

Diplomarbeit

Regularisierte Determinanten
elliptischer Operatoren

Adiabatischer Limes und
Dirichlet-to-Neumann-Operator

Angefertigt am Mathematischen Institut der Universität Bonn

Vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

März 2004
von
Jörn Müller
aus
Neunkirchen–Seelscheid

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Verallgemeinerter Laplace-Operator	5
1.1 Bochner-Laplace-Operator	5
1.2 Klassifizierung	6
2 Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit	7
3 Regularisierte Determinante	11
3.1 Determinante auf kompakten Mannigfaltigkeiten	11
3.2 Relative Determinante	14
4 Mannigfaltigkeiten mit eingebetteten Zylinderstücken	16
4.1 Bezeichnungen	16
4.2 Das Spektrum von Δ_∞	19
5 Dirichlet-to-Neumann Operator	22
5.1 Definition	22
5.2 Berechnung des DtN-Operators	26
5.3 Asymptotik von $\det R(\lambda)$	29
6 Faktorisierungsformeln	34
6.1 Die Formel von Carron	34
6.2 Allgemeiner Fall	35
7 Die regularisierte Determinante auf dem endlichen Zylinder	37
8 Adiabatischer Limes	39
8.1 Allgemeine Zerlegungsformel	40
8.2 Invertierbarer tangentialer Operator	43
8.3 Determinante von Funktionen	44
8.4 Zwei Beispiele	46

Einleitung

Die regularisierte Determinante eines elliptischen Operators auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit stellt eine wichtige spektrale Invariante dar. Der Begriff taucht zuerst bei Minakshisundaram und Pleijel [MP] im Falle des Laplaceoperators von Funktionen auf und wird später von Seeley auf Pseudodifferentialoperatoren ausgedehnt. Grundlage ist die ζ -Funktion

$$\zeta_H(s) := \text{Tr}(H^{-s}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-s}, \quad s \gg 0$$

eines positiven elliptischen Operators H . Die ζ -Funktion kann auch als Mellintransformierte der Spur des Wärmeleitungskerns von Δ geschrieben werden. Sie besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} und ist analytisch in einer Umgebung von 0, was die Definition

$$\det H := e^{-\zeta'(0)}$$

erlaubt. Dies entspricht formal dem Produkt der Eigenwerte von H , in Analogie zur Determinante positiver normaler Endomorphismen.

Neben ihrer Bedeutung in der Mathematik, die unter anderem auf die Verwendung des Wärmeleitungskerns in den analytischen Beweisen des Atiyah-Singer-Indexsatzes zurückzuführen ist, ist die regularisierte Determinante auch in der Physik von großer Bedeutung; hier sei nur auf die Arbeit [Haw] von S. Hawking verwiesen.

In dieser Diplomarbeit werden „Zerlegungsformeln“ für die regularisierte Determinante betrachtet. Dabei wird versucht, die regularisierte Determinante – eine globale Invariante – aus den von Teilbereichen der Mannigfaltigkeit herrührenden Beiträgen zu berechnen. Dieses „Meyer-Vietoris-Prinzip“ für die ζ -Determinante wurde zuerst von Burghlea, Friedlander und Kappeler in [BFK] betrachtet. Ihre Methode geht auf Forman [Fo] zurück, der die ζ -Determinante unter Variation der Randbedingungen betrachtete. Das Ergebnis von [BFK] wurde in der Arbeit [Le2] von Y. Lee auf Differentialformen auf gerade-dimensionalen Mannigfaltigkeiten erweitert. Die betrachteten Mannigfaltigkeiten sind dabei kompakt und haben in der Nähe einer eingebetteten Hyperfläche Y eine „Kragen“-Umgebung, d.h., sie sind dort isometrisch zu $[-1, 1] \times Y$.

J. Park und K. Wojciechowski betrachten in [PW1] die „adiabatische“ Zerlegung der ζ -Determinante. Dabei bedeutet adiabatisch, dass das eingebettete Zylinderstück immer weiter verlängert wird und der Grenzwert des Verhältnisses der regularisierten Determinante auf der gesamten Mannigfaltigkeit zu den Determinanten auf den in der Zerlegung betrachteten Untermannigfaltigkeiten untersucht wird. Die beiden Autoren verwenden dazu Abschätzungen des Wärmeleitungskerns. Eine besondere Schwierigkeit stellen dabei die kleinen Eigenwerte – das sind Eigenwerte, die im adiabatischen Limes gegen 0 konvergieren – dar. Weitere Ergebnisse der selben Autoren zu diesem Thema finden sich in [PW2] und [PW3].

Einen anderen Zugang betrachtet Y. Lee in [Le1]. Als Vergleichsoperatoren im adiabatischen Limes dienen dabei die Laplaceoperatoren auf – nicht-kompakten – Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende. Seine Methode verwendet wie [BFK]

den Dirichlet-to-Neumann-Operator, allerdings betrachtet Lee nur Fälle, in denen der Laplaceoperator auf Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende kein stetiges Spektrum hat. Das Vorhandensein des stetigen Spektrums wird in der Arbeit von Hassell und Zelditch [HZ], allerdings nur für den Laplaceoperator in \mathbb{R}^2 , sowie von Carron in [Car], berücksichtigt. In diesem Fall muss der Determinantenbegriff noch einmal durch den von W. Müller in [Mu1] eingeführten Begriff der *relativen Determinante* erweitert werden.

In dieser Diplomarbeit wird der adiabatische Limes von *verallgemeinerten Laplaceoperatoren* untersucht. Es handelt sich dabei um elliptische Differentialoperatoren Δ zweiter Ordnung auf $C^\infty(M, E)$ für ein hermitesches Vektorbündel E , dessen Hauptsymbol durch den metrischen Tensor der Riemannschen Mannigfaltigkeit M gegeben ist. Als Vergleichsdeterminanten dienen relative Determinanten auf Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende. Um die Ergebnisse von Lee und Carron auf diesen Fall anwenden bzw. verallgemeinern zu können, müssen zur Behandlung des stetigen Spektrums Methoden der Streutheorie wie in [Mu2] und [Mu4] verwendet werden, die auf L. Guillopé ([Gui]) zurückgehen. Wenn der tangential Operator, also Δ eingeschränkt auf Y , invertierbar ist, bzw. wenn Δ der Laplace-Beltrami-Operator ist, konnte in dieser Arbeit eine explizite Formel für den adiabatischen Limes der relativen Determinante hergeleitet werden.

Gliederung

Im ersten Kapitel wird der verallgemeinerte Laplaceoperator definiert.

Im zweiten Kapitel wird ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, dass die Lösungen der zu einem verallgemeinerten Laplaceoperator assoziierten Wellengleichung endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben. Dieses Kapitel weicht etwas von der eigentlichen Thematik der Arbeit ab; es wurde trotzdem an dieser Stelle aufgenommen, weil die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit eine der zentralen Voraussetzungen in dem Artikel [Car] von G. Carron ist, auf dessen Ergebnisse sich die weitere Arbeit wesentlich beruft.

Im dritten Kapitel wird der Begriff der ζ -Funktion-regularisierten Determinante, sowie seine Erweiterung auf nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten, die relative Determinante, eingeführt.

Das darauffolgende Kapitel definiert die in dieser Arbeit untersuchten Mannigfaltigkeiten mit eingebetteten zylindrischen Untermannigfaltigkeiten, insbesondere Mannigfaltigkeiten mit zylindrischen Ende. Die wichtigsten Grundlagen der Streutheorie, die zur Beschreibung des stetigen Spektrums des Laplaceoperators auf diesen Mannigfaltigkeiten benötigt wird, werden ebenfalls in Kapitel 4 erläutert.

Im fünften Kapitel wird der Dirichlet-to-Neumann-Operator eingeführt. Dort wird auch das asymptotische Verhalten von $\det R(\lambda)$, der Determinante des Dirichlet-to-Neumann-Operators von $\Delta + \lambda$ für $\lambda \rightarrow 0$ untersucht.

Die Kenntnis dieser Asymptotik ist wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der im sechsten Kapitel betrachteten Faktorisierungs-Formeln. Diese stellen den Dirichlet-to-Neumann-Operator zu der relativen Determinante $\det(\Delta, \Delta_B)$ in Beziehung, wobei Δ_B der Laplaceoperator mit Dirichletscher Randbedingung ist. Hier wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Es gilt*

$$\frac{\det(\Delta, \Delta_B)}{\det(\Delta_{M_1, B})} = 2^{-\zeta_Y^*(0) - h_Y} \frac{\det^* R}{\det A},$$

wobei $h_Y = \dim \ker \Delta_Y$ und $\zeta_Y^*(s)$ die Zetafunktion von Δ_Y ist.

Die dabei auftretende Matrix A wird ebenfalls in Kapitel 6 definiert. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung von [Le2, Theorem B] auf Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende, bzw. eine verallgemeinerte Version von Theorem 4.2 in Carrons Arbeit [Car].

In Kapitel 7 wird eine Formel für $\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$ – die Determinante des Laplaceoperators auf dem endlichen Zylinder $[-r, r] \times Y$ mit Dirichlet-Randwerten – hergeleitet. Dies ist ein Hilfsergebnis für das folgende Kapitel.

Schließlich wird in Kapitel 8 der „adiabatische“ Limes, d.h. $\lim_{r \rightarrow \infty} \det \Delta_{M_r}$ für den Laplace-Beltrami-Operator und den Bochner-Laplace-Operator berechnet. Als Vergleichsoperator fungiert der im vorhergehenden Kapitel betrachtete Operator $\Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$. Das zentrale Ergebnis dieser Arbeit ist der

Satz 2. *Sei Δ der Bochner-Laplace-Operator auf $C^\infty(M, E)$ oder der Laplace-Beltrami-Operator auf den Funktionen $C^\infty(M)$. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\det^* \Delta_{M_r}}{\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}} = \det(\Delta_{1, \infty}, \Delta_{1, Z, B}) \det(\Delta_{2, \infty}, \Delta_{2, Z, B})$$

Dabei sind für $i = 1, 2$ jeweils $\Delta_{i, \infty}$ der Laplace-Operator auf der Mannigfaltigkeit $M_{i, \infty}$ mit zylindrischem Ende, und $\Delta_{i, Z, B}$ der Operator auf dem Zylinder $\mathbb{R}^\pm \times Y$ mit Dirichlet-Randwerten bei $\{0\} \times Y$.

Mit Hilfe der Formel für $\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$ ergibt dies in beiden Fällen das asymptotische Verhalten

$$\det^* \Delta_{M_r} \sim C r^{\dim \ker \Delta_Y} e^{cr}, \quad r \rightarrow \infty$$

wobei die Konstanten c und C aus den relativen Determinanten

$$\det(\Delta_{i, \infty}, \Delta_{i, Z, B}) \quad i = 1, 2$$

und dem Spektrum von Δ_Y berechnet werden können; sie werden in den genannten Fällen explizit angegeben.

1 Verallgemeinerter Laplace-Operator

Sei X Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ Vektorraumbündel.

Definition 3. (siehe [BGV], S. 65) Ein *verallgemeinerter Laplace-Operator* oder *Operator vom Laplacetyp* ist ein Differentialoperator $\Delta : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, E)$ zweiter Ordnung mit Hauptsymbol

$$\sigma(\Delta)(x, \xi) = \|\xi\|_x^2 \text{id},$$

wobei $\|\cdot\|$ die durch die Riemannsche Metrik induzierte Norm auf T^*X ist.

Insbesondere sind verallgemeinerte Laplaceoperatoren elliptisch. In lokalen Koordinaten kann Δ als

$$\Delta = - \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + B$$

geschrieben werden, wobei A_k, B Schnitte im Bündel $\text{End}(E)$ und g^{ij} der Metrische Tensor sind.

Ein Beispiel ist der im folgenden Abschnitt definierte *Bochner-Laplace-Operator*.

1.1 Bochner-Laplace-Operator

Sei $E \rightarrow X$ Vektorraumbündel mit Levi-Civita-Zusammenhang, und kovarianter Ableitung

$$\nabla = \nabla^{TM} : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, T^*X \otimes E).$$

Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rightarrow X$ Vektorbündel, $s_i \in C^\infty(X, \mathcal{E}_i)$ so ist durch

$$\nabla^{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2}(s_1 \otimes s_2) := \nabla^{\mathcal{E}_1} s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^{\mathcal{E}_2} s_2$$

die kovariante Ableitung auf Tensorbündeln definiert.

Werden TX und T^*X mittels g identifiziert, kann auf diese Weise eine kovariante Ableitung

$$\nabla^{T^*X \otimes E} : C^\infty(X, T^*X \otimes E) \rightarrow C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X \otimes E)$$

definiert werden.

Für Vektorfelder $V, W \in C^\infty(X, TX)$ ist explizit

$$\nabla^{T^*X \otimes E} \nabla^E(V, W) = \nabla_V^E \nabla_W^E - \nabla_{\nabla_V W}^E.$$

Definition 4. (siehe [BGV], [LM]) Der *Bochner-Laplace-Operator* auf $C^\infty(X, E)$ ist definiert durch

$$\Delta^E s := -\text{Tr}(\nabla^{T^*X \otimes E} \nabla^E s).$$

Dabei ist $\text{Tr}(S) \in C^\infty(X, E)$ für ein $S \in C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X \otimes E)$ die Kontraktion mit der von der Riemannschen Metrik auf X induzierten Metrik $g \in C(X, TX \otimes TX)$.

Schreibweise: $\nabla^* \nabla := \Delta^E$

Ist $\{e_i\}$ ein lokaler ON-Rahmen von $C^\infty(X, TX)$, so ist die explizite Formel

$$\nabla^* \nabla = - \sum_i (\nabla_{e_i}^E \nabla_{e_i}^E - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^E).$$

Im Folgenden wird das Hauptsymbol des Bochner-Laplace Operators berechnet. Sei $\pi : T^*X \rightarrow X$ Projektion und $D : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, F)$ Differentialoperator der Ordnung m .

Sei $x \in X, v \in T_x^*X, e \in (\pi^*E)_v = E_x$, und $\tilde{e} \in C^\infty(X, E)$, so dass $\tilde{e}(x) = e$. Wir wählen $f \in C^\infty(X)$ mit $f(x) = 0, df_x = v$. Dann ist das Hauptsymbol $\sigma(D)$ von D definiert als

$$\sigma(D)_v : \pi^*E \rightarrow \pi^*F, \quad \sigma(D)_v(e) = \frac{(-i)^m}{m!} D(f^m \tilde{e})(x).$$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ lokaler orthonormaler Rahmen von $C^\infty(X, TX)$ mit $(\nabla e_i)_x = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für $\phi \in C^\infty(X, E)$

$$\nabla^* \nabla \phi = - \sum_{j=1}^n \nabla_{e_j, e_j}^2 \phi = - \sum_{j=1}^n \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \phi.$$

Mit Bezeichnungen wie oben ist weiter

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} f^2 \tilde{e})(x) &= (\nabla_{e_j} (f^2 \nabla_{e_j} \tilde{e} + d(f^2) e_j \cdot \tilde{e}))(x) \\ &= f(x)^2 (\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \tilde{e})(x) + (d(f^2) e_j \cdot \tilde{e})(x) + (\nabla_{e_j} d(f^2) e_j \cdot \tilde{e})(x) \end{aligned}$$

Wegen $f(x) = 0, d(f^2)_x = 2f(x)df_x$ bleibt nur der letzte Term:

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} f^2 \tilde{e})(x) &= (\nabla_{e_j} (d(f^2) e_j) \tilde{e})(x) \\ &= (d(f^2)_x e_j(x)) (\nabla_{e_j} \tilde{e})(x) + d(d(f^2) e_j)_x e_j(x) \cdot \tilde{e}(x) \\ &= d(2f df e_j)_x e_j(x) \cdot \tilde{e}(x) \\ &= 2df_x(e_j(x)) df_x e_j(x) \cdot \tilde{e}(x) + 2f(x) d(df e_j)_x e_j(x) \cdot \tilde{e}(x) \\ &= 2v(e_j(x))^2 \tilde{e}(x) = 2v_j^2 \cdot \tilde{e}(x), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile $df_x = v = v_1 e_1^*(x) + \dots + v_n e_n^*(x)$ verwendet wurde.

Es folgt

$$\sigma(\nabla^* \nabla)(x, \xi) = \|\xi\|^2 \text{Id} \quad \text{für} \quad \xi \in T_x^*X,$$

d.h., der Bochner-Laplaceoperator ist ein verallgemeinerter Laplaceoperator.

1.2 Klassifizierung

Sei $\Delta : C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, E)$ ein verallgemeinerter Laplaceoperator. In [BGV] und [Gi] wird gezeigt, dass es eine eindeutige mit der Metrik g auf M verträgliche kovariante Ableitung ∇^E und einen Schnitt $B \in C^\infty(X, \text{Sym}(E))$ in den symmetrischen Endomorphismen von E gibt, so dass

$$\Delta = \nabla^{E*} \nabla^E + B.$$

Ein verallgemeinerter Laplaceoperator ist danach durch drei Daten eindeutig bestimmt: Eine Riemannsche Metrik auf M , einen Zusammenhang ∇ auf E , und einen Schnitt $B \in C^\infty(X, \text{Sym}(E))$.

Weitere Beispiele für Differentialoperatoren vom Laplacetyp sind

- $\Delta + V$ für den Laplaceoperator $\Delta : C_0^\infty(M) \rightarrow C_0^\infty(M)$ auf den Funktionen und eine Funktion V mit kompaktem Träger
- der Laplace-Beltrami-Operator

$$d^*d + dd^* = (d + d^*)^2 : C^\infty(M, \Lambda^k(T^*M)) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^k(T^*M))$$

auf den Differentialformen

- das Quadrat von formal selbstadjungierten Differentialoperatoren erster Ordnung, insbesondere das Quadrat von Operatoren vom Dirac-Typ.

