Blatt 4

Aufgabe 1: a) X top Raum, $Y \subset X$ TR, $A, B \subset Y$ disjunkt mit $A, B \neq \emptyset$ und $Y = A \cup B$

Dann ist $Y = A \cup B$ Trennung

$\Leftrightarrow$ A enthält keine HP'e von B in der Top von X und umgekehrt

Beweis: '$\Rightarrow$' B ist offen in Y, also ist A ~~[illegible]~~ abgeschlossen in Y, da $Y \setminus A = B$. Es gilt

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$$

$\overline{A}^Y = \bigcup_{\substack{C \subset Y \text{ abgeschl in } Y \\ A \subset C}} C$ & $\overline{A} = \bigcup_{\substack{C' \subset X \text{ abgeschl in } X \\ A \subset C}} C'$ & $C \subset Y$ abgeschl in Y $\Leftrightarrow \exists\, C' \subset X$ abgeschl in X mit $C = Y \cap C'$

$$\Rightarrow \overline{A}^Y = A = \overline{A} \cap Y$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cap B = \emptyset = (A \cup \{HP'e \text{ von } A\}) \cap B$$

$$= \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} \cup \{HP'e \text{ von } A\} \cap B = \{HP'e \text{ von } A\} \cap B.$$

$\boxed{/\!/\!/}$

Analog für B.

'$\Leftarrow$' noch z.z.: A, B offen in Y

n.V. gilt $\overline{A} \cap B = (A \cup \{HP \text{ von } A\}) \cap B$
$= \emptyset$

$\Rightarrow A = \overline{A} \cap Y = \overline{A}^Y \Rightarrow A$ abgeschl. in Y

$\Rightarrow B = Y \setminus A$ offen in Y

Analog für A. $\boxed{/\!/}$

(Blatt 4)

Aufgabe 1 b:

Sei X ein top. Raum, $X = C \cup D$ eine Trennung, $Y \subset X$ zush. TR. z.z. $Y \subset C$ oder $Y \subset D$.

Beweis: $Y = (C \cap Y) \cup (D \cap Y)$ (*)

disj., beide offen in Y.

Angenom. $C \cap Y, D \cap Y$ beide $\neq \emptyset$ $\Rightarrow$ (*) ist Trennung von Y $\Rightarrow$ $\lightning$;

also $C \cap Y = \emptyset$ oder $D \cap Y = \emptyset$

$\Rightarrow$ $Y \subset D$ oder $Y \subset C$ $\boxtimes$