PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/$\sim$ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

19. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 1

(Besprechung in der Übung am 29. April 2016)

Aufgabe 1 Sei $g : (a,b) \to Y$. Wir sagen g ist *differenzierbar in* $t \in (a,b)$, falls ein $g'(t) \in Y$ existiert, so dass

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \to f'(t) \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Sei $f : [a,b] \to Y$ steig. Wir definieren $g : [a,b] \to Y$ durch das Riemann-Integral

$$g(t) = \int\limits_a^t f(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Zeigen Sie, dass g in jedem Punkt $t \in (a,b)$ differenzierbar ist. Ferner zeigen Sie, dass

$$g'(t) = f(t) \quad \forall\, t \in (a,b).$$

Aufgabe 2

Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Untersuchen Sie $F : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x,x)}$ auf Fréchet-Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Man betrachte $C^0(I)$, versehen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. In welchen Punkten $u \in C^0(I)$ ist $F(u) := \|u\|_\infty$ Gâteaux-differenzierbar?

Aufgabe 4

Man betrachte die Abbildung $F : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definiert durch

$$F(u)(t) := \sin(u(t)), \quad u \in L^2(0,1), \quad t \in (0,1).$$

(a) Zeigen Sie, dass F auf $L^2(0,1)$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass F auf $L^2(0,1)$ Gâteaux-differenzierbar ist und berechnen Sie $d_G F(u,h)$ für $u, h \in L^2(0,1)$.

(c) Zeigen Sie, dass F in $u_0 = 0$ nicht Fréchet-differenzierbar ist.