2 Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wird eine Eigenschaft von Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} + \Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad (0, \infty) \times M \quad (1)$$

betrachtet, die auch als *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* (FPS) bekannt ist. Damit ist gemeint, dass der Träger einer Lösung u von (1) zur Zeit t in einer t -Umgebung des Trägers von $u(0, \cdot)$ enthalten ist.

Ist dies der Fall, so kann gezeigt werden (siehe [Ch]), dass $\Delta : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$ in $L^2(M, E)$ wesentlich selbstadjungiert ist, also eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung besitzt. Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lösungen von (1) wird auch in der Arbeit [Car] von Carron benötigt, auf deren Ergebnisse die folgenden Kapitel aufbauen.

Sei

$$\Delta = \nabla^{E^*} \nabla^E + B$$

wie in Abschnitt 1.2. Es wird sich herausstellen, dass Δ die Eigenschaft FPS hat, falls B beschränkt ist, d.h. falls $\gamma > 0$ existiert, so dass für alle $\varphi \in C^\infty(M, E)$ gilt

$$-\gamma \leq \int_M \langle B\varphi, \varphi \rangle \leq \gamma.$$

Zunächst werden einige bekannte Sätze wiederholt.

Sei $\pi : E \rightarrow M$ Vektorraumbündel mit Levi-Civita-Zusammenhang und kovarianter Ableitung $\nabla^E : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$. Diese wird im Folgenden einfach mit ∇ bezeichnet. Weiter sei $\nabla^* \nabla$ Bochner-Laplaceoperator und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Fasermetrik in E .

Lemma 5. Sei e_1, \dots, e_n ON-Rahmen von $C^\infty(M, TM)$. Mit

$$\begin{aligned}\langle \nabla \phi, \nabla \psi \rangle_x &:= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \phi, \nabla_{e_i} \psi \rangle_x \\ \operatorname{div} V &:= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} V, e_i)\end{aligned}$$

gilt für $\phi, \psi \in C^\infty(M, E)$

$$\langle \nabla^* \nabla \phi, \psi \rangle_x = \langle \nabla \phi, \nabla \psi \rangle_x - \operatorname{div} V_{\phi, \psi}, \quad (2)$$

wobei $V_{\phi, \psi}$ durch $g(V_{\phi, \psi}, W) = \langle \nabla_W \phi, \psi \rangle$ für alle $W \in C^\infty(M, TM)$ definiert ist.

Beweis. Der Beweis aus [LM] wird hier kurz wiederholt. Es genügt, zu festem $x \in M$ einen lokalen ON-Rahmen e_1, \dots, e_n von $C^\infty(TM)$ mit $(\nabla e_i)_x = 0$, $i = 1, \dots, n$ zu betrachten

$$\begin{aligned}\langle \nabla^* \nabla \phi, \psi \rangle &= - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j, e_j}^2 \phi, \psi \rangle = - \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} \phi, \psi \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^n (e_j \langle \nabla_{e_j} \phi, \psi \rangle - \langle \nabla_{e_j} \phi, \nabla_{e_j} \psi \rangle) \\ &= \langle \nabla \phi, \nabla \psi \rangle - \operatorname{div} V_{\phi, \psi},\end{aligned}$$

denn

$$\operatorname{div} V_{\phi, \psi} = \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_j} V_{\phi, \psi}, e_j) = \sum_{j=1}^n e_j g(V_{\phi, \psi}, e_j) = \sum_{j=1}^n e_j \langle \nabla_{e_j} \phi, \psi \rangle.$$

□

Es gilt das Divergenztheorem:

Satz 6. Ist M kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand, X glattes Vektorfeld auf M , so gilt

$$\int_M (\operatorname{div} X) dV = \int_{\partial M} g(X, \nu) dS, \quad (3)$$

wobei ν nach außen zeigendes Einheitsnormalenvektorfeld an ∂M ist.

Ebenfalls benötigt wird das

Lemma 7. Sei $j : \partial M \hookrightarrow M$ Inklusion, ω_M Volumenform auf M und $\omega_{\partial M}$ Volumenform auf ∂M . Es gilt die Beziehung

$$j^*(\omega \rfloor X) = g(X, \nu) \omega_{\partial M}, \quad (4)$$

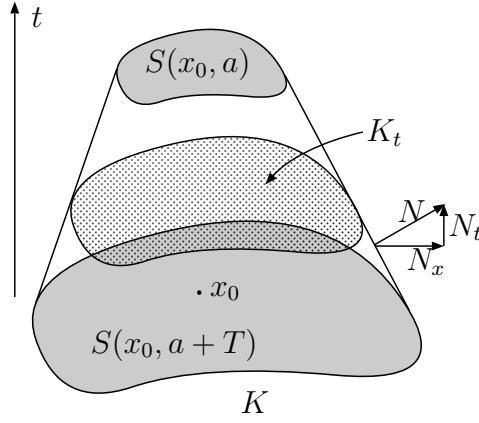


Abbildung 1: Einflussbereich von Lösungen der Wellengleichung

Beweis. Betrachte zu $p \in \partial M$ lokale Koordinaten e_1, \dots, e_n so, dass ∂M tangential zur Ebene $e_n = 0$ in $p = 0$ ist. Die Behauptung folgt für die Stelle p . \square

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnittes. Er stellt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [Lz], [Ch], [Ta] und [Ev] dar.

Satz 8. Sei x_0 ein Punkt in M und Ω eine normale geodätische Umgebung von x_0 . Seien a und T positive reelle Zahlen, so dass der Ball $S(x_0, a + T)$ in Ω enthalten ist.

Sei B beschränkter Operator nullter Ordnung und $u \in C^\infty([0, T] \times M, \tilde{\pi}^* E)$ Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} + (\nabla^{E^*} \nabla^E + B)u = 0.$$

Ist $u = 0, u_t = 0$ auf $S(x_0, a + T)$, so auch $u = 0$ auf

$$K = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, \text{dist}(x, x_0) \leq a + (T - t)\}.$$

Beweis. Sei $K_t = K \cap (\{t\} \times M)$.

$$\begin{aligned} & \int_K \langle u_t, u_{tt} + \nabla^* \nabla u + Bu \rangle dV dt \\ \stackrel{(2)}{=} & \int_K \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u_t\|^2 + \langle \nabla u_t, \nabla u \rangle - \text{div } V_{u, u_t} \right\} dV dt + \int_K \langle u_t, Bu \rangle dV dt \\ = & \frac{1}{2} \int_K \frac{\partial}{\partial t} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) dV dt - \int_0^T \int_{K_t} \text{div } V_{u, u_t} dV dt + \int_K \langle u_t, Bu \rangle dV \\ \stackrel{(3)}{=} & \frac{1}{2} \int_{\partial K} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) \omega - \int_0^{t_0} \int_{\partial K_t} \langle \nabla_\nu u, u_t \rangle dS_t dt + \int_K \langle u_t, Bu \rangle dV \quad (5) \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wird über ∂K bzw. $\partial K \setminus (K_0 \cup K_T)$ integriert. Dabei ist dS_t das Maß auf $\partial K_t \subset M$ und ω die als n -Form auf $\mathbb{R} \times M$ aufgefasste und auf $\partial K \subset \mathbb{R} \times M$ zurückgezogene Volumenform auf M .

Genauer: Ist η die zur Riemannschen Metrik

$$\tilde{g} = dt \otimes dt + g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times M$$

gehörende Volumenform, so ist $\omega = j^*(\eta] \frac{\partial}{\partial t})$, mit der Inklusion $j : \partial K \hookrightarrow \mathbb{R} \times M$ und dem äußeren Einheitsnormalenvektorfeld $N = (N_t, N_x)$ an ∂K . Nach Definition von K ist

$$N_t|_{K_0} = -1, \quad N_t|_{K_T} = 1, \quad |N_t| > \|N_x\|.$$

Für das durch die Inklusion j induzierte Maß dS auf ∂K gilt dann

$$\omega = j^*(\eta] \frac{\partial}{\partial t}) \stackrel{(4)}{=} \tilde{g}(\frac{\partial}{\partial t}, N) dS = N_t dS.$$

Die Koareaformel ergibt schließlich $dS_t dt = \|N_x\|_g dS$.

Eingesetzt in (5)

$$\begin{aligned} \int_K \langle u_t, u_{tt} + \Delta u \rangle dV dt &= \frac{1}{2} \int_{K_0} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) N_t dS + \frac{1}{2} \int_{K_T} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) N_t dS \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus (K_0 \cup K_T)} \{ (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) N_t - 2 \langle \nabla_\nu u, u_t \rangle \|N_x\| \} dS + \int_K \langle u_t, Bu \rangle dV. \end{aligned}$$

Betrachte

$$E(t) := \int_{K_t} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) dV.$$

Ist nun u Lösung der Wellengleichung, so folgt

$$\begin{aligned} E(T) + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus (K_0 \cup K_T)} \{ (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2) N_t - 2 \langle \nabla_\nu u, u_t \rangle \|N_x\| \} dS \\ = E(0) - \int_K \langle u_t, Bu \rangle dV. \end{aligned}$$

Wegen $|N_t| > \|N_x\|$ in K ist der Integrand auf der linken Seite nicht-negativ, denn

$$\begin{aligned} 2|\langle \nabla_\nu u, u_t \rangle| &\leq 2\|\nabla_\nu u\| \|u_t\| \leq \|u_t\|^2 + \|\nabla_\nu u\|^2 \\ &= \|u_t\|^2 + \sum_i \nu_i^2 \|\nabla_{e_i} u\|^2 \leq \|u_t\|^2 + \sum_i \|\nabla_{e_i} u\|^2 = \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2. \end{aligned}$$

Damit:

$$E(T) \leq E(0) - \int_K \langle u_t, Bu \rangle$$

Wegen der Beschränktheit von B gibt es ein $\gamma_1 > 0$, so dass

$$\int_K |\langle u_t, Bu \rangle| dV dt \leq \gamma_1 \int_K \|u\| \|u_t\| dV dt.$$

Mit der Darstellung

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t u_\xi(x, \xi) d\xi$$

kann weiter abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\int_{K_t} \|u(x, t)\|^2 dV &\leq 2 \int_{K_t} \|u(x, 0)\|^2 dV + 2 \int_{K_t} \left(\int_0^t \|u_\xi(x, \xi)\| d\xi \right)^2 dV \\
&\leq 2 \int_{K_0} \|u(x, 0)\|^2 dV + 2t \int_{K_{\leq t}} \|u_\xi(x, \xi)\|^2 dV d\xi \\
&\leq 2 \int_{K_0} \|u(x, 0)\|^2 dV + 2t \int_0^t E(s) ds
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt für

$$Z(t) := \int_{K_t} \|u(x, t)\|^2 + \|u_t(x, t)\|^2 + \|\nabla u\|^2 dV :$$

$$Z(t) \leq 2Z(0) + (\gamma_2 + 2t) \int_0^t Z(s) ds.$$

Sei $Q(t) = \int_0^t Z(s) ds$. Dann ist $Q'(t) \leq 2Z(0) + (\gamma_2 + 2t)Q(t)$. Die Gronwall-Ungleichung (siehe z.B. Anhang in [Ev]) ergibt

$$Q(t) \leq 2Z(0)te^{\gamma_2 t + t^2}.$$

Ist nun $Z(0) = 0$, so auch $Z(s) = 0$ für alle s mit $0 \leq s \leq T$. Damit ist auch $u = 0$ in K .

□

3 Regularisierte Determinante

3.1 Determinante auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Sei $H : C^\infty(M, V) \rightarrow C^\infty(M, V)$ ein elliptischer selbstadjungierter positiv definierter Differentialoperator der Ordnung $d > 0$ auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M der Dimension m und $V \rightarrow M$ l -dimensionales Vektorbündel.

H hat reines Punktspektrum $\{\lambda_k\}$ (Eigenwerte endlicher Vielfachheit), deshalb kann für $\Re(s) \gg 0$ definiert werden

$$\zeta(s) = \sum_k \lambda_k^{-s}.$$

Mittels der Mellin-Transformation besteht eine Beziehung zum Wärmeleitungskern von H :

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-s} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du = \lambda^{-s} \Gamma(s).$$

Deshalb wird für $\Re(s) \gg 0$ definiert

Definition 9.

$$\zeta_H(s) := \operatorname{Tr}(H^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} e^{-tH} dt.$$

Alle Eigenwerte von H sind positiv, und es gibt $\delta > 0, C, n_0$, so dass für $n > n_0$ gilt $\lambda_n > Cn^\delta$. Damit ist

$$r(s) := \int_1^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} e^{-tH} dt$$

eine ganze Funktion in s . Für $t \in (0, 1)$ besitzt $\operatorname{Tr} e^{-tH}$ die asymptotische Entwicklung

$$\operatorname{Tr} e^{-tH} = \sum_{n \leq N} a_n(H) t^{\frac{n-m}{d}} + O(t^{\frac{N-m}{d}}) \quad (6)$$

mit $a_n = 0$ für ungerade n . Außerdem gilt

$$\int_0^1 t^{s-1} \operatorname{Tr} e^{-tH} dt = \sum_{n \leq N} \frac{a_n(H)}{s + \frac{n-m}{d}} + r_N(s),$$

dabei ist $r_N(s)$ eine holomorphe Funktion für $\Re(s) > -\frac{N-m}{d}$. Damit besitzt $\zeta_H(s)$ eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} mit möglichen Polen bei $\{\frac{m-n}{d} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Außerdem hat $\Gamma(s)$ bei $s = 0, -1, -2, \dots$ isolierte einfache Pole. Es folgt

Lemma 10. $\zeta_H(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach \mathbb{C} . Bei

$$s = \frac{m-2n}{d}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad -s \notin \mathbb{N}_0$$

hat $\zeta_H(s)$ einfache isolierte Pole mit Residuum $\frac{a_{2n}(H)}{\Gamma(s)}$. Insbesondere ist $\zeta(s)$ bei $s = 0, -1, -2, \dots$ holomorph.

Formal gilt

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_n \lambda_n^{-s} = - \sum_n \log \lambda_n = - \log \prod_n \lambda_n,$$

was die folgende Definition motiviert.

Definition 11. Die ζ -regularisierte Determinante von H ist definiert als

$$\det(H) := e^{-\frac{d}{ds} \zeta_H(s)} \Big|_{s=0}. \quad (7)$$

Ist H nur positiv semidefinit, so ist diese Determinante 0. In diesem Fall ist es sinnvoll, nur die positiven Eigenwerte von H zu berücksichtigen, und zu definieren

$$\zeta_H^*(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\operatorname{Tr} e^{-tH} - \dim \ker H \right) dt.$$

Entsprechend ist dann

$$\det^*(H) := e^{-\frac{d}{ds} \zeta_H^*(s)} \Big|_{s=0} = \det(H + P_{\ker H}),$$

wobei $P_{\ker H} : H \rightarrow \ker H$ die Projektion auf $\ker H$ ist.

Bemerkung 12. Aus (7) ist ersichtlich, dass die relative Determinante unter wesentlich schwächeren Forderungen an H definiert werden kann. Es genügt, dass H^{-s} von Spurklasse ist und $\zeta(s) := \text{Tr}(H^{-s})$ eine analytische Fortsetzung in eine Umgebung von 0 besitzt. Dies ist zum Beispiel bei invertierbaren elliptischen Pseudodifferentialoperatoren erster Ordnung der Fall (siehe [Se]). So wird in dieser Arbeit die regularisierte Determinante des Dirichlet-to-Neumann-Operators, eines elliptischen Pseudodifferentialoperators erster Ordnung betrachtet.

Für $\varepsilon > 0$ ist $H + \varepsilon$ positiv und

$$\zeta_{H+\varepsilon}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} \text{Tr} e^{-tH} dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist für $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph in s und wird mit $\zeta_H(s, \varepsilon)$ bezeichnet.

Für $s = 0$ ist $\zeta_H(0, \varepsilon)$ ein Polynom, dessen Koeffizienten aus der asymptotischen Entwicklung (6) berechnet werden können. Das folgende Lemma behandelt nur den wichtigen Spezialfall eines Operators der Ordnung 2.

Lemma 13. *Ist $d = 2$ und $m = \dim M$ ungerade, so ist $\zeta_H(0, \varepsilon) = 0$, andernfalls*

$$\zeta_H(0, \varepsilon) = \sum_{k=0}^p a_{2k} \frac{\varepsilon^{p-k}}{(p-k)!} \quad \text{mit} \quad p = \frac{m}{2}.$$

Beweis. Die asymptotische Entwicklung von $\text{Tr} e^{-tH}$ lautet

$$\text{Tr} e^{-tH} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{\frac{j-m}{2}}, \quad t \rightarrow 0+,$$

wobei $a_j = 0$ für ungerade j . Es ist $\frac{1}{\Gamma(s)} = s + \gamma s^2 + O(s^3)$ analytisch in einer Umgebung von 0. Damit gilt

$$\begin{aligned} \zeta_A(0, \varepsilon) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr} e^{-tA} e^{-t\varepsilon} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^1 t^{s-1} \text{Tr} e^{-tA} e^{-t\varepsilon} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^1 t^{s-1} \sum_k a_{2k} t^{k-\frac{m}{2}} \sum_l \frac{\varepsilon^l}{l!} t^l dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p t^{s-1-\frac{m}{2}+p} a_{2k} \frac{\varepsilon^{p-k}}{(p-k)!} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p a_{2k} \frac{\varepsilon^{p-k}}{(p-k)!} \cdot \frac{1}{s+p-\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Lemma 14. *Sei H positiv semidefinit elliptischer Operator positiver Ordnung auf einer kompakten Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

a)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log \det (H + \varepsilon) - \dim \ker H \log \varepsilon) = \log \det^* H$$

b)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_H(0, \varepsilon) = \zeta_H^*(0) + \dim \ker H$$

Beweis. Zu a) Es ist

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta_H(s, \varepsilon) &= \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} e^{-t(H+\varepsilon)} dt \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} \left(\operatorname{Tr} e^{-tH} - \dim \ker H \right) dt \\ &\quad + \dim \ker H \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} dt \\ &= \Gamma(s) \zeta_H^*(s) + O(\varepsilon) + \varepsilon^{-s} \Gamma(s) \cdot \dim \ker H \end{aligned} \quad (8)$$

Zu b) Folgt aus (8) für $s = 0$.

