PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 19. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 0

(Besprechung in der Übung am 22. April 2016)

Aufgabe 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Mit $C^0_B(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen und auf Ω beschränkten Funktionen. Wir definieren

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad f \in C_B(\Omega).$$

(a) Zeigen Sie, $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_{C^0_B})$ ist ein Banachraum.

(b) Ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ heißt *Multiindex*. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $p \in \mathbb{N}$. Für $f \in C^p(\Omega)$ setzen wir

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n}}(x), \quad x \in \Omega.$$

Mit $C^p_B(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $f \in C^0_B(\Omega)$ mit $D^\alpha f \in C^0_B(\Omega)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ mit $|\alpha| \le p$ (Hier: $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$). Wir definieren

$$\|f\|_{C^p_B} = \sup_{|\alpha|\le p} \|D^\alpha f\|_{C^0_B}, \quad f \in C^p_B(\Omega).$$

Zeigen Sie, $(C^p(\Omega), \|\cdot\|_{C^p_B})$ ist ein Banchraum.

(c) Sei Ω beschränkt. Wir definieren

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| dx, \quad f \in C^0_B(\Omega).$$

Ist $(C^0_B(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ? (Begründung !).

Aufgabe 2 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt präkompakt, falls für all $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset M$ existiert, so dass

$$\bigcup_{i=1}^m K(x_i, \varepsilon) \supset M.$$

Hierbei bezeichne $K(x, \varepsilon)$ die offene Kugel $\{y \in X \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$. Die Menge $\{x_1, \ldots, x_m\}$ heißt auch *endliches ε-Netz*.

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $X \subset Y$. Wir sagen X ist in Y *kompakt eingebettet*, falls $\{x \in X \mid \|x\|_X \le 1\}$ in Y präkompakt ist.

Sei Ω beschränkt und konvex. Zeigen Sie, dass $C^1_B(\Omega)$ kompakt in $C^0_B(\Omega)$ eingebettet ist.