Dr. Batu Güneysu
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 309

Übungsblatt 3

Topologie I SS 2016

Abgabe: 16. Mai

Aufgabe 1 Sei (der Einfachheit wegen) $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Man nennt eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ *Zariski-abgeschlossen*, falls es eine Menge von Polynomen $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ in n-Variablen gibt, mit

$$A = \{x \in \mathbb{K}^n : \; p(x) = 0 \quad \text{für alle } p \in S\}.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie τ auf $\mathbb{K}^n$ gibt, deren abgeschlossene Mengen gerade die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{K}^n$ sind.

Aufgabe 2 Betrachten Sie das unendliche kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^\infty := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie, und $\mathbb{R}^\infty$ mit der induzierten *Boxtopologie*. Zeigen Sie: Es gibt eine Abbildung

$$f = (f_1, f_2, \dots) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty,$$

so dass jede Komponente f_n stetig ist, aber f selbst nicht stetig ist (nach einem Satz aus der Vorlesung kann so etwas in der Produkttopologie nicht passieren).

Aufgabe 3 Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ *L-Lipschitz-stetig* (bezüglich der Metriken d_X, d_Y), falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, mit

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Zeigen Sie: Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere Menge, so ist die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := d(x, A) := \inf\{d(x, z) : \; z \in A\}$$

1-Lipschitz-stetig (bezüglich d und der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}$). Die Zahl $d(x, A) \in [0, \infty)$ wird der *Abstand von x zu A in der Metrik d* genannt.