□

Später wird noch folgende Aussage von Y. Lee aus [Le1] benötigt:

Lemma 15. *Sei A positiv definiten elliptischer Operator positiver Ordnung und (K_r) eine einparametrische Familie positiv semidefiniten Operatoren der Spurklasse, so dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Tr}(K_r) = 0$. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \log \det (A + K_r) = \log \det A.$$

3.2 Relative Determinante

Elliptische selbstadjungierte Operatoren auf einer nicht-kompakten Mannigfaltigkeit besitzen i.A. stetiges Spektrum, deshalb kann für sie keine ζ -Funktion definiert werden. In der Arbeit [Mu1] gibt W. Müller Bedingungen an, unter denen es möglich ist, für zwei solcher Operatoren H und H_0 eine *relative Determinante* $\det(H, H_0)$ zu definieren. Diese relative Determinante ist für Operatoren auf einer kompakten Mannigfaltigkeit gerade der Quotient der regularisierten Determinanten der Operatoren. Im Folgenden wird die relative Determinante in einem für diese Arbeit hinreichend allgemeinen Fall definiert.

Seien H und H_0 selbstadjungierte nicht-negative elliptische Operatoren auf einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} . Folgende drei Bedingungen seien erfüllt:

1. Sind e^{-tH} und e^{-tH_0} die zu H und H_0 assoziierten Wärmehalbguppen, so ist

$$e^{-tH} - e^{-tH_0} \text{ für } t > 0 \text{ ein Operator der Spurklasse.} \quad (9)$$

2. Für $t \rightarrow 0$ gibt es eine asymptotische Entwicklung

$$\mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{\alpha_j} \quad (10)$$

mit $\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ und $\alpha_j \rightarrow \infty$.

3. Es gibt $b_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, so dass für $t \rightarrow \infty$

$$\mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) \sim b_0 + O(t^{-\rho}). \quad (11)$$

Sei

$$\begin{aligned} \zeta_1(s, H, H_0) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) dt, \quad \Re(s) > -\alpha_0 \\ \zeta_2(s, H, H_0) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} t^{s-1} \mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) dt, \quad \Re(s) < 0 \end{aligned}$$

Dann besitzt ζ_1 eine meromorphe Fortsetzung in ganz \mathbb{C} . Mögliche Pole von ζ_1 liegen wegen (10) bei $-\alpha_j$, $j \in \mathbb{N}_0$. In $s = 0$ ist ζ_1 holomorph, denn bei 0 hat die Γ -Funktion einen einfachen Pol.

Entsprechend besitzt ζ_2 wegen (11) eine meromorphe Fortsetzung in die Halbebene $\Re(s) < \rho$. Diese ist durch

$$\zeta_2(s, H, H_0) = -\frac{b_0}{\Gamma(s+1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} t^{s-1} \left(\mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) - b_0 \right) dt$$

gegeben; insbesondere ist ζ_2 regulär bei $s = 0$.

Die relative ζ -Funktion ist

$$\zeta(s, H, H_0) := \zeta_1(s, H, H_0) + \zeta_2(s, H, H_0).$$

Dann wird die *relative Determinante* $\det(H, H_0)$ definiert durch

Definition 16.

$$\log \det(H, H_0) = -\frac{d}{ds} \zeta(s, H, H_0) \Big|_{s=0}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Erfüllt (H, H_0) die Bedingungen (9)-(11), so ist das auch für $(H + \varepsilon, H_0 + \varepsilon)$ der Fall, und es gilt

$$\zeta(s, \varepsilon, H, H_0) := \zeta(s, H + \varepsilon, H_0 + \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t\varepsilon} \mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) dt.$$

Folgendes Lemma vergleicht $\det(s, H + \varepsilon, H_0 + \varepsilon)$ und $\det(s, H, H_0)$.

Lemma 17. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist

$$\log \det(H + \varepsilon, H_0 + \varepsilon) = \log \det(H, H_0) + b_0 \log \varepsilon + o(1).$$

Beweis. Seien $\zeta_1(s, \varepsilon, H, H_0)$ und $\zeta_2(s, \varepsilon, H, H_0)$ analog zu $\zeta_1(s, H, H_0)$ und $\zeta_2(s, H, H_0)$ als Integrale über $[0, 1]$ bzw. $[1, \infty)$ definiert. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_1'(0, \varepsilon, H, H_0) = \zeta_1'(0, H, H_0).$$

$$\begin{aligned} \zeta_2(s, \varepsilon, H, H_0) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} \operatorname{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} \left(\operatorname{Tr}(e^{-tH} - e^{-tH_0}) - b_0 \right) dt + \frac{b_0}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t\varepsilon} dt \\ &= \zeta_2(s, H, H_0) + \frac{b_0}{\Gamma(s+1)} + O(\varepsilon) + b_0 \varepsilon^{-s} - \frac{b_0}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} e^{-t\varepsilon} dt \end{aligned}$$

In einer Umgebung von 0 ist $\frac{1}{\Gamma(s)}$ holomorph,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + \gamma s^2 + O(s^3).$$

Sei $\psi(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} e^{-t\varepsilon} dt$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \psi(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s + \gamma s^2) \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} t^{s-1+k} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (s + \gamma s^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s+k} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!} = 1. \end{aligned}$$

Damit ist $\psi(s)$ holomorph in einer Umgebung von 0 und

$$\psi'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\psi(s) - 1) = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{(-\varepsilon)^k}{k!}.$$

Insbesondere $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'(0) = \gamma = \left. \frac{d}{ds} \frac{1}{\Gamma(s+1)} \right|_{s=0}$. Mit

$$\left. \frac{d}{ds} b_0 \varepsilon^{-s} \right|_{s=0} = -b_0 \log \varepsilon$$

folgt die Behauptung. □

4 Mannigfaltigkeiten mit eingebetteten Zylinderstücken

4.1 Bezeichnungen

In diesem Abschnitt werden die für den Rest der Arbeit gültigen Bezeichnungen eingeführt.

Sei $\pi : E \rightarrow M$ hermitesches Vektorraumbündel mit Fasermetric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ über einer geschlossenen, orientierten kompakten n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik g .

Es gebe eine glatte Einbettung

$$\iota : [-1, 1] \times Y \hookrightarrow M,$$

wobei $\iota(\{0\} \times Y)$ eine geschlossene orientierte Untermannigfaltigkeit von M mit Kodimension 1 ist; diese wird wieder mit Y bezeichnet.

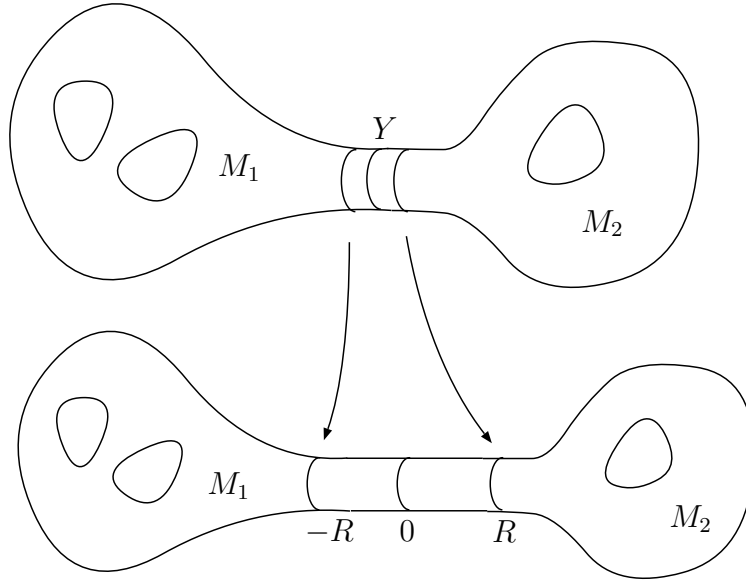


Abbildung 2: M und M_r

Durch Y wird M in zwei kompakte Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 mit Rand zerlegt, deren Orientierung durch die Orientierung von M gegeben ist:

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2, & M_1 \cap M_2 &= \partial M_1 = \partial M_2 = Y \\ \iota([-1, 0] \times Y) &\subset M_1, & \iota([0, 1] \times Y) &\subset M_2. \end{aligned}$$

Mit $E|_Y := \iota_0^* E$ wird das durch die Inklusion $\iota_0 = \iota(0, \cdot)$ induzierte Vektorbündel über Y bezeichnet.

Zu $r > 0$ wird aus M eine Mannigfaltigkeit M_r durch

$$M_r := M_1 \cup_Y ([-r, r] \times Y) \cup_Y M_2$$

konstruiert. Das Bündel E über M wird auf natürliche Weise zu einem Bündel $E(r)$ über M_r fortgesetzt, so dass $E(r)|_{[-r, r] \times Y} = \pi_2^*(E|_Y)$ mit der Projektion $\pi_2 : [-r, r] \times Y \rightarrow Y$.

Sei $\Delta : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$ positiv semidefiniter verallgemeinerter Laplaceoperator auf M .

Weiter gelte

$$\Delta|_{[-1, 1] \times Y} = -\frac{d^2}{dt^2} + \pi_2^* \Delta_Y;$$

dabei ist $\Delta_Y : C^\infty(Y, E|Y) \rightarrow C^\infty(Y, E|Y)$ Operator vom Laplacetyp auf Y , und das Symbol t ist die Koordinate von $[-1, 1]$ in $[-1, 1] \times Y$.

Der Operator $\Delta : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$ wird zu $\Delta_{M_r} : C_0^\infty(M_r, E(r)) \rightarrow C_0^\infty(M_r, E(r))$ fortgesetzt, so dass $\Delta_{M_r}|M = \Delta$.

Aus M_1 und M_2 werden die Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende

$$M_{1,\infty} := M_1 \cup_Y ([0, \infty) \times Y), \quad M_{2,\infty} := M_2 \cup_Y ((-\infty, 0] \times Y)$$

konstruiert. Über $M_{i,\infty}$ gibt es Vektorbündel $E_i(\infty)$, $i = 1, 2$, so dass $E_i(\infty)|M_i = E|M_i$ und

$$E_1(\infty)|[0, \infty) = \pi_2^*(E|Y), \quad E_2(\infty)|(-\infty, 0] = \pi_2^*(E|Y).$$

Wegen der Produktstruktur von Δ und E in einer Umgebung von Y kann Δ auch über $M_{i,\infty}$ zu

$$\Delta_{i,\infty} : C_0^\infty(M_{i,\infty}, E_i(\infty)) \rightarrow C_0^\infty(M_{i,\infty}, E_i(\infty))$$

fortgesetzt werden, so dass $\Delta_{i,\infty}|M_i = \Delta_{M_i}$ für $i = 1, 2$.

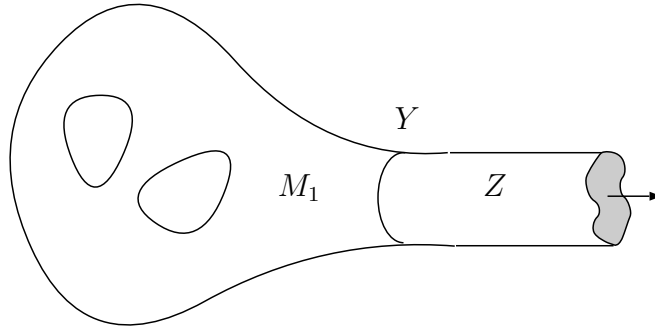


Abbildung 3: $M_{1,\infty}$ mit zylindrischem Ende Z

Im Folgenden werden die Bündel $E(r)$ und $E_i(\infty)$ wieder mit E bezeichnet, die eigentliche Bedeutung ist aus dem Zusammenhang ersichtlich.

Sei X eine der genannten Mannigfaltigkeiten M , M_r oder $M_{i,\infty}$ und L der zugehörige Laplaceoperator Δ , Δ_r oder $\Delta_{i,\infty}$. Die Lösungen der Wellengleichung zu $L : C_0^\infty(X, E) \rightarrow C_0^\infty(X, E)$ haben endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dies folgt mit Satz 8 daraus, dass X in den Fällen $X = M$, $X = M_r$ kompakt ist, und für $X = M_{i,\infty}$ ist

$$L = -\frac{d^2}{dt^2} + \Delta_Y = \nabla^{E^*} \nabla^E + \pi_2^* B$$

mit einem Schnitt $B : C^\infty(Y, \text{Sym}(E|Y))$ der symmetrischen Endomorphismen über $E|Y$. Insbesondere ist B beschränkt. Nach [Ch] ist L deshalb wesentlich selbstadjungiert in $L^2(X, E)$.

Damit besitzt Δ eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung \mathcal{L} auf $L^2(X, E)$ mit Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{u \in L^2(M, E) \mid \mathcal{L}u \in L^2(M, E)\}.$$

Das von g und der Fasermetric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte innere Produkt in $L^2(X, E)$ wird mit (\cdot, \cdot) bezeichnet.

4.2 Das Spektrum von Δ_∞

In diesem Kapitel werden einige Fakten über die Spektralzerlegung von $\Delta = \Delta_{i,\infty}$ zusammengestellt.

Sei $X = M_{i,\infty}$. Es ist

$$L^2(X, E) = L_d^2(X, E) \oplus L_c^2(X, E),$$

wobei

$$L_d^2(X, E) = \bigoplus_j \mathcal{E}(\lambda_j)$$

die direkte Summe von Eigenräumen von Δ mit Eigenwerten endlicher Vielfachheit $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ohne endlichen Häufungswert ist. Dies wird in Kapitel 4 von [Mu4] gezeigt. Das orthogonale Komplement $L_c^2(X, E)$ von $L_d^2(X, E)$ ist der absolutstetige Unterraum für Δ . Er kann mit Hilfe von *verallgemeinerten Eigenschnitten* beschrieben werden. Zu $\phi \in \ker \Delta_Y$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist der verallgemeinerte Eigenschnitt $E(\phi_j, \lambda)$ ein glatter Schnitt von E und erfüllt

$$\Delta E(\phi_j, \lambda) = \lambda E(\phi_j, \lambda).$$

Dies wird im Folgenden erläutert; eine ausführliche Behandlung des Themas findet sich in [Gui], [Mu2] und [Mu4]. Sei ϕ_l ein Eigenschnitt von Δ_Y mit Eigenwert μ_l . Wähle $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ so, dass $\chi(u) = 0$ für $u \leq 1$ und $\chi(u) = 1$ für $u \geq 2$. χ wird auf naheliegende Weise auf $X = M_1 \cup Z$ fortgesetzt, so dass $\chi = 0$ auf M_1 und $\chi = 1$ auf $[2, \infty) \times Y \subset Z$. Wir betrachten zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ die Funktionen

$$e_\mu^\pm(\lambda, u) = e^{\pm i\sqrt{\lambda - \mu_l} u},$$

wobei der Zweig der Wurzel gewählt wird, für den

$$\Im(\lambda - \mu_l) > 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

Wir setzen

$$E_{\mu_l}(\phi_l, \lambda) = \chi e_{\mu_l}^- \phi_l - (\widehat{\Delta} - \lambda)^{-1}((\Delta - \lambda)(\chi e_{\mu_l}^+ \phi_l)).$$

Dabei ist $\widehat{\Delta}$ die selbstadjungierte Erweiterung von Δ auf $L^2(X, E)$. Dann ist $E_{\mu_l}(\phi_l, \lambda)$ glatt und erfüllt

$$\Delta E_{\mu_l}(\phi_l, \lambda) = \lambda E_{\mu_l}(\phi_l, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

Sei Σ die zu $z \mapsto \sqrt{z - \mu}$ für Eigenwerte μ von Δ_Y assoziierte Riemannsche Fläche. In [Gui] wird gezeigt, dass jede Funktion $\lambda \mapsto E_\mu(\phi_\mu, \lambda)$ eine meromorphe Fortsetzung als Funktion von $\lambda \in \Sigma$ hat.

Die Einschränkung von $E_{\mu_l}(\phi_l, \lambda)$ auf $\mathbb{R}^+ \times Y$ hat eine Entwicklung der Form

$$e_{\mu_l}^- \phi_{\mu_l} + \sum_{k=0}^{\infty} e_{\mu_k}^+ T_{lk}(\lambda) \phi_l, \quad (12)$$

dabei ist $T_{lk}(\lambda)$ eine lineare Abbildung der Eigenräume $\mathcal{E}(\mu_l) \rightarrow \mathcal{E}(\mu_k)$ und meromorph in λ . Wird nämlich

$$(\widehat{\Delta} - \lambda)^{-1}((\Delta - \lambda)(\chi e_{\mu_l}^+ \phi_l))$$

in der Basis $\{\phi_k\}$ von $L^2(Y, E)$ entwickelt, so ist der Koeffizient in $\mathcal{E}(\mu_l)$ eine Linearkombination von $e_{\mu_l}^-$ und $e_{\mu_l}^+$. Davon ist aber nur der zweite Term e^+ in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit sind die verallgemeinerten Eigenschnitte zu $\phi \in \ker \Delta_Y$.

Sei μ_1 der kleinste positive Eigenwert von Δ_Y . Wir setzen $\lambda = s^2$ und betrachten $E(\phi, \lambda)$ als eine Funktion von s . Aus (12) folgt, dass es einen linearen Operator $S(s) : \ker \Delta_Y \rightarrow \ker \Delta_Y$ gibt, der eine meromorphe Funktion in $\Sigma^1 = \mathbb{C} \setminus ([\sqrt{\mu_1}, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{\mu_1}])$ ist, so dass auf $\mathbb{R}^+ \times Y$ gilt

$$E(\phi, s) = e^{isu} \phi + e^{-isu} S(s) \phi + \psi(s), \quad s \in \Sigma^1, \quad (13)$$

wobei $\psi(s) \in L^2(X, E)$ liegt.

