Dr. Batu Güneysu
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 309

Übungsblatt 1

Topologie I SS 2016

Abgabe: 2. Mai

Aufgabe 1 Sei X eine beliebige Menge.
a) Sei $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ definiert wie folgt: $U \subset X$ liegt in τ, genau dann wenn entweder $U = \emptyset$ gilt, oder wenn $X \setminus U$ endlich ist. Zeigen Sie: τ ist eine Topologie auf X (man nennt dies die *koendliche Topologie* auf X).
b) Sei $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ eine Basis auf X. Zeigen Sie, dass

$$\tau_{\mathscr{B}} := \{U \subset X \mid \text{ für alle } x \in X \text{ existiert ein } B \in \mathscr{B} \text{ mit } x \in B \subset U\} \quad (\supset \mathscr{B})$$

eine Topologie auf X ist.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^m$ mit der Standardtopologie eine abzählbare Basis besitzt.

Aufgabe 3 Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum H, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.
a) Sei $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ein Skalarprodukt auf H. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \langle f, f\rangle^{1/2} \langle g, g\rangle^{1/2} \qquad \text{für alle } f, g \in H.$$

b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\|\bullet\|$ eine Norm auf H. Zeigen Sie: Genau dann existiert ein Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ auf H mit

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} \qquad \text{für alle } f \in H,$$

wenn $\|\bullet\|$ die folgende Parallelogramm-Identität erfüllt:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \text{ für alle } f, g \in H.$$

Bemerkung: 1. Jedes Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$ auf H definiert durch $\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}$ eine Norm auf H. Jede Norm $\|\bullet\|$ auf H definiert durch $d(f, g) := \|f - g\|$ eine Metrik auf H. Paare der Art $(H, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ nennt man einen *Prähilbertraum*, und Paare der Art $(H, \|\bullet\|)$ einen *normierten Raum.*
2. Es gilt auch eine komplexe Variante der Aussage von Aufgabe 3 b). Der Beweis für den komplexen Fall ist durchaus aufwendiger.