das Produkt  $fh$  sind in  $x_0$  differenzierbar, und es gelten

$$D(f + h)(x_0) = Df(x_0) + Dh(x_0) \in \mathbb{L},$$

$$D(fh)(x_0) = h(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dh(x_0) \in \mathbb{L}.$$

2. Im Falle  $h(x_0) \neq \mathbb{0}$  ist der Quotient  $\frac{f}{h}$  in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt

$$D\left(\frac{f}{h}\right)(x_0) = \frac{h(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dh(x_0)}{h^2(x_0)} \in \mathbb{L}.$$

**Differenzierbarkeit rationaler Funktionen.** 1. Für jedes  $a_0 \in \mathbb{K}$  hat die durch  $f_0(x) = a_0$  für  $x \in \mathbb{K}$  definierte Funktion  $f_0 : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  die Ableitung  $Df_0 = 0$ .

2. Sei für  $m \in \mathbb{N}$  die Funktion  $h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $h(x) = x^m$  für  $x \in \mathbb{K}$  definiert. Dann besitzt  $h$  in  $x_0 \in \mathbb{K}$  wegen der binomischen Formel die Ableitung

$$Dh(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{m-1} x^k x_0^{m-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} x_0^{m-1} = mx_0^{m-1} \in \mathbb{K}.$$

Für die durch  $\frac{1}{h(x)} = x^{-m}$  für  $x \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{0}\}$  definierte Funktion  $\frac{1}{h} : \mathbb{K} \setminus \{\mathbb{0}\} \rightarrow \mathbb{K}$  gilt

$$D\left(\frac{1}{h}\right)(x_0) = -\frac{Dh(x_0)}{h^2(x_0)} = -mx_0^{-m-1} \in \mathbb{K}.$$

3. Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$  hat die durch  $f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  für  $x \in \mathbb{K}$  definierte ganze rationale Funktion  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0 \in \mathbb{K}$  die Ableitung

$$Df(x_0) = \sum_{k=1}^m k a_k x_0^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) a_{k+1} x_0^k \in \mathbb{K}.$$

Sind ferner  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_\ell \in \mathbb{K}$  und eine Menge  $X \subset \mathbb{K}$  gegeben, so daß die durch  $h(x) = \sum_{k=0}^{\ell} b_k x^k$  für  $x \in X$  definierte Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{K}$  keine Nullstellen in  $X$  besitzt, so ist die gebrochene rationale Funktion  $\frac{f}{h} : X \rightarrow \mathbb{K}$  differenzierbar.

**Kettenregel.** Seien  $X \subset \mathbb{K}$  sowie  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  eine in  $x_0 \in X$  differenzierbare Funktion. Ist  $Y \subset \mathbb{L}$  derart, daß  $f[X] \subset Y$  gilt sowie  $g : Y \rightarrow \mathbb{M}$  eine in  $f(x_0) \in Y$  differenzierbare Funktion mit Werten in einem  $\mathbb{L}$  umfassenden Körper  $\mathbb{M} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , so ist die Verkettung  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{M}$  in  $x_0 \in X$  differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0) \in \mathbb{M}.$$

**Ableitung der inversen Funktion.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  im Punkt  $x_0 \in X$  differenzierbar, wobei  $Df(x_0) \neq \mathbb{0}$  gilt. Ist  $f$  injektiv und die inverse Funktion  $f^{-1} : f[X] \rightarrow \mathbb{K}$  in  $f(x_0) \in \mathbb{K}$  stetig, dann ist  $f^{-1}$  in  $f(x_0)$  differenzierbar, und es gilt

$$D(f^{-1})(f(x_0)) = \frac{1}{Df(x_0)} \in \mathbb{K}.$$

**Differenzierbarkeit von Potenzfunktionen.** 1. Sind  $X = ]0, \infty[$  sowie  $\beta \in \mathbb{N}$  gegeben, so ist die durch  $f(x) = x^\beta$  für  $x \in X$  definierte Potenzfunktion  $f : X \rightarrow X$  bijektiv und differenzierbar, woraus die strenge Monotonie von  $f$  folgt.