In [Mu2] zeigt W. Müller, dass $E(\phi, s)$ holomorph in $s = 0$ ist. Außerdem haben $E(\phi, s)$ und $S(s)$ eine analytische Fortsetzung in die Kreisscheibe $|s| < \sqrt{\mu_1}$. Für $|s| < \sqrt{\mu_1}$ ist $S(s)$ gerade die Streumatrix zu den Wellenoperatoren

$$W_{\pm}(\widehat{\Delta}, \widehat{\Delta}_0) := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\widehat{\Delta}} J e^{-it\widehat{\Delta}_0}.$$

Dabei ist $J : L^2(Z, E) \rightarrow L^2(X, E)$ die Inklusion und Δ_0 der Laplaceoperator mit Dirichlet-Randwerten bei $0 \times Y$ (siehe [Mu4]).

In Korollar 5.5 von [Gui] wird für die Streumatrix $S(s)$ die Funktionalgleichung

$$S(s)S(-s) = \text{id}, \quad (14)$$

bewiesen, insbesondere ist $S(0)^2 = \text{id}$. In [Gui] werden für die Homomorphismen T_{kl} aus (12) entsprechende Funktionalgleichungen hergeleitet. Zusammen mit der Definition (13) folgt für $\phi \in \ker \Delta_Y$

$$\begin{aligned} E(\phi, -s) &= E(S(-s)\phi, s) \\ S(s)^t &= S(s), \quad |s| < \sqrt{\mu_1}. \\ \overline{S(s)} &= S(-\bar{s}) \end{aligned} \quad (15)$$

Wenn $S(0)\phi = \phi$ ist, dann folgt aus (13) dass

$$E(\phi, 0) = 2\phi + \psi \quad (16)$$

auf $\mathbb{R}^+ \times Y$, wobei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+ \times Y, E)$. Wenn $S(0)\phi = -\phi$, dann ist $E(\phi, 0) = 0$ [Mu2, S. 209]. Sei

$$\ker \Delta_Y = V^+ \oplus V^-$$

die Zerlegung von $\ker \Delta_Y$ in die ± 1 -Eigenräume von $S(0)$. Dann ist V^+ in der Terminologie von [APS] der Raum der Grenzwerte von erweiterten Lösungen von Δ , siehe auch [Mu4]. Die erweiterten Lösungen von $\Delta_{1,\infty}$ sind dabei Paare $(\phi, \hat{\phi})$ mit den Eigenschaften

1. $\phi \in C^\infty(M_{1,\infty}, E(\infty))$ ist Lösung von $\Delta\phi = 0$.
2. $\hat{\phi} \in C^\infty(Y, E|Y)$ ist Lösung von $\Delta_Y \hat{\phi} = 0$.
3. $\phi|_{M_i}$ ist quadratintegrierbar.
4. $\phi|_{Y \times \mathbb{R}^+} - \pi_2^* \hat{\phi}$ ist quadratintegrierbar.

Hier gilt also

$$V^+ = \{ \hat{\phi} | (\phi, \hat{\phi}) \text{ ist erweiterte Lösung von } \Delta \}.$$

Sei jetzt ϕ_1, \dots, ϕ_m eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_Y$. Sei Δ_c die Einschränkung von Δ auf $L_c^2(X, E)$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } f \subset (-\mu, \mu)$, wobei $0 < \mu^2 \leq \mu_1$. Dann folgt aus der Beschreibung des absolutstetigen Spektrums in [Mu4, S.340, (4.11)]

$$(f(\Delta_c)\psi)(x) = \int_X K_f(x, y)\psi(y) dy$$

mit dem Kern

$$K_f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \left(\int_0^\mu f(s) E(\phi_j, s, x) \otimes \overline{E(\phi_j, s, y)} ds + \int_0^\mu f(-s) E(\phi_j, -s, x) \otimes \overline{E(\phi_j, -s, y)} ds \right). \quad (17)$$

Lemma 18. *Sei ϕ_1, \dots, ϕ_m eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_Y$. Dann ist*

$$\sum_{j=1}^m E(\phi_j, s)(y_1) \otimes E(\phi_j, -s)(y_2)$$

eine gerade Funktion in s , $|s| < \sqrt{\mu_1}$.

Beweis. Der Beweis verwendet die Funktionalgleichungen (14) und (15). Sei $E(\phi, s, y) := E(\phi, s)(y)$. Nach Wahl der ϕ_i gibt es für $|s| < \sqrt{\mu_1}$ definierte analytische Funktionen $a_{ij}(s)$, $i, j = 1, \dots, m$, so dass

$$S(s)\phi_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(s)\phi_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Zusammen mit (15) ergibt dies

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m E(\phi_j, -s, y_1) \otimes E(\phi_j, s, y_2) &= \sum_{j=1}^m E(S(-s)\phi_j, s, y_1) \otimes E(S(s)\phi_j, -s, y_2) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k,l=1}^m a_{jk}(-s)a_{jl}(s) E(\phi_k, s, y_1) \otimes E(\phi_l, -s, y_2). \end{aligned}$$

Laut (15) ist die Matrix $A(s) = (a_{ij}(s))_{i,j}$ symmetrisch und erfüllt $A(-s)A(s) = \text{Id}$. Das bedeutet

$$\sum_{j=1}^m E(\phi_j, -s, y_1) \otimes E(\phi_j, s, y_2) = \sum_{j=1}^m E(\phi_j, s, y_1) \otimes E(\phi_j, -s, y_2)$$

wie behauptet. □

Nun ist aber wegen (15) für $s \in \mathbb{R}$, $|s| < \sqrt{\mu_1}$

$$\begin{aligned} &E(\phi_j, s) \otimes \overline{E(\phi_j, s)} + E(\phi_j, -s) \otimes \overline{E(\phi_j, -s)} \\ &= E(\phi_j, s) \otimes E(\overline{S(s)\phi_j}, s) + E(\phi_j, -s) \otimes E(\overline{S(-s)\phi_j}, -s) \\ &= E(\phi_j, s) \otimes E(S(-s)\phi_j, s) + E(\phi_j, -s) \otimes E(S(s)\phi_j, -s) \\ &= E(\phi_j, s) \otimes E(\phi_j, -s) + E(\phi_j, -s) \otimes E(\phi_j, s). \end{aligned}$$

Ist nun f eine gerade Funktion, so kann (17) wegen Lemma 18 wie folgt geschrieben werden:

$$K_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^{\mu} f(s) E(\phi_j, s, x) \otimes E(\phi_j, -s, y) ds. \quad (18)$$

Wir werden in Kapitel 5.3 darauf zurückkommen.

5 Dirichlet-to-Neumann Operator

5.1 Definition

Sei X eine der in Abschnitt 4.1 genannten vollständigen Mannigfaltigkeiten M , M_r oder $M_{i,\infty}$. Wie dort sei ein Vektorbündel $E \rightarrow X$ gegeben, und $L : C_0^\infty(X, E) \rightarrow C_0^\infty(X, E)$ der zugehörige verallgemeinerte Laplaceoperator mit selbstadjungierter Erweiterung \mathcal{L} .

Sei ∇^L der in Abschnitt 1.2 definierte Zusammenhang, so dass $B = L - \nabla^{L*}\nabla^L$ Operator nullter Ordnung ist.

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Zu f in $C^\infty(Y, E)$ existiert ein eindeutiges $\tilde{f} \in C^\infty(X \setminus Y, E) \cap L^2(X, E)$ mit

$$\begin{cases} (L + z)\tilde{f} = 0 & \text{auf } X \setminus Y, \\ \tilde{f} = f & \text{auf } Y. \end{cases}$$

Dieses \tilde{f} kann wie folgt konstruiert werden. Sei \mathcal{L}_0 der zu L assoziierte Operator mit Dirichletschen Randbedingungen auf Y , d.h. \mathcal{L}_0 ist die Friedrichserweiterung der quadratischen Form

$$\sigma \mapsto \int_X \langle L\sigma, \sigma \rangle = \int_X (\|\nabla^L \sigma\|^2 + \langle B\sigma, \sigma \rangle)$$

auf $C_0^\infty(X \setminus Y, E)$ bezüglich der Norm

$$\sigma \mapsto \sqrt{\|\sigma\|_{L^2}^2 + \langle L\sigma, \sigma \rangle}$$

(siehe z.B. [RS]). Sei $F \in C_0^\infty(X, E)$ eine Erweiterung von f , dann gilt

$$\tilde{f} = F - (\mathcal{L}_0 + z)^{-1}(L + z)F.$$

Durch Y zerfällt $X = X_1 \cup_Y X_2$ in zwei Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Schnitt \tilde{f} ist stetig in X und glatt in \overline{X}_\pm .

Seien die zugehörigen n_1, n_2 äußere Einheitsnormalenvektorfelder an Y . Dann ist der *Dirichlet-to-Neumann (DtN) Operator* $R(z)$ von $L + z$ wie folgt definiert:

Definition 19.

$$R(z) := \nabla_{n_1}^L \tilde{f}|_{X_1} + \nabla_{n_2}^L \tilde{f}|_{X_2}$$

Da angenommen wurde, dass X in einer Umgebung von Y Produktstruktur hat, kann dies auch als

$$R(z) := \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} \tilde{f}|_{X_1} - \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} \tilde{f}|_{X_2}$$

geschrieben werden, wobei u die Koordinate in $[-1, 1]$ von $[-1, 1] \times Y \subset X$ bezeichnet.

Der folgende Satz gibt eine alternative Beschreibung von $R(z)$.

Satz 20. Sei $G(z, x, y) \in V_x \otimes V_y^*$ Integralkern von $(\mathcal{L} + z)^{-1}$, also

$$(\mathcal{L} + z)^{-1}g(x) = \int_X G(z, x, y)g(y) dy, \quad g \in L^2(X, E).$$

Für $f \in C^\infty(Y, E|Y)$ bezeichne $\delta_Y \otimes f$ die Distribution

$$\phi \in C_0^\infty(X, E) \mapsto (\phi|_Y, f)_{L^2(Y, E|Y)}$$

Dann ist mit dem Randwertoperator J mit Bild in $L^2(Y, E)$

$$R(z)^{-1}f = J(\mathcal{L} + z)^{-1}(\delta_Y \otimes f)$$

und es gilt

$$R(z)^{-1}f(x) = \int_Y G(z, x, y)f(y)dy, \quad x \in Y.$$

Beweis. Definiere $u \in L^2(X, E)$ durch

$$u(x) = \int_Y G(z, x, y) f(y) dy, \quad f \in C^\infty(Y, V).$$

Wegen der Selbstadjungiertheit von \mathcal{L} ist

$$\overline{G(z, x, y)}^* = G(z, y, x).$$

Für $\phi \in C_0^\infty(X, E)$ ist im Distributionensinn

$$\begin{aligned} u(\phi) &= (\phi, u)_{L^2(X, E)} = \int_M \int_Y \langle \phi(x), G(z, x, y) f(y) \rangle dy dx \\ &= \int_X \int_Y \langle G(z, y, x) \phi(x), f(y) \rangle dy dx \\ &= \int_Y \langle (\mathcal{L} + z)^{-1} \phi(y), f(y) \rangle dy = (\delta_Y \otimes f)((\mathcal{L} + z)^{-1} \phi), \end{aligned}$$

d.h.

$$(\mathcal{L} + z)u = \delta_Y \otimes f. \quad (19)$$

Für $\phi \in C_0^\infty(X \setminus Y)$ gilt

$$(\mathcal{L} + z)u(\phi) = (\delta_Y \otimes f)(\phi) = \int_Y \langle \phi, f \rangle = 0,$$

also ist u nach dem Regularitätssatz für elliptische Operatoren glatt und

$$(L + z)u = 0 \quad \text{auf} \quad X \setminus Y.$$

Die Greensche Formel für $\phi \in C_0^\infty(X, E)$ ergibt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} + z)u(\phi) &= \int_X (\langle L\phi, u \rangle + \langle \phi, zu \rangle) \\ &\stackrel{(19)}{=} \int_{X_1} (\langle L\phi, u \rangle - \langle \phi, Lu \rangle) + \int_{X_2} (\langle L\phi, u \rangle - \langle \phi, Lu \rangle) \\ &= \int_Y (\langle \phi, \nabla_{n_1}^L u \rangle - \langle \nabla_{n_1}^L \phi, u \rangle) + \int_Y (\langle \phi, \nabla_{n_2}^L u \rangle - \langle \nabla_{n_2}^L \phi, u \rangle). \end{aligned}$$

Wegen der Glattheit von ϕ ist $(\nabla_{n_1}^L + \nabla_{n_2}^L)\phi|_Y = 0$. Damit ist aber

$$(\mathcal{L} + z)u(\phi) = \int_Y \langle \phi, (\nabla_{n_1}^L + \nabla_{n_2}^L)u \rangle = (\delta_Y \otimes R(z)(Ju))(\phi).$$

Vergleich mit (19) ergibt $R(z)(Ju) = f$, also die gesuchten Beziehungen

$$R(z)^{-1}f = Ju \stackrel{(19)}{=} J(\mathcal{L} + z)^{-1}(\delta_Y \otimes f).$$

□

Insbesondere ist $R(\lambda)$ für $\lambda > 0$ ein selbstadjungierter, positiv definit, elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung 1. Damit existiert die regularisierte Determinante $\det R(\lambda)$.

Für das Weitere wird nicht mehr zwischen L und der selbstadjungierten Erweiterung \mathcal{L} unterschieden; der verallgemeinerte Laplaceoperator auf X wird in beiden Fällen mit Δ bezeichnet.

Im Folgenden wird der DtN-Operator für $z = 0$, d.h. für Δ selbst, definiert.

Dazu wird angenommen, dass der Laplaceoperator $\Delta_{M_i, B}$, $i = 1, 2$ mit Dirichlet-schen Randbedingungen bei Y invertierbar ist.

Lemma 21. *Für alle $\varphi \in C^\infty(Y, E|Y)$ gibt es ein eindeutiges, beschränktes $\psi \in C^\infty(X \setminus Y, E) \cap C^0(X, E)$, das folgende Eigenschaften erfüllt:*

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 \quad \text{auf } X \setminus Y; \\ \psi|_Y &= \varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Beweis. Es genügt, den Fall $X = M_{1, \infty} =: M_1 \cup_Y Z$ zu betrachten. Dabei ist M_1 kompakt mit Rand Y und Z das zylindrische Ende. Da $\Delta_{M_1, B}$ invertierbar ist, hat das Dirichlet-Problem auf M_1 eine eindeutige Lösung, d.h., für alle $\varphi \in C^\infty(Y, E|Y)$ gibt es ein eindeutiges $\psi_1 \in C^\infty(M_1, E) \cap C^0(\overline{M_1}, E)$, so dass

$$\begin{aligned} \Delta_{M_1} \psi_1 &= 0 \quad \text{in } M_1; \\ \psi_1|_Y &= \varphi. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass das Dirichletproblem auf Z ebenfalls eine eindeutige Lösung besitzt. Sei $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(Y, E|Y)$ aus Eigenschnitten von Δ_Y mit Eigenwerten $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Sei $\varphi \in C^\infty(Y, E|Y)$. Dann hat φ eine Entwicklung der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i.$$

Setze

$$\psi_2(u, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-u\sqrt{\lambda_j}} \phi_j(y).$$

Dann ist $\psi_2 \in C^\infty(Z, E)$ beschränkt und erfüllt

$$\Delta\psi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \psi_2(0, y) = \varphi(y), \quad y \in Y.$$

Damit ist die Existenz einer Lösung bewiesen. Angenommen $\tilde{\psi}_2$ ist eine weitere beschränkte Lösung von (20). Setze $g = \psi_2 - \tilde{\psi}_2$. Dann ist $g \in C^\infty(Z, E)$ beschränkt und erfüllt

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta_Y \right) g &= 0; \\ g(0, y) &= 0, \quad y \in Y. \end{aligned}$$

Wird g in der Orthonormalbasis $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ entwickelt, so folgt

$$g(u, y) = \sum_{j=1}^d (b_j u + a_j) \phi_j(y) + \sum_{j=d+1}^{\infty} (b_j e^{\sqrt{\lambda_j} u} + a_j e^{-\sqrt{\lambda_j} u}) \phi_j(y),$$

mit $d = \dim \ker \Delta_Y$. Weil g beschränkt ist, folgt $b_j = 0$ für $j \geq 1$. Mit der Randbedingung $g(0, y) = 0$, erhalten wir $a_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dies zeigt die Eindeutigkeit der Lösung. \square

Jetzt kann wie oben vorgegangen werden. Zu gegebenem $\varphi \in C^\infty(Y, E|Y)$, sei $\psi \in C^\infty(X - Y, E) \cap C^0(X, E)$ die eindeutige Lösung von (20). Setze

$$R\varphi = \frac{\partial}{\partial u}(\psi|X_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\psi|X_2).$$

5.2 Berechnung des DtN-Operators

In diesem Kapitel wird der Dirichlet-to-Neumann Operator für $M_{1,\infty} = M_1 \cup ([0, \infty) \times Y)$ und für M_r berechnet. Es wird wieder angenommen, dass $\Delta_{M_1, B}$ positiv ist, d.h., dass das Dirichletproblem auf M_1 eine eindeutige Lösung besitzt.

5.2.1 Mannigfaltigkeit mit zylindrischem Ende

Sei $R_\infty(\varepsilon), \varepsilon \geq 0$ der DtN-Operator bezüglich Y auf $M_{1,\infty} = M_1 \cup_Y Z$ mit $Z = [0, \infty) \times Y$.

Lemma 22.

$$R_\infty(\varepsilon) = Q_1(\varepsilon) + \sqrt{\Delta_Y + \varepsilon} \quad \text{für} \quad \varepsilon \geq 0. \quad (21)$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty(Y)$. Gemäß Lemma 21 gibt es eine eindeutige beschränkte C^∞ -Lösung ϕ von $(\Delta_{1,\infty} + \varepsilon)\phi = 0$ mit $\phi|_Y = f$. Wir definieren

$$Q_1(\varepsilon)(f) := \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0}(\phi|_{M_1}), \quad Q_2(\varepsilon)(f) = \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0}(\phi|_Z) \quad (22)$$

Dann ist $R_\infty(\varepsilon)f = Q_1(\varepsilon)(f) - Q_2(\varepsilon)(f)$, $i = 1, 2$. Dabei kann $Q_2(\varepsilon)$ wie folgt berechnet werden.

Zuerst wird der Fall $\varepsilon = 0$ betrachtet. Es ist $\Delta_Z = -\frac{d^2}{du^2} + \Delta_Y$. Sei $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ Orthonormalbasis von $L^2(Y, E|Y)$ aus Eigenschnitten von Δ_Y mit zugehörigen Eigenwerten $\{\mu_i\}$. Wird $\phi \upharpoonright Z = \phi(u, y)$ in dieser Basis entwickelt, so folgt mit $h := \dim \ker \Delta_Y$

$$\phi(u, y) = \sum_{i=1}^h (a_i u + b_i) \psi_i(y) + \sum_{i=h+1}^{\infty} (a_i e^{\sqrt{\mu_i} u} + b_i e^{-\sqrt{\mu_i} u}) \psi_i(y). \quad (23)$$

Weil ϕ beschränkt ist, folgt $a_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Randbedingung $\phi(0, y) = f(y)$ ergibt

$$b_i = (f, \psi_i)_{L^2(Y, E|Y)}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Folglich

$$Q_2(0)(f) = \left(- \sum_{i>h} \sqrt{\mu_i} (f, \psi_i) e^{-\sqrt{\mu_i} u} \psi_i(y) \right) \Big|_{u=0} = -\sqrt{\Delta_Y} f.$$

Ist $\varepsilon > 0$, so ist die Rechnung analog, nur dass jetzt in (23) keine in u linearen Terme auftreten.

$$Q_2(\varepsilon)(f) = \left(- \sum_i \sqrt{\mu_i + \varepsilon} (f, \psi_i) e^{-\sqrt{\mu_i + \varepsilon} u} \psi_i(y) \right) \Big|_{u=0} = -\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon} f$$

Die Behauptung folgt. □

Korollar 23. *Es gibt einen Glättungsoperator K , so dass*

$$R_\infty = 2\sqrt{\Delta_Y} + K.$$

Außerdem ist R formal selbstadjungiert.

Beweis. Wird Q_1 wie in (22) definiert, so besagt Theorem 2.1 aus [Le1], dass $Q_1 = \sqrt{\Delta_Y} + K$, wobei K ein Glättungsoperator ist. Die Behauptung folgt aus (21). □

Insbesondere folgt, dass R ein elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung 1 ist, weshalb die regularisierte Determinante $\det^* R$ definiert ist.

5.2.2 Geschlossene Mannigfaltigkeit mit Zylinderstück

Es folgt die Berechnung von $R_{-r,r}(\varepsilon)$, dem DtN-Operator auf M_r . In diesem Fall wird die Zerlegung $M_r = (M_1 \cup M_2) \cup_{Y \cup Y} N_{-r,r}$ betrachtet. Dabei ist $N_{-r,r} := [-r, r] \times Y$, d.h, der DtN-Operator wird bezüglich der Untermannigfaltigkeit $\tilde{Y} = (\{-r\} \times Y) \cup (\{r\} \times Y) \subset M_r$ berechnet.

Sei $(f, g) \in C^\infty(\tilde{Y}, E|\tilde{Y})$. Nach Lemma 21 gibt es eine eindeutige C^∞ -Lösung ϕ von

$$(\Delta + \varepsilon)\phi = 0, \quad \phi|_{\{-r\} \times Y} = f, \quad \phi|_{\{r\} \times Y} = g.$$

Wir definieren

$$Q_1(\varepsilon)(f) = \frac{\partial}{\partial u}(\phi|_{M_1}) \Big|_{u=-r}, \quad Q_2(\varepsilon)(f) = \frac{\partial}{\partial u}(\phi|_{M_2}) \Big|_{u=r}.$$

Dann ist

$$R_{-r,r}(\varepsilon)(f, g) = \left(Q_1(\varepsilon)(f) - \left(\frac{\partial}{\partial u} \phi \Big|_{N_{-r,r}} \right) \Big|_{\{-r\} \times Y}, \quad Q_2(\varepsilon)(f) + \left(\frac{\partial}{\partial u} \phi \Big|_{N_{-r,r}} \right) \Big|_{\{r\} \times Y} \right),$$

Wieder wird zuerst der Fall $\varepsilon = 0$ betrachtet.

Seien also $\phi_{\pm} : C^{\infty}([-r, r] \times Y) \rightarrow C^{\infty}([-r, r] \times Y)$ gegeben mit

$$(\Delta \upharpoonright [-r, r] \times Y)\phi_{\pm} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta_Y\right)\phi_{\pm} = 0, \quad \phi_{\pm}|_{\{\pm r\} \times Y} = 0, \quad \phi_{\pm}|_{\{\mp r\} \times Y} = f.$$

Nach Voraussetzung ist $\Delta_{M,B}$ invertierbar. Insbesondere gilt $Q_1(0)(0) = Q_2(0)(0) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_{-r,r}(f, 0) &= \left(Q_1(0)(f) - \left(\frac{\partial}{\partial u}\phi_+\Big|_{N_{-r,r}}\right)\Big|_{\{-r\} \times Y}, \left(\frac{\partial}{\partial u}\phi_+\Big|_{N_{-r,r}}\right)\Big|_{\{r\} \times Y}\right) \\ R_{-r,r}(0, f) &= \left(-\left(\frac{\partial}{\partial u}\phi_-\Big|_{N_{-r,r}}\right)\Big|_{\{-r\} \times Y}, Q_2(0)(f) + \left(\frac{\partial}{\partial u}\phi_-\Big|_{N_{-r,r}}\right)\Big|_{\{r\} \times Y}\right) \end{aligned}$$

In der Orthonormalbasis $\{\psi_k\}$ von $L^2(Y, E|_Y)$:

$$\phi_{\pm}(u, y) = \sum_{1 \leq i \leq \dim \ker \Delta_Y} (\alpha_i u + \beta_i)\psi_i(y) + \sum_{i > \dim \ker \Delta_Y} (c_{1i}e^{-\sqrt{\mu_i}u} + c_{2i}e^{\sqrt{\mu_i}u})\psi_i(y).$$

Die Randbedingung $\phi_{\pm}|_{\{\pm r\} \times Y} = 0$ ergibt

$$\beta_i = \mp \alpha_i r, \quad c_{2i} = -c_{1i}e^{\mp 2\sqrt{\mu_i}r},$$

also

$$\phi_{\pm}(u, y) = \sum_{1 \leq i \leq \dim \ker \Delta_Y} \alpha_i(u \mp r)\psi_i(y) + \sum_{i > \dim \ker \Delta_Y} c_i(e^{-\sqrt{\mu_i}u} - e^{\sqrt{\mu_i}(u \mp 2r)})\psi_i(y).$$

Aus der zweiten Randbedingung $\phi_{\pm}|_{\{\mp r\} \times Y} = f$ folgt

$$\alpha_i = \mp \frac{1}{2r}(f, \psi_i)_{L^2(Y,E)}, \quad c_i = \frac{1}{e^{\pm\sqrt{\mu_i}r} - e^{\mp 3\sqrt{\mu_i}r}}(f, \psi_i)_{L^2(Y,E)}$$

Schließlich

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial u}\phi_{\pm}(u, y) &= \pm \sum_{1 \leq i \leq \dim \ker \Delta_Y} \frac{1}{2r}(f, \psi_i)\psi_i(y) \\ &\quad + \sum_{i > \dim \ker \Delta_Y} \underbrace{\frac{\sqrt{\mu_i}}{e^{\pm\sqrt{\mu_i}r} - e^{\mp 3\sqrt{\mu_i}r}}}_{=: q_{\pm,i}(u)} (e^{-\sqrt{\mu_i}u} + e^{\sqrt{\mu_i}(u \mp 2r)})(f, \psi_i)\psi_i(y). \end{aligned} \quad (24)$$

Speziell ist

$$\begin{aligned} q_{+,i}(r) &= \frac{2\sqrt{\mu_i}}{e^{2\sqrt{\mu_i}r} - e^{-2\sqrt{\mu_i}r}}, & q_{+,i}(-r) &= \sqrt{\mu_i} + \frac{2\sqrt{\mu_i}e^{-2\sqrt{\mu_i}r}}{e^{2\sqrt{\mu_i}r} - e^{-2\sqrt{\mu_i}r}} \\ -q_{-,i}(r) &= q_{+,i}(-r), & q_{-,i}(-r) &= -q_{+,i}(r) \end{aligned}$$

Mit der Projektion $P_{\ker \Delta_Y}$ auf $\ker \Delta_Y$

$$\Omega_r := \frac{1}{2r}P_{\ker \Delta_Y} + \frac{2\sqrt{\Delta_Y}}{e^{2\sqrt{\Delta_Y}r} - e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r}}P_{(\ker \Delta_Y)^{\perp}}$$

hat der DtN-Operator von Δ_{M_r} also die explizite Darstellung

$$R_{-r,r} = \begin{pmatrix} Q_1 + \sqrt{\Delta_Y} & 0 \\ 0 & Q_2 + \sqrt{\Delta_Y} \end{pmatrix} + \Omega_r \begin{pmatrix} e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r} & -\text{id} \\ -\text{id} & e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r} \end{pmatrix}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so ist die Rechnung völlig analog. Das Ergebnis lautet

$$R_{-r,r}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} Q_1 + \sqrt{\Delta_Y + \varepsilon} & 0 \\ 0 & Q_2 + \sqrt{\Delta_Y + \varepsilon} \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}}{e^{2\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}r} - e^{-2\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}r}} \begin{pmatrix} e^{-2\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}r} & -\text{id} \\ -\text{id} & e^{-2\sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}r} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Theorie elliptischer Randwertprobleme liefert die Stetigkeit von $Q_i(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0$, deshalb folgt aus obigen Formeln für $R_{i,\infty}(\varepsilon)$ und $R_{-r,r}(\varepsilon)$ das

Korollar 24. $R_{i,\infty}(\varepsilon)$ und $R_{-r,r}(\varepsilon)$ sind stetig in $\varepsilon \geq 0$.

5.3 Asymptotik von $\det R(\lambda)$

Wieder sei $X = M_{1,\infty} = M_1 \cup_Y Z$ Mannigfaltigkeit mit zylindrischem Ende und $R(\lambda)$ für $\lambda \geq 0$ der DtN-Operator zu $\Delta + \lambda$. In diesem Abschnitt soll das Verhalten $\det R(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0$ untersucht werden. Große Teile dieses Abschnittes sind auch in [MM] zu finden.

Sei $0 < \mu^2 < \mu_1$ und P_μ die Spektralprojektion von Δ auf $[0, \mu]$. Laut Satz 20 gilt

$$R(\lambda)^{-1} = r_Y \circ (\Delta + \lambda)^{-1} P_\mu(\cdot \otimes \delta_Y) + r_Y \circ (\Delta + \lambda)^{-1} (\text{Id} - P_\mu)(\cdot \otimes \delta_Y). \quad (25)$$

Zuerst wird der zweite Operator auf der rechten Seite untersucht. Sei

$$i_Y : L^2(Y, E|Y) \rightarrow H^{-1}(X, E)$$

die durch $i_Y(\varphi) = \varphi \otimes \delta_Y$, d.h.

$$i_Y(\varphi)(f) = \int_Y \langle \varphi, f \rangle, \quad f \in L^2(X, E)$$

definierte Abbildung. Dann ist i_Y stetig. Außerdem definiert die Einschränkungsbildung r_Y eine stetige Abbildung

$$r_Y : H^1(X, E) \rightarrow L^2(Y, E|Y).$$

Für $\lambda > 0$ ist auch die Resolvente $(\Delta + \lambda)^{-1} : H^{-1}(X, E) \rightarrow H^1(X, E)$ stetig. Somit erhalten wir eine stetige Abbildung

$$r_Y \circ (\Delta + \lambda)^{-1} (\text{Id} - P_\mu) \circ i_Y : L^2(Y, E|Y) \rightarrow L^2(Y, E|Y).$$

Lemma 25. *Es gibt $C > 0$, so dass*

$$\|r_Y \circ (\Delta + \lambda)^{-1} (\text{Id} - P_\mu) \circ i_Y\|_{L^2} \leq C$$

für alle $\lambda \geq 0$.

Beweis. Sei $\varphi \in H^{-1}(X, E)$. Dann ist $\|\varphi\|_{H^{-1}} = \|(\Delta + \text{Id})^{-1/2}\varphi\|_{L^2}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(\Delta + \lambda)^{-1}(\text{Id} - P_\mu)\varphi\|_{H^1} &= \|(\Delta + \text{Id})(\Delta + \lambda)^{-1}(\text{Id} - P_\mu)(\Delta + \text{Id})^{-1/2}\varphi\|_{L^2} \\ &\leq \|(\Delta + \text{Id})(\Delta + \lambda)^{-1}(\text{Id} - P_\mu)\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

Sei ϕ – ggf. verallgemeinerter – Eigenschnitt von Δ zum Eigenwert α . Dann ist

$$(\Delta + \text{Id})(\Delta + \lambda)^{-1}(\text{Id} - P_\mu)\phi = \frac{\alpha + 1}{\lambda + \alpha}\phi,$$

falls $\alpha > \mu$, andernfalls ist der Term auf der linken Seite 0. Im ersten Fall ist aber $\frac{\alpha+1}{\lambda+\alpha} < 1 + \frac{1}{\mu}$. Aus dem Spektralsatz folgt damit

$$\|(\Delta + \text{Id})(\text{Id} - P_\mu)(\Delta + \lambda)^{-1}\|_{L^2} \leq 1 + \frac{1}{\mu}$$

für $\lambda \geq 0$. Dies bedeutet

$$\|(\Delta + \lambda)^{-1}(\text{Id} - P_\mu)\|_{L(H^{-1}, H^1)} \leq 1 + \frac{1}{\mu}$$

für $\lambda \geq 0$. Weil i_Y und r_Y stetig sind, folgt das Lemma. \square

Es bleibt noch der erste Operator auf der rechten Seite von (25). Dies ist ein Glättungsoperator, dessen Kern $R(y_1, y_2, \lambda)$ wie folgt beschrieben werden kann. Sei $\{\varphi_j\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenschnitten von Δ mit Eigenwerten $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und sei ϕ_1, \dots, ϕ_m eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_Y$. Dann folgt aus der expliziten Beschreibung der Spektralzerlegung von Δ (siehe (18) auf Seite 22)

$$\begin{aligned} R(y_1, y_2, \lambda) &= \sum_{\lambda_j \leq \mu} (\lambda_j + \lambda)^{-1} \varphi_j(y_1) \otimes \varphi_j(y_2) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^\mu (s^2 + \lambda)^{-1} E(\phi_j, s, y_1) \otimes E(\phi_j, -s, y_2) ds. \end{aligned}$$

Nun wird das Verhalten dieses Kerns für $\lambda \rightarrow 0$ bestimmt. Das Verhalten der ersten Summe ist klar, es muss nur die zweite Summe untersucht werden.

Wegen Lemma 18 gibt es glatte Schnitte $\tilde{E}(s)$ von $E \boxtimes E$ über $X \times X$, die für $|s| < \mu$ holomorph sind, so dass

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m E(\phi_j, s, y_1) \otimes E(\phi_j, -s, y_2) &= \sum_{j=1}^m E(\phi_j, 0, y_1) \otimes E(\phi_j, 0, y_2) \\ &\quad + s^2 \tilde{E}(s, (y_1, y_2)), \quad |s| < \mu. \end{aligned} \tag{26}$$

Außerdem ist

$$\int_0^\mu \frac{ds}{s^2 + \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan\left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\mu} + O(\lambda)$$

für $\lambda \rightarrow 0$. Zusammen mit (26) erhalten wir so

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \int_0^\mu (s^2 + \lambda)^{-1} E(\phi_j, s, y_1) \otimes E(\phi_j, -s, y_2) ds \\ = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \sum_{j=1}^m E(\phi_j, 0, y_1) \otimes E(\phi_j, 0, y_2) + O(1) \end{aligned}$$

für $\lambda \rightarrow 0$.

Für das Weitere benötigen wir die Streumatrix $S(0)$ bei Energie 0. Sei wie in Kapitel 4.2

$$\ker \Delta_Y = V^+ \oplus V^-$$

die Zerlegung von $\ker \Delta_Y$ in die ± 1 -Eigenräume von $S(0)$. Sei ϕ_1, \dots, ϕ_l eine Orthonormalbasis von V^+ und sei $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta$. Wir definieren den Kern R_1 durch

$$R_1(y_1, y_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_1) \otimes \varphi_j(y_2) + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \sum_{j=1}^l E(\phi_j, 0, y_1) \otimes E(\phi_j, 0, y_2). \quad (27)$$

Sei $R_1(\lambda): L^2(Y, E|Y) \rightarrow L^2(Y, E|Y)$ der durch diesen Kern definierte Operator. Zusammen mit Lemma 20 erhalten wir

Satz 26. *Es gibt einen beschränkten Operator $R_2(\lambda): L^2(Y, E|Y) \rightarrow L^2(Y, E|Y)$, so dass*

$$R(\lambda)^{-1} = R_1(\lambda) + R_2(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

und $\|R_2(\lambda)\|$ gleichmäßig beschränkt ist für $\lambda \rightarrow 0$.