Damit ist auch die durch  $f^{-1}(\xi) = \xi^p$  für  $\xi \in X$  und  $p = \frac{1}{\beta} \in \mathbb{Q}$  definierte Inverse  $f^{-1} : X \rightarrow X$  stetig, bijektiv und streng monoton. Da  $Df(x) = \beta x^{\beta-1} \neq 0$  für jedes  $x \in X$  gilt, ist  $f^{-1}$  differenzierbar und hat für  $\xi \in X$  und  $x = \xi^p \in X$  die Ableitung

$$D(f^{-1})(\xi) = \frac{1}{Df(x)} = \frac{1}{\beta x^{\beta-1}} = p \xi^{p(1-\beta)} = p \xi^{p-1} \in X.$$

2. Ist ein weiterer Exponent  $\alpha \in \mathbb{Z}$  sowie die Funktion  $g : X \rightarrow X$  durch  $g(x) = x^\alpha$  für  $x \in X$  gegeben, dann ist die durch  $h(\xi) = (g \circ f^{-1})(\xi) = \xi^{\alpha p} = \xi^q$  für  $\xi \in X$  definierte Potenzfunktion  $h : X \rightarrow X$  mit dem rationalen Exponenten  $q = \alpha p \in \mathbb{Q}$  differenzierbar, und die Kettenregel liefert die Ableitung

$$Dh(\xi) = Dg(f^{-1}(\xi)) \cdot D(f^{-1})(\xi) = \alpha \xi^{p(\alpha-1)} \cdot p \xi^{p-1} = q \xi^{q-1} \in X.$$

**Mittelwertsatz.** Seien  $x, y \in \mathbb{K}$  zwei verschiedene Punkte und  $X \subset \mathbb{K}$  eine Teilmenge, welche die abgeschlossene Strecke  $S = \{(1-\theta)x + \theta y \in \mathbb{K} \mid \theta \in [0, 1]\}$  enthält. Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  eine differenzierbare Funktion, dann gilt die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \sup_{z \in S} |Df(z)|.$$

**Vertauschbarkeit von Grenzprozessen.** Sei eine offene Menge  $X \subset \mathbb{K}$  und eine Folge  $(f_n)$  differenzierbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{L}$  gegeben, so daß die Folge  $(f_n)$  punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  und die Folge  $(Df_n)$  der Ableitungen  $Df_n : X \rightarrow \mathbb{L}$  punktweise gegen eine Grenzfunktion  $g : X \rightarrow \mathbb{L}$  konvergiert.

Gibt es zu jedem  $x_0 \in X$  ein  $r_0 > 0$ , so daß  $B(x_0) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < r_0\}$  in  $X$  liegt und  $(Df_n)$  in  $B(x_0)$  gleichmäßig gegen  $g : X \rightarrow \mathbb{L}$  konvergiert, dann konvergiert auch  $(f_n)$  für jedes  $x_0 \in X$  in  $B(x_0)$  gleichmäßig gegen  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$ . In diesem Falle ist die Grenzfunktion  $f : X \rightarrow \mathbb{L}$  differenzierbar und besitzt die Ableitung  $Df = g$ .

**Differenzierbarkeit der Grenzfunktion von Potenzreihen.** 1. Ist  $(s_n)$  eine Potenzreihe um den Mittelpunkt  $x_0 \in \mathbb{K}$  mit den Koeffizienten  $(a_k)$  in  $\mathbb{K}$  und dem Konvergenzradius  $R > 0$ , so konvergiert  $(s_n)$  in  $X = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R\}$  gegen eine differenzierbare Grenzfunktion  $s : X \rightarrow \mathbb{K}$ .

2. Die summandenweise differenzierte Potenzreihe  $(Ds_n)$  um  $x_0 \in \mathbb{K}$  mit den Koeffizienten  $((k+1)a_{k+1})$  in  $\mathbb{K}$  hat ebenfalls den Konvergenzradius  $R > 0$  und konvergiert in  $X$  gegen die Ableitung  $Ds : X \rightarrow \mathbb{K}$  der Grenzfunktion  $s : X \rightarrow \mathbb{K}$ .

3. Die Potenzreihe  $(f_n)$  um  $x_0 \in \mathbb{K}$  mit den Koeffizienten  $(b_k)$  in  $\mathbb{K}$ , welche durch  $kb_k = a_{k-1}$  für  $k \in \mathbb{N}$  sowie eine beliebige Konstante  $b_0 \in \mathbb{K}$  vorgegeben sind, hat ebenso den Konvergenzradius  $R > 0$  und konvergiert in  $X$  gegen eine differenzierbare Grenzfunktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  mit der Ableitung  $Df = s$ .