Sei $\mathcal{H} \subset C^\infty(X, E)$ der von $\ker \Delta$ und $E(\phi_1, 0), \dots, E(\phi_l, 0)$ aufgespannte Unterraum. Dann ist \mathcal{H} der Unterraum aller beschränkter Schnitte $\phi \in C^\infty(X, E)$, so dass $\Delta\phi = 0$. Setze

$$\mathcal{H}_Y = r_Y(\mathcal{H}).$$

Lemma 27. *Die Einschränkungsabbildung $r_Y: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_Y$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{H}$. Dann ist $\Delta\phi = 0$, und ϕ ist beschränkt. Sei $r_Y(\phi) = 0$. Das bedeutet $\phi \upharpoonright Y = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems folgt $\phi = 0$. Damit ist r_Y injektiv, also ein Isomorphismus. \square

Lemma 28. $\ker R = \mathcal{H}_Y$.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{H}_Y$. Dann gibt es wegen Lemma 27 ein eindeutiges $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\psi \upharpoonright Y = \varphi$. Außerdem ist ψ beschränkt, und $\Delta\psi = 0$. Damit ist ψ eine Lösung des Dirichletproblems (20). Weil ψ glatt auf X ist, folgt, dass $R\varphi = 0$.

Sei nun $\varphi \in \ker R$. Dann gibt es eine beschränkte Lösung $\psi \in C^\infty(X \setminus Y, E) \cap C^0(X, E)$ von (20) so dass

$$\frac{\partial}{\partial u}(\psi|_M) = \frac{\partial}{\partial u}(\psi|_Z).$$

Sei $\eta \in C_0^\infty(X)$ beliebig. Die Greenschen Formeln ergeben

$$\begin{aligned} - \int_M \langle \Delta \eta, \psi \rangle &= \int_M (\langle \eta, \Delta \psi \rangle - \langle \Delta \eta, \psi \rangle) = \int_Y \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial u} \eta, \psi \right\rangle - \left\langle \eta, \frac{\partial}{\partial u} \psi \right\rangle \right) \\ &= - \int_Z (\langle \eta, \Delta \psi \rangle - \langle \Delta \eta, \psi \rangle) = \int_Z \langle \Delta \eta, \psi \rangle, \end{aligned}$$

also

$$\int_X \langle \Delta \eta, \psi \rangle = 0.$$

Dies bedeutet $\Delta \psi = 0$ im Distributionensinn. Mit dem Regularitätssatz für elliptische Operatoren folgt $\psi \in C^\infty(X, E)$ und $\Delta \psi = 0$. Wird $\psi \upharpoonright Z$ in der Orthonormalbasis $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von $L^2(Y, E|Y)$ entwickelt, so erhalten wir

$$\psi(u, y) = \sum_{j=1}^d a_j \phi_j(y) + \sum_{j=d+1}^{\infty} a_j e^{-u\sqrt{\lambda_j}} \phi_j(y),$$

mit $d = \dim \ker \Delta_Y$. Sei $\phi = \sum_{j=1}^d a_j \phi_j$. Dann ist

$$\psi = \phi + \psi_1,$$

wobei $\psi_1 \in L^2(X, E)$. Das bedeutet aber $\psi \in \mathcal{H}$. □

Korollar 29. *Ist X kompakte Mannigfaltigkeit, so ist*

$$\ker R = r_Y(\ker \Delta_X)$$

Beweis. Ist $\phi \in \ker \Delta_X$, so folgt $R(\phi) = 0$ wie oben. Ist $\phi \in \ker R$, so folgt wie oben die Existenz eines glatten ψ mit

$$\Delta \psi = 0, \quad \psi|_Y = 0,$$

d.h. $\psi \in \ker \Delta$. □

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ das innere Produkt in \mathcal{H}_Y , das vom inneren Produkt in $L^2(Y, E|Y)$ induziert wird. Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta$. Sei $\psi_i = r_Y(\varphi_i)$, falls $1 \leq i \leq k$, und $\psi_{k+j} = \frac{1}{2} r_Y(E(\phi_j, 0))$, falls $1 \leq j \leq l$. Wir setzen $a_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle_Y$, $1 \leq i, j \leq k+l$ und definieren A als die $(k+l) \times (k+l)$ -Matrix mit Einträgen a_{ij} , $i, j = 1, \dots, k+l$.

Satz 30. *Sei $k = \dim \ker \Delta$ und $l = \dim V^+$. Dann gilt*

$$\log \det R(\lambda) = (k+l/2) \log \lambda - \log \det A + \log \det^* R + o(1)$$

für $\lambda \rightarrow 0+$.

Beweis. Der Beweis folgt dem Beweis von Theorem B in [Le2]. Seien

$$0 \leq \mu_1(\lambda) \leq \dots \leq \mu_{k+l}(\lambda) < \mu_{k+l+1}(\lambda) \leq \dots$$

die Eigenwerte von $R(\lambda)$. Aus Lemma 28 folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mu_j(\lambda) = 0 \quad \text{for } 1 \leq j \leq k+l,$$

und $\mu_j(\lambda) \geq c > 0$ für $j > k+l$. Dann gilt

$$\log \det R(\lambda) = \log(\mu_1(\lambda) \cdots \mu_{k+l}(\lambda)) + \log \det^* R + o(1) \quad (28)$$

für $\lambda \rightarrow 0$. Demnach bleibt das Verhalten von $\log(\mu_1(\lambda) \cdots \mu_{k+l}(\lambda))$ für $\lambda \rightarrow 0$ zu bestimmen. Sei $\eta_1(\lambda), \dots, \eta_{k+l}(\lambda)$ ein Orthonormalsystem von Eigenschnitten von $R(\lambda)$ zu den Eigenwerten $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_{k+l}(\lambda)$. Sei $1 \leq j \leq k+l$. Nach Satz 26 erhalten wir

$$\mu_i(\lambda)^{-1} \delta_{ij} = \langle R(\lambda)^{-1} \eta_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle = \langle R_1(\lambda) \eta_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle + \langle R_2(\lambda) \eta_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle,$$

und der zweite Term auf der rechten Seite bleibt beschränkt für $\lambda \rightarrow 0+$. Nach (27) ist der erste Term

$$\begin{aligned} \langle R_1(\lambda) \eta_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle &= \frac{1}{\lambda} \sum_{p=1}^k \langle \varphi_p, \eta_i(\lambda) \rangle_Y \langle \varphi_p, \eta_j(\lambda) \rangle_Y \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \sum_{q=1}^l \langle E(\phi_q, 0), \eta_i(\lambda) \rangle_Y \langle E(\phi_q, 0), \eta_j(\lambda) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (29)$$

Setze

$$\tilde{\psi}_i(\lambda) = \begin{cases} r_Y(\varphi_i), & \text{if } 1 \leq i \leq k, \\ \frac{\lambda^{1/4}}{2} r_Y(E(\phi_{i-k}, 0)), & \text{if } k+1 \leq i \leq k+l. \end{cases}$$

Sei $\tilde{a}_{ij}(\lambda) = \langle \tilde{\psi}_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle$ und sei $\tilde{A}(\lambda)$ die Matrix mit Einträgen $\tilde{a}_{ij}(\lambda)$, $1 \leq i, j \leq k+l$. Dann kann (29) geschrieben werden als

$$\langle R_1(\lambda) \eta_i(\lambda), \eta_j(\lambda) \rangle = \frac{1}{\lambda} (\tilde{A}(\lambda)^t \tilde{A}(\lambda))_{ij}$$

und wir erhalten

$$\mu_i(\lambda)^{-1} \delta_{ij} = \frac{1}{\lambda} (\tilde{A}(\lambda)^t \tilde{A}(\lambda))_{ij} + O(1)$$

für $\lambda \rightarrow 0+$. Nun ist aber $(\tilde{A}(\lambda)^t \tilde{A}(\lambda))_{ij}$ beschränkt für $\lambda \rightarrow 0+$. Also erhalten wir $(\tilde{A}(\lambda)^t \tilde{A}(\lambda))_{ij} = O(\lambda)$ für $i \neq j$ und $\lambda \rightarrow 0+$. Das bedeutet

$$(\mu_1(\lambda) \cdots \mu_{k+l}(\lambda))^{-1} = \lambda^{-(k+l)} \det(\tilde{A}(\lambda)^t \tilde{A}(\lambda)) (1 + O(\lambda)) \quad (30)$$

für $\lambda \rightarrow 0+$. Die Matrix $\tilde{A}(\lambda) \tilde{A}(\lambda)^t$ ist gerade die Matrix mit Einträgen $\langle \tilde{\psi}_i(\lambda), \tilde{\psi}_j(\lambda) \rangle$, $1 \leq i, j \leq k+l$. Setze

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & \lambda^{1/4} \text{Id}_l \end{pmatrix}.$$

Dann folgt aus der Definition von A , dass

$$\tilde{A}(\lambda) \tilde{A}(\lambda)^t = C(\lambda) \cdot A \cdot C(\lambda).$$

Zusammen mit (30) erhalten wir

$$(\mu_1(\lambda) \cdots \mu_{k+l}(\lambda))^{-1} = \lambda^{-(k+l/2)} \det A(1 + O(\lambda)).$$

Der Satz folgt hieraus durch Anwenden des Logarithmus und Einsetzen in (28). \square

Im Fall einer kompakten Mannigfaltigkeit X hat Δ kein stetiges Spektrum. Wie oben sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ definiert durch $a_{ij} = \langle r_Y(\varphi_i), r_Y(\varphi_j) \rangle_Y$ für eine Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ von $\ker \Delta$. Der Beweis des folgenden Korollars ist analog dem von Satz 30 mit $l = 0$.

Korollar 31.

$$\log \det R(\lambda) = \dim \ker \Delta \log \lambda - \log \det A + \log \det^* R + o(1)$$

für $\lambda \rightarrow 0+$.

6 Faktorisierungsformeln

6.1 Die Formel von Carron

Seien \mathcal{L} und \mathcal{L}_0 wie in Kapitel 5.1, S. 22 definiert. In [Car] beweist G. Carron folgenden Satz.

Satz 32 (Carron). *Es gibt ein Polynom P vom Grad kleiner $\frac{\dim M - 1}{2}$ mit reellen Koeffizienten, so dass*

$$\det(\mathcal{L} + \varepsilon, \mathcal{L}_0 + \varepsilon) = e^{P(\varepsilon)} \det R(\varepsilon). \quad (31)$$

Die Koeffizienten von P hängen nur von \mathcal{L} in einer Umgebung von Y ab.

Dies stellt eine Verallgemeinerung früherer Resultate für den Laplaceoperator auf Funktionen dar. In [BFK] betrachten Burghilea, Friedlander und Kappeler unter anderem den Fall einer kompakten Fläche und erhalten die Formel

$$\det(\Delta + \varepsilon, \Delta_B + \varepsilon) = \det R(\varepsilon);$$

das Polynom P aus Satz 32 hat hier Grad 0.

Die zweite Aussage des Satzes erlaubt, das Polynom aus Satz 32 explizit zu berechnen, falls M in der Nähe von Y Produktstruktur hat.

Korollar 33 (Carron). *Hat (X, g) in einer Umgebung von Y Produktstruktur und L die Form*

$$L = -\frac{d^2}{dt^2} + A,$$

so ist $P(\varepsilon) = -\log 2\zeta_A(0, \varepsilon)$. Insbesondere ist $P(\varepsilon) = 0$, falls $\dim M$ gerade ist.

Der Beweis dieses Korollars in [Car] verwendet die zweite Aussage in Satz 32, um die Berechnung auf den Fall $M = \mathbb{R} \times Y$ zurückzuführen. In diesem Fall sind die Wärmeleitungskerne von \mathcal{L} , \mathcal{L}_0 und A bekannt, und es gilt

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} e^{-tA} \implies \zeta(s, \varepsilon) = \frac{1}{2} \zeta_A(s, \varepsilon).$$

Folglich ist

$$\log \det(\mathcal{L} + \varepsilon, \mathcal{L}_0 + \varepsilon) = \frac{1}{2} \log \det(A + \varepsilon).$$

Eine direkte Rechnung (siehe (21)) ergibt

$$R(\varepsilon) = 2\sqrt{A + \varepsilon} \implies \log \det R(\varepsilon) = \frac{1}{2} \log \det(A + \varepsilon) + \log 2 \zeta_A(0, \varepsilon).$$

Vergleich mit der Carron-Formel (31) ergibt, zusammen mit Lemma 13 die Behauptung.

6.2 Allgemeiner Fall

In diesem Kapitel wird eine (31) für $\varepsilon = 0$ entsprechende Formel unter der Annahme bewiesen, dass X in einer Umgebung von Y Produktstruktur hat. Dabei wird wie in [HZ] vorgegangen.

Sei also $X = M_{1,\infty}$. Der Fall einer kompakten geschlossenen Mannigfaltigkeit X kann analog behandelt werden.

Das Korollar 33 ergibt in diesem Fall

$$\log \det(\Delta + \lambda, \Delta_B + \lambda) = -\log 2 \zeta_{\Delta_Y}(0, \lambda) + \log \det \Delta_{M_1, B} + \log \det R(\lambda), \quad (32)$$

wobei Δ_B Laplaceoperator auf dem Zylinderende mit Dirichletrandwerten bei $\{0\} \times Y$ ist.

Wie in Satz 30 gilt für $\lambda \rightarrow 0$

$$\log \det R(\lambda) = (k + l/2) \log \lambda - \log \det A + \log \det {}^*R + o(1) \quad (33)$$

mit $k = \dim \ker \Delta$ und $l = \dim V^+$.

Andererseits wurde in Lemma 17 die Formel

$$\log \det(\Delta + \lambda, \Delta_B + \lambda) = \log \det(\Delta, \Delta_B) + b_0 \log \lambda + o(1). \quad (34)$$

bewiesen. Wir werden zeigen, dass $b_0 = k + l/2$ gilt. Dann folgt durch Vergleich von (32), (33) und (34) im Grenzwert $\lambda \rightarrow 0$ der

Satz 34. *Es gilt*

$$\frac{\det(\Delta, \Delta_B)}{\det(\Delta_{M_1, B})} = 2^{-\zeta_Y^*(0) - h_Y} \frac{\det R}{\det A},$$

wobei $h_Y = \dim \ker \Delta_Y$ und $\zeta_Y^*(s)$ die Zetafunktion von Δ_Y ist.

Im Folgenden wird b_0 berechnet. Sei $\xi(\lambda)$ die spektrale Shift-Funktion von (Δ, Δ_B) [Mu1, S. 315ff]. Laut (2.16) in [Mu1] gilt

$$b_0 = -\xi(0+).$$

Für die Berechnung von b_0 genügt es also, die spektrale Shift-Funktion in der Nähe von 0 zu betrachten. Die spektrale Shift-Funktion ist eine reellwertige Funktion in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, die durch die beiden folgenden Eigenschaften eindeutig definiert ist:

1. $\xi(\lambda) = 0$ für alle $\lambda < 0$.
2. Für jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist $f(\Delta) - f(\Delta_B)$ Operator der Spurklasse und

$$\text{Tr}(f(\Delta) - f(\Delta_B)) = \int_{\mathbb{R}} f'(\lambda)\xi(\lambda) d\lambda.$$

Seien Δ_d und Δ_{ac} die Einschränkungen von Δ auf die in Kapitel 4.2 genannten Unterräume von $L^2(X, E)$, die dem Punkt- und absolutstetigen Spektrum von Δ entsprechen. Nach [Do], haben die Eigenwerte von Δ keinen endlichen Häufungswert. Also ist $f(\Delta_d)$ Operator der Spurklasse für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist auch $f(\Delta_{ac}) - f(\Delta_B)$ für jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ von Spurklasse. Sei $\xi_c(\lambda)$ die spektrale Shift-Funktion (Δ_{ac}, Δ_B) und sei $N(\lambda)$ die Zählfunktion der Eigenwerte von Δ , also

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_j \mid \lambda_j \leq \lambda\}.$$

Dann folgt aus den definierenden Eigenschaften der spektralen Shiftfunktion, dass

$$\xi(\lambda) = -N(\lambda) + \xi_c(\lambda). \quad (35)$$

Nun kann $\xi_c(\lambda)$ wie in Kapitel IX von [Mu3] bestimmt werden. In [Mu3] werden zwar keine Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Ende betrachtet. Die Struktur des stetigen Spektrums von Δ ist jedoch im dort behandelten Fall ähnlich, und alles in [Mu3] Gesagte kann mit geringfügigen Veränderungen auf diese Situation übertragen werden; die Rechnung wurde in [b0] ausgeführt.

Sei $\mu_1 > 0$ der kleinste positive Eigenwert von Δ_Y und

$$S(s): \ker \Delta_Y \rightarrow \ker \Delta_Y, \quad |s| < \sqrt{\mu_1},$$

die Streumatrix (Kapitel 4.2). Wie im Beweis von Theorem 9.25 aus [Mu3] folgt, dass

$$\xi_c(\lambda) = -\frac{1}{4}(\text{Tr}(S(0)) + \dim \ker \Delta_Y) + \frac{i}{2\pi} \int_0^\lambda \text{Tr}(S'(s)S(-s)) d\lambda$$

für $0 \leq \lambda < \sqrt{\mu_1}$. Also erhalten wir

$$\xi_c(0+) = -\frac{1}{4}(\text{Tr}(S(0)) + \dim \ker \Delta_Y).$$

Zusammen mit (35) erhalten wir

$$\xi(0+) = -\dim \ker \Delta - \frac{1}{4}(\text{Tr}(S(0)) + \dim \ker \Delta_Y).$$

Bekanntlich ist $S(0)^2 = \text{Id}$, also

$$\text{Tr}(S(0)) + \dim \ker \Delta_Y = 2 \dim \ker(S(0) - \text{Id}) = 2 \dim \ker V^+.$$

Es folgt $b_0 = -\xi(0+) = k + l/2$, und damit Satz 34.

7 Die regularisierte Determinante auf dem endlichen Zylinder

In diesem Kapitel wird die regularisierte Determinante von Δ mit Dirichletschen Randbedingungen auf $[-r, r] \times Y$ berechnet. Mit ihr wird später die Determinante von Δ_{M_r} im Limes $r \rightarrow \infty$ verglichen werden.

Lemma 35. *Sei*

$$\Delta = \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta_Y : C^\infty([-r, r] \times Y, E) \rightarrow C^\infty([-r, r] \times Y, E)$$

verallgemeinerter Laplaceoperator mit Dirichlet-Randwerten bei $\{\pm r\} \times Y$. Gegeben sei eine Orthonormalbasis von $L^2(Y, E)$ aus Eigenschnitten von Δ_Y mit zugehörigen Eigenwerten $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$,

$$0 = \mu_1 = \dots = \mu_{h_Y} < \mu_{h_Y+1} \leq \dots$$

Dann gilt

$$\det_\zeta(\Delta) = (4r)^{h_Y} (\det^* \Delta_Y)^{-\frac{1}{2}} e^{-r \varrho'_Y(0)} \cdot \prod_{m>h_Y}^\infty \left(1 - e^{-4r\sqrt{\mu_m}}\right) \quad (36)$$

mit

$$\varrho_Y(s) = \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}).$$

Beweis. Das Spektrum von Δ ist

$$\left\{ \mu_k + \left(\frac{\pi}{2r}\right)^2 n^2 \mid k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Also gilt für $\operatorname{Re}(s) \gg 0$

$$\begin{aligned} \zeta_\Delta(s) &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \left(\mu_m + \left(\frac{\pi}{2r}\right)^2 n^2 \right)^{-s} \\ &= \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-2s} \zeta_R(2s) \dim \ker \Delta_Y + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_m > 0}} \left(\mu_m + \left(\frac{\pi}{2r}\right)^2 n^2 \right)^{-s} \end{aligned}$$

Dabei ist ζ_R die Riemannsche ζ -Funktion. Es ist $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'_R(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$, also

$$-\frac{d}{ds} \left\{ \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-2s} \zeta_R(2s) \right\} \Big|_{s=0} = 2 \log 2 + \log r. \quad (37)$$

Sei nun

$$\zeta_Z(s) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \mu_m > 0}} \left(\mu_m + \left(\frac{\pi}{2r}\right)^2 n^2 \right)^{-s} \quad \operatorname{Re}(s) \gg 0.$$

Mit

$$a^{c-s}\Gamma(s-c) = \int_0^\infty e^{-at} t^{s-c} \frac{dt}{t} \quad (38)$$

und der Poisson-Summationsformel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-(\pi/2r)^2 n^2 t} = \frac{2r}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-4r^2 n^2 / t} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sqrt{\pi t}} - 1 \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta_Z(s) &= \sum_m \int_0^\infty \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\mu_m t} e^{-(\pi/2r)^2 n^2 t} t^{s-1} dt \\ &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\mu_m t} \left(\frac{2r}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-4r^2 n^2 / t} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sqrt{\pi t}} - 1 \right) \right) t^{s-1} dt \\ &= \frac{2r}{\sqrt{\pi}} \sum_{m,n} \int_0^\infty e^{-(\mu_m t + 4r^2 \frac{n^2}{t})} t^{s-3/2} dt + \frac{1}{2} \sum_m \int_0^\infty e^{-\mu_m t} \left(\frac{2r}{\sqrt{\pi t}} - 1 \right) t^{s-1} dt \\ &=: T(s) + U(s) \end{aligned}$$

In [La] werden für

$$K_s(a, b) := \int_0^\infty e^{-(a^2 t + b^2 / t)} t^{s-1} dt \quad \text{und} \quad K_s(c) := \int_0^\infty e^{-c(t+1/t)} t^{s-1} dt$$

die Beziehungen

$$K_s(c) = K_{-s}(c), \quad K_s(a, b) = \left(\frac{b}{a} \right)^s K_s(ab), \quad K_{\frac{1}{2}}(c) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-2c} \quad (39)$$

gezeigt, sowie folgende Abschätzung:

Sei $x_0 > 0$ und $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(x_0, \sigma_0, \sigma_1)$, so dass

$$K_\sigma(x) \leq C e^{-2x} \quad (40)$$

für alle $x \geq x_0$ gilt.

Mit diesen Bezeichnungen:

$$T(s) = \frac{2r}{\sqrt{\pi}} \sum_{m,n} K_{s-\frac{1}{2}}(\sqrt{\mu_m}, 2rn)$$

Mit (40) und einer unteren Abschätzung der μ_m kann gezeigt werden, dass $T(s)$ eine ganze Funktion in s , insbesondere holomorph in $s = 0$ ist. Wegen $K_{-\frac{1}{2}}(a, b) \stackrel{(39)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{-2ab}$ ist

$$T(0) = \frac{2r}{\sqrt{\pi}} \sum_{m,n} \frac{\sqrt{\pi}}{2rn} e^{-4r\sqrt{\mu_m}n} = - \sum_m \log \left(1 - e^{-4r\sqrt{\mu_m}} \right) \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
U(s) &\stackrel{(38)}{=} \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{2r}{\sqrt{\pi}} \mu_m^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(s - \frac{1}{2}) - \mu_m^{-s} \Gamma(s) \right) \\
&= \Gamma(s) \frac{r}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \Gamma(s) \zeta_Y^*(s)
\end{aligned}$$

wobei

$$\zeta_Y^*(s) := \sum_{\mu_m > 0} \mu_m^{-s}.$$

In einer Umgebung von 0 sind $\frac{1}{\Gamma(s)}$ und $\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)}$ analytisch,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(s)} &= s + \gamma s^2 + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} \right) s^3 + O(s^4) \\
\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} &= \Gamma(-\frac{1}{2}) s + a s^2 + O(s^3)
\end{aligned}$$

Es ist

$$\zeta_Z(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} (T(s) + U(s)) = (s + O(s^2)) T(s) + \frac{r}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}) \right) - \frac{1}{2} \zeta_Y^*(s) \quad (42)$$

Nun hat $\zeta_Y^*(s)$ bei $-\frac{1}{2}$ einen (möglicherweise hebbaren) einfachen Pol mit Residuum $\alpha_{-1} = \frac{a_{m+1}(\Delta_Y)}{\Gamma(-\frac{1}{2})}$, wobei $m = \dim Y$,

$$\zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}) = \frac{\alpha_{-1}}{s} + \alpha_0 + O(s)$$

also liefert (42) die analytische Fortsetzung von $\zeta_Z(s)$.

Folglich

$$\zeta_Z'(0) = T(0) + \frac{r}{\sqrt{\pi}} \left(a \alpha_{-1} + \Gamma(-\frac{1}{2}) \alpha_0 \right) - \frac{1}{2} (\zeta_Y^*)'(0). \quad (43)$$

Die Behauptung folgt schließlich aus (37), (41), (43) und

$$\det_\zeta(\Delta) = e^{-\zeta'_\Delta(0)} = (4r)^{\dim \ker \Delta_Y} \cdot e^{-\zeta'_Z(0)}.$$

□

8 Adiabatischer Limes

Ziel dieses Kapitels ist es, das asymptotische Verhalten von $\det^* \Delta_{M_r}$ für $r \rightarrow \infty$ zu beschreiben.

8.1 Allgemeine Zerlegungsformel

Wie in Abschnitt 4.1 sei Δ ein positiv semidefiniter Operator vom Laplacetyp. Auf M_r sei $R_{-r,r}(\varepsilon)$ für $\varepsilon \geq 0$ der Dirichlet-to-Neumann Operator von $\Delta + \varepsilon$ bezüglich der Untermannigfaltigkeit $\tilde{Y} = (\{-r\} \times Y) \cup (\{r\} \times Y)$. Hier hat der Rand von M_r zwei Zusammenhangskomponenten; alle benötigten Sätze gelten aber auch in dieser Situation. Das innere Produkt in $L^2(\tilde{Y}, E)$ ist durch

$$\left(\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right)_{L^2(\tilde{Y}, E)} = (\phi_1, \psi_1)_{L^2(Y, E)} + (\phi_2, \psi_2)_{L^2(Y, E)}$$

mit

$$\phi_1, \psi_1 \in L^2(\{-r\} \times Y, E), \quad \phi_2, \psi_2 \in L^2(\{r\} \times Y, E)$$

gegeben.

Außerdem sei $R_{i,\infty}(\varepsilon)$ für $\varepsilon \geq 0$ der Dirichlet-to-Neumann-Operator bezüglich $M_{i,\infty} = M_i \cup_Y (\mathbb{R}^+ \times Y)$. In Lemma 22 wurde die Formel

$$R_{i,\infty}(\varepsilon) = Q_i(\varepsilon) + \sqrt{\Delta_Y + \varepsilon}, \quad \varepsilon \geq 0, \quad i = 1, 2$$

bewiesen.

Für das Weitere nehmen wir an, dass $R_{i,\infty}$ nicht-negativ ist. Das folgende Lemma liefert hierfür ein hinreichendes Kriterium.

Lemma 36. *Sei*

$$\Delta = \nabla^* \nabla + B \quad \text{mit} \quad B \in C^\infty(X, \text{Sym}(E))$$

positiv semidefiniter Operator vom Laplacetyp. Ist $B \geq 0$, so sind die Dirichlet-to-Neumann-Operatoren $R_{i,\infty}(\varepsilon)$ $i = 1, 2$ nicht-negativ.

Beweis. Sei f in $C^\infty(Y)$ und $\phi \in C^\infty(M_1, E)$ mit $\Delta\phi = 0$ und $\phi|_Y = f$. Die Greenschen Formeln ergeben

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M_1} \langle \Delta\phi, \phi \rangle = \int_{M_1} \langle \nabla^{E*} \nabla^E \phi, \phi \rangle + \int_{M_1} \langle B\phi, \phi \rangle \\ &= \int_{M_1} \|\nabla^E \phi\|^2 - \int_Y \langle \partial_u \phi, \phi \rangle_Y + \int_{M_1} \langle B\phi, \phi \rangle, \end{aligned}$$

weshalb

$$\int_Y \langle Q_1 f, f \rangle_Y = \int_Y \langle \partial_u \phi, \phi \rangle_Y \geq \int_{M_1} \langle B\phi, \phi \rangle \geq 0.$$

Also ist $Q_i \geq 0$, und die Behauptung folgt. \square

Insbesondere sind $R_{i,\infty}$ für den Bochner-Laplace-Operator und den Laplace-Beltrami-Operator positiv semidefinit.

Sei wie in Kapitel 4.2 die Zerlegung $\ker \Delta_Y = V^+ \oplus V^-$ in ± 1 -Eigenräume von $S(0)$ gegeben.

Lemma 37. *Ist $Q_i \geq 0$, $i = 1, 2$, so folgt*

$$\ker_{L^2} \Delta_{M_{i,\infty}} = \{0\}, \quad \ker R_{i,\infty} = V^+$$

Beweis. Sei ϕ_1, \dots, ϕ_l eine Orthonormalbasis von V^+ , die zu einer Orthonormalbasis $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $L^2(Y, E)$ aus Eigenschnitten von Δ_Y ergänzt wird. In Lemma 28 wurde $\ker R_{i,\infty} = r_Y(\mathcal{H})$ gezeigt. Dabei ist \mathcal{H} der von $\ker \Delta_{M_{i,\infty}}$ und den verallgemeinerten Eigenschnitten $E(\phi_1, 0), \dots, E(\phi_l, 0)$ aufgespannte Unterraum von $C^\infty(M_{i,\infty}, E)$.

Wie im Beweis von Lemma 28 gezeigt, besitzt jede beschränkte Lösung ψ von $\Delta_{M_{i,\infty}} \psi = 0$, eingeschränkt auf den Zylinder $Z = \mathbb{R}^+ \times Y$ eine Zerlegung

$$\psi = \pi_2^* \phi + \psi_1, \quad \psi_1 \in L^2(Z, E), \quad \phi \in \ker \Delta_Y. \quad (44)$$

Wegen Lemma 36 ist $Q_i \geq 0$, also für $\eta \in \ker R_{i,\infty}$

$$0 \leq (\sqrt{\Delta_Y} \eta, \eta) \leq (Q_i \eta, \eta) + (\sqrt{\Delta_Y} \eta, \eta) = (R_{i,\infty} \eta, \eta) = 0$$

Damit gilt $\ker R_{i,\infty} \subset \ker \Delta_Y$, also $r_Y(\psi_1) = 0$ in (44). Dies bedeutet aber $\psi_1 = 0$. Damit gibt es keine nicht-trivialen L^2 -Lösungen von $\Delta_{M_{i,\infty}}$.

Dann wird aber \mathcal{H} schon von den verallgemeinerten Eigenschnitten bei 0 aufgespannt. Laut (16) auf Seite 21 gilt für $\phi \in V^+$

$$E(\phi, 0) = 2\phi + \psi_1, \quad \psi_1 \in L^2(M_{i,\infty}, E).$$

Auch hier ist $\psi_1 = 0$, und wir erhalten $\ker R_{i,\infty} = r_Y(\mathcal{H}) = V^+$, denn r_Y ist ein Isomorphismus. \square

In einer Umgebung von \tilde{Y} bzw. Y haben M_r und $M_{i,\infty}$ Produktstruktur. Deshalb besagt Korollar 33 (Carron)

$$\begin{aligned} \log \det (\Delta_{M_r} + \varepsilon, \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} + \varepsilon) &= -2 \log 2 \zeta_Y(0, \varepsilon) + \log \det R_{-r,r}(\varepsilon) \\ &\quad + \log \det (\Delta_{M_1, B} + \varepsilon) + \log \det (\Delta_{M_2, B} + \varepsilon) \end{aligned}$$

Dabei ist ζ_Y die Zetafunktion von $\Delta_Y + \varepsilon : C^\infty(Y, E|Y) \rightarrow C^\infty(Y, E|Y)$.

Da M_r kompakt ist, ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \log \det (\Delta_{M_r} + \varepsilon) &= \log \det (\Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} + \varepsilon) + \log \det (\Delta_{M_1, B} + \varepsilon) + \log \det (\Delta_{M_2, B} + \varepsilon) \\ &\quad - 2 \log 2 \zeta_Y(0, \varepsilon) + \log \det R_{-r,r}(\varepsilon). \quad (45) \end{aligned}$$

Zu einer Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ von $\ker \Delta_{M_r}$ sei $B_r = (b_{ij})_{i,j=1}^k$ definiert durch $b_{ij} = \langle r_{\tilde{Y}}(\varphi_i), r_{\tilde{Y}}(\varphi_j) \rangle_{\tilde{Y}}$. Nach Korollar 31 ist für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\log \det R_{-r,r}(\varepsilon) = -\log \det B_r + \log \det^* R_{-r,r}(0) + \dim \ker \Delta_{M_r} \log \varepsilon + o(1).$$

Lemma 14 ergibt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \log \det (\Delta_{M_r} + \varepsilon) - \dim \ker \Delta_{M_r} \log \varepsilon &\rightarrow \log \det^* \Delta_{M_r} \\ \zeta_Y(0, \varepsilon) &\rightarrow \zeta_Y(0) + \dim \ker \Delta_Y \end{aligned}$$

$\Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$ und $\Delta_{M_i, B}$ sind positiv, also gilt für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \log \det (\Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} + \varepsilon) &\rightarrow \log \det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} \\ \log \det (\Delta_{M_i, B} + \varepsilon) &\rightarrow \log \det \Delta_{M_i, B} \end{aligned}$$

In (45)

$$\begin{aligned} \log \det^* \Delta_{M_r} &= \log \det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} + \sum_{i=1}^2 \log \det \Delta_{M_i, B} - \log \det B_r \\ &\quad + \log \det^* R_{-r, r}(0) - 2 \log 2 (\zeta_Y^*(0) + \dim \ker \Delta_Y) \end{aligned} \quad (46)$$

Wie in Satz 30 werden Matrizen A_i durch die beschränkten C^∞ -Lösungen ψ von $\Delta_{i, \infty} \psi = 0$ auf der Mannigfaltigkeit mit zylindrischem Ende $M_{i, \infty}$ definiert. Sei $\Delta_{i, Z, B}$ die Einschränkung von $\Delta_{i, \infty}$ auf Z mit Dirichlet-Randbedingungen bei $\{0\} \times Y$. Dann besagt Satz 34 für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \log \det (\Delta_{i, \infty}, \Delta_{i, Z, B}) &= \log \det \Delta_{M_i, B} + \log \det^* R_{i, \infty}(0) - \log \det (A_i) \\ &\quad - \log 2 (\dim \ker \Delta_Y + \zeta_Y(0)), \end{aligned}$$

also mit (46)

$$\begin{aligned} \log \det^* \Delta_{M_r} &= \log \det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} - \log \det B_r + \log \det^* R_{-r, r} \\ &\quad + \sum_i (\log \det (\Delta_{i, \infty}, \Delta_{i, Z, B}) - \log \det^* R_{i, \infty} + \log \det A_i). \end{aligned} \quad (47)$$

Nun soll das Verhalten von (47) für $r \rightarrow \infty$ untersucht werden.

Für $R_{-r, r}$ wurde in Kapitel 5.2.2 die Formel

$$R_{-r, r} = \tilde{R} + K_r \quad (48)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{R} &:= \begin{pmatrix} Q_1 + \sqrt{\Delta_Y} & 0 \\ 0 & Q_2 + \sqrt{\Delta_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1, \infty} & 0 \\ 0 & R_{2, \infty} \end{pmatrix} \\ K_r &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{2r} P_{\ker \Delta_Y} + \frac{2\sqrt{\Delta_Y}}{e^{2\sqrt{\Delta_Y}r} - e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r}} P_{(\ker \Delta_Y)^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r} & -\text{id} \\ -\text{id} & e^{-2\sqrt{\Delta_Y}r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

hergeleitet. Dabei ist K_r von Spurklasse mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Tr}(K_r) = 0$ und \tilde{R} ist formal selbstadjungiert und wegen Lemma 36 nicht-negativ.

Um den „adiabatischen“ Limes $r \rightarrow \infty$ von (47) zu bestimmen, muss das asymptotische Verhalten von $\det B_r$ bekannt sein. Deshalb werden in den nächsten beiden Abschnitten nur zwei Spezialfälle behandelt, in denen $\ker \Delta_{M_r}$ und die beschränkten C^∞ -Lösungen von $\Delta_{i, \infty} \psi = 0$ explizit angegeben werden können. Wegen Lemma 27 sind dann auch B_r und A_i bekannt.

8.2 Invertierbarer tangentialer Operator

Sei Δ_Y invertierbar. Dann sind $R_{i,\infty} = Q_i + \sqrt{\Delta_Y}$ und $\Delta_{i,\infty}$ positiv. Insbesondere gibt es keine erweiterten Eigenschnitte von $\Delta_{i,\infty}$ und Satz 30 lautet in diesem Fall

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \log \det R_{i,\infty}(\lambda) = \log \det^* R_{i,\infty}(0) = \log \det R_{i,\infty}.$$

Natürlich ist auch $\Delta_{i,Z,B}$ – der Laplaceoperator $\Delta_{i,\infty}$, eingeschränkt auf $Z = \mathbb{R}^+ \times Y$ mit Dirichlet-Randwerten bei $\{0\} \times Y$ – positiv.

In [Le1, Lemma 4.6] wird gezeigt, dass es bei invertierbaren $R_{i,\infty}$, $i = 1, 2$, ein $r_0 > 0$ gibt, so dass Δ_{M_r} für $r > r_0$ invertierbar ist. Wegen Lemma 27 ist dann auch $R_{-r,r}$ für $r > r_0$ invertierbar. Das heißt aber, dass in (47) keine Matrizen-Terme auftreten, also für $r > r_0$

$$\begin{aligned} \log \det \Delta_{M_r} &= \log \det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} + \log \det R_{-r,r} \\ &\quad + \sum_i (\log \det (\Delta_{i,\infty}, \Delta_{i,Z,B}) - \log \det R_{i,\infty}). \end{aligned}$$

Es gilt das

Lemma 38.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \log \det R_{-r,r} = \log \det R_{1,\infty} + \log \det R_{2,\infty}$$

Beweis. Wir wenden Lemma 15 auf (48) an:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \log \det R_{-r,r} = \log \det (\tilde{R}) = \sum_i \log \det (Q_i + \sqrt{\Delta_Y}) = \sum_i \log \det R_{i,\infty}.$$

□

Insgesamt erhalten wir die Formel

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det \Delta_{M_r} - \log \det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}) = \sum_i \log \det (\Delta_{i,\infty}, \Delta_{i,Z,B}).$$

Dies kann mit Hilfe der relativen Determinante von Δ_{M_r} und $\Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$ wie folgt formuliert werden.

Satz 39. *Ist Δ_Y invertierbar, so gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \det(\Delta_{M_r}, \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}) = \det(\Delta_{1,\infty}, \Delta_{1,Z,B}) \det(\Delta_{2,\infty}, \Delta_{2,Z,B})$$

In Lemma 35 wurde $\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}$ berechnet. Hier ist $\dim \ker \Delta_Y = 0$, also $\det \Delta_Y = \det^* \Delta_Y$.

Korollar 40. *Ist Δ_Y invertierbar, so gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det \Delta_{M_r} + r \varrho'_Y(0)) = -\frac{1}{2} \log \det \Delta_Y + \sum_i \log \det (\Delta_{i,\infty}, \Delta_{i,Z,B})$$

mit

$$\varrho_Y(s) = \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} \zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}).$$

8.3 Determinante von Funktionen

Jetzt wird der Spezialfall des Laplace-Beltrami-Operators $\Delta = d^*d : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ auf den Funktionen betrachtet. In diesem Fall sind $\ker \Delta_{M_r}$, $\ker \Delta_Y$ und $\ker R_{i,\infty}$ jeweils der eindimensionale Raum der konstanten Funktionen auf M . Für $R_{i,\infty}$ folgt das aus Lemma 37, denn hier ist $\ker \Delta_Y = V^+$.

Lemma 41.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det^* R_{-r,r} + \log r) &= \log \det^* R_{1,\infty} + \log \det^* R_{2,\infty} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det B_r + \log r) &= \log \det A_1 + \log \det A_2 = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Beweis. Es ist $\ker \Delta_{M_r} = \mathbb{C}$. Die Orthonormalbasis von $\ker \Delta_{M_r}$ ist also $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{vol } M_r}}$. Damit ist aber

$$\begin{aligned} \ker R_{-r,r} &= r_{\tilde{Y}}(\ker \Delta_{M_r}) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ B_r &= \left(\|r_{\tilde{Y}}(\psi_1)\|_{L^2(\tilde{Y})}^2 \right) = \left(\frac{2 \text{vol } Y}{\text{vol } M_r} \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det B_r + \log r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \log \frac{2r \text{vol } Y}{\text{vol } M_r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \log \frac{2r \text{vol } Y}{2r \text{vol } Y + \text{vol } M_0} = 0.$$

Mit den Bezeichnungen aus Lemma 28 gilt $\ker R_{i,\infty} = r_Y(\mathcal{H}_i)$. Dabei ist $\mathcal{H}_i \subset C^\infty(M_{i,\infty}, E)$ der Raum aller beschränkter Lösungen ψ von $\Delta_{i,\infty}\psi = 0$. Auf $M_{i,\infty}$ ist aber $\ker_{L^2} \Delta = \{0\}$. Die Orthonormalbasis von $\ker \Delta_Y$ ist durch die konstante Funktion $\phi = \frac{1}{\sqrt{\text{vol } Y}}$ gegeben. Somit besitzt Δ auf $M_{i,\infty}$ nur einen verallgemeinerten Eigenschnitt $E(\phi, 0) = 2\phi$, und dieser bildet die Basis von $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}$. Folglich ist auch

$$\ker R_{i,\infty} = V^+ = \mathbb{C},$$

wobei V^+ wie in Lemma 37 der +1-Eigenraum von $S(0)$ ist. Die Matrizen A_i aus Satz 30 sind beide

$$A_i = \left(\|r_Y(\frac{1}{2}E(\phi, 0))\|_{L^2(Y)}^2 \right) = (1), \quad i = 1, 2$$

Damit ist (49) gezeigt.

Für das Weitere wird die Zerlegung $R_{-r,r} = \tilde{R} + K_r$ aus (48) betrachtet. Eingeschränkt auf $(\ker \Delta_Y)^2 \supseteq (V^+)^2 = \ker \tilde{R}$ ist

$$R_{-r,r} \upharpoonright (\ker \Delta_Y)^2 = K_r \upharpoonright (\ker \Delta_Y)^2 = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass $\ker \tilde{R} = \mathbb{C}^2$ in die orthogonale Summe $R_{-r,r}$ -invarianter Unterräume

$$\ker \tilde{R} = \ker R_{-r,r} \oplus \mathcal{W}, \quad \mathcal{W} := \mathbb{C} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zerfällt, denn

$$R_{-r,r} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = K_r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet für die regularisierte Determinante von $R_{-r,r}$

$$\det^*(R_{-r,r}) = \frac{1}{r} \det(R_{-r,r} \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp).$$

Nun sind aber alle Eigenwerte von $R_{-r,r} \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp$ für hinreichend große r durch eine positive Konstante nach unten beschränkt. Ist nämlich $\phi \in C^\infty(\tilde{Y}, E)$ beliebig und λ_1 der kleinste von 0 verschiedene Eigenwert von \tilde{R} , so gibt es ein $r_0 > 0$, so dass $(K_r \phi, \phi) < \lambda_1/2$ für alle $r > r_0$. Dann ist aber auch $((R_{-r,r} \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp) \phi, \phi) > \lambda_1/2$.

Außerdem gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Tr } K_r = 0$; deshalb kann Lemma 15 angewendet werden.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (\log \det^* R_{-r,r} + \log r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \log \det (R_{-r,r} \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \log \det ((\tilde{R} + K_r) \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp) \\ &= \log \det (\tilde{R} \upharpoonright (\ker \tilde{R})^\perp) = \log \det^* (\tilde{R}) \\ &= \sum_i \log \det^* (Q_i + \sqrt{\Delta_Y}) = \sum_i \log \det^* R_{i,\infty}. \end{aligned}$$

□

Dies in (47) eingesetzt ergibt

Satz 42. *Für den Laplace-Beltrami-Operator Δ gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\det^* \Delta_{M_r}}{\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r}} = \det(\Delta_{1,\infty}, \Delta_{1,Z,B}) \det(\Delta_{2,\infty}, \Delta_{2,Z,B})$$

Mit Bezeichnungen wie in Lemma 35 und $\dim \ker \Delta_Y = 1$ ergibt (36)

$$\det \Delta_{N_r, B_{-r}, B_r} = 4r (\det^* \Delta_Y)^{-\frac{1}{2}} e^{-r \varrho'_Y(0)} \prod_{m \in \mathbb{N}} (1 - e^{-4\sqrt{\mu_m} r}).$$

So folgt schließlich das

Korollar 43. *Für den Laplace-Beltrami-Operator Δ gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \det^* \Delta_{M_r} \cdot \frac{e^{r \varrho'_Y(0)}}{r} = \frac{4}{\sqrt{\det^* \Delta_Y}} \det(\Delta_{1,\infty}, \Delta_{1,Z,B}) \det(\Delta_{2,\infty}, \Delta_{2,Z,B}), \quad (50)$$

wobei

$$\varrho_Y(s) = \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} \zeta_Y^*(s - \frac{1}{2}).$$

8.4 Zwei Beispiele

Die *Dedekindsche* η -Funktion ist definiert als

$$\eta(\tau) = q_\tau^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n), \quad \text{wobei } q_\tau = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{Im}(\tau) > 0$$

In [Aty] weist M. Atiyah darauf hin, dass die Dedekindsche η -Funktion aufgrund ihrer Definition als unendliches Produkt als Determinante eines Differentialoperators aufgefaßt werden kann. Mit Hilfe von 36 kann ein solcher Operator angegeben werden.

Ist $Y = S^1$ und $\Delta = d^*d$ der Laplace-Operator auf $C^\infty([-r, r] \times S^1)$ mit Dirichlet-Randwerten, so sind die Eigenwerte μ_m von Δ_Y gegeben durch $\mu_m = m^2, m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere lautet die Zetafunktion von Δ_Y

$$\zeta_Y(s) = \sum_{m \neq 0} m^{-2s} = 2\zeta_R(2s).$$

Hier ist also $\zeta_Y(s - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{6} + O(s)$, also mit Bezeichnungen wie im Beweis von Lemma 35:

$$\zeta'_Z(0) \stackrel{(43)}{=} T(0) + \frac{r}{\sqrt{\pi}} \Gamma(-\frac{1}{2}) (-\frac{1}{6}) - 2\zeta'_R(0) = T(0) + r/3 + \log(2\pi)$$

Mit Dirichlet-Randwerten bei $\{\pm r\} \times Y$ besagt Lemma 35

$$\det(\Delta_{[-r,r] \times S^1}) = 4r \frac{1}{2\pi} e^{-r/3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-4rn})^2 = \frac{2r}{\pi} \eta^2\left(\frac{2r}{\pi}i\right)$$

Die Determinante auf dem Zylinder $[-r, r] \times Y$ stellt nach Satz 42 den dominanten Teil im Limes $r \rightarrow \infty$ von $\det^* \Delta_{M_r}$ dar. Sei M kompakte Fläche mit eingebetteter, zu S^1 isometrischer Hyperfläche Y . Sei $\Delta = d^*d$ der Laplace-Beltrami Operator. Dann ist

$$\det^* \Delta_{M_r} \sim \frac{2r}{\pi} \eta^2\left(\frac{2r}{\pi}i\right) \det(\Delta_{1,\infty}, \Delta_{1,B}) \det(\Delta_{2,\infty}, \Delta_{2,B}) \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

In [BB] betrachten J.-M. Bismut und J.-B. Bost den Fall einer Fläche

$$M_L = M_1 \cup_Y (Y \times [0, L]) \cup_Y M_2 \quad \text{mit } Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Sie erhalten die Asymptotik

$$\det^* M_L \sim c L e^{-\pi L/3} \quad \text{für } L \rightarrow \infty.$$

Die Konstante c kann jetzt aus Formel (50) wie folgt berechnet werden. Es ist mit der Riemannschen Zetafunktion ζ_R

$$\zeta_Y(s) := \zeta_{\Delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}}(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (4\pi^2 n^2)^{-s} = (2\pi)^{-2s} 2\zeta_R(2s).$$

Bekanntlich gilt

$$\zeta_R(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta_R(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'_R(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Insbesondere ist $\zeta_Y(s)$ bei $-\frac{1}{2}$ analytisch und

$$\varrho'_Y(0) = -\frac{\pi}{3} \frac{d}{ds} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}\pi.$$

Auch die Determinante von Δ_Y kann explizit berechnet werden:

$$\det^* \Delta_Y = e^{-\zeta'_Y(0)} = 2\pi.$$

Dies in Formel (50) eingesetzt ergibt für $L \rightarrow \infty$

$$\det^* M_L \sim L e^{-\pi L/3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \det(\Delta_{1,\infty}, \Delta_{1,B}) \det(\Delta_{2,\infty}, \Delta_{2,B}).$$

Die gesuchte Konstante ist also im Wesentlichen durch die relativen Determinanten gegeben.

Literatur

- [Aty] M. Atiyah, *The Logarithm of the Dedekind η -Function*, Math. Annalen **278** (1987), 335–380
- [APS] M. F. Atiyah, V. K. Patodi und I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69
- [BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer 1992
- [BB] J.-M. Bismut, J.-B. Bost, *Fibres determinants, metriques de Quillen et degenerescence des courbes*, Acta Math. **165** (1990), 1–103
- [BFK] D. Burghelea, L. Friedlander und T. Kappeler, *Meyer-Vietoris Type Formula for Determinants of Elliptic Differential Operators*, J. Funct. Analysis **107** (1992), 34–65
- [Car] G. Carron, *Déterminant relatif et la fonction Ξ* , Amer. J. Math. **124** (2002), no 2, 307–352
- [Ch] P. R. Chernoff, *Essential Self-Adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations*, J. Funct. Analysis **12** (1973), 401–414
- [Do] H. Donnelly, *Eigenvalue estimates for certain noncompact manifolds*, Michigan Math. J. **31** (1984), 349–357
- [Ev] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS 1998
- [Fo] R. Forman, *Functional determinants and geometry*, Invent. Math. **88** (1987), 447–493
- [Gi] P. Gilkey, *Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah-Singer Index Theorem*, Publish or Perish 1984
- [Gui] L. Guillopé, *Théorie spectrale de quelques variétés à bouts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 137–160
- [Haw] S. W. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 133–148
- [HZ] A. Hassell und S. Zelditch, *Determinants of Laplacians in Exterior Domains*, Intern. Math. Res. Notices 1999, No. 18
- [La] S. Lang, *Elliptic Functions*, Addison-Wesley 1973
- [Lz] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer, 1985
- [LM] H. B. Lawson und M.L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989

- [Le1] Y. Lee, *Burghelea-Friedlander-Kappeler's Gluing Formula for the Zeta-Determinant and its Applications to the Adiabatic Decompositions of the Zeta-Determinant and the Analytic Torsion*, Preprint [arXiv:math.DG/030425](https://arxiv.org/abs/math/030425)
- [Le2] Y. Lee, *Mayer-Vietoris formula for the determinant of a Laplace operator on an even-dimensional manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1933–1940
- [MP] S. Minakshisundaram, A. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math **1** (1949), 242–256
- [MM] J. Müller und W. Müller, *Decomposition of Determinants of Laplace Type Operators*, unveröffentlicht
- [Mu1] W. Müller, *Relative Zeta Functions, Relative Determinants and Scattering Theory*, Commun. Math. Phys. **192** (1998), 309–347
- [Mu2] W. Müller, *L^2 -index and resonances*, In: “Geometry and Analysis on Manifolds”, LNM 1339, Springer-Verlag, 1988, 203–211
- [Mu3] W. Müller, *Manifolds with cusps of rank one*, Lecture Notes in Math. **1244**, Springer-Verlag, 1987
- [Mu4] W. Müller, *Eta invariants and manifolds with boundary*, J. Differential Geom. **40** (1994), 311–377
- [b0] W. Müller, Private Korrespondenz, Januar 2004
- [PW1] J. Park und K. P. Wojciechowski, *Adiabatic Decomposition of the ζ -Determinant of the Dirac Laplacian I: The Case of an Invertible Tangential Operator*, Comm. in Partial Diff. Equations **27** (2002), 1407–1435
- [PW2] J. Park und K. P. Wojciechowski, *Adiabatic Decomposition of the ζ -Determinant and Scattering theory*, MPI preprint, [DG/0111046](https://arxiv.org/abs/math/0111046), 2001
- [PW3] J. Park und K. P. Wojciechowski, *Adiabatic Decomposition of the ζ -Determinant and Dirichlet to Neumann Operator*, Preprint, [DG/0301170](https://arxiv.org/abs/math/0301170), 2003
- [RS] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 2: Fourier Analysis and Self-Adjointness*, London: Academic Press 1975
- [Se] R. T. Seeley, *Complex Powers of an Elliptic Operator*, Proc. Symp. Pure Math 1967, 288–307
- [Ta] M. Taylor, *Partial Differential Equations I*, Springer