PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 01. Juli 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 10

(Besprechung in der Übung am 08. Juli 2016)

Aufgabe 1 Sei X ein Banachraum und $F : X \to X'$ Gâteaux-differenzierbar.
Zeigen Sie: F ist genau dann monoton, wenn

$$\langle d_G F(x_1)x_2, x_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Aufgabe 2 Sei X ein Banachraum. Wir nehmen an, für jedes $x \in X$ existiert genau ein $x^* = J(x) \in X'$, so dass $\|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 = \langle x^*, x\rangle$. Die Abbildung $J : X \to X'$ heißt Dualitätsabbildung.

(a) Zeigen Sie: J ist monoton, koerziv, demistetig.

(b) Wir nehmen an die Abbidung $F : x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$ ist Gâteaux-differenziebar in $x \in X$ mit $d_G(x) \in X'$. Zeigen Sie, dass dann $J(x) = d_G(x)$.

(c) Bestimmen Sie J für $X = L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$.

Aufgabe 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $1 < p < \infty$. Ferner sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ beschränkt. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int\limits_\Omega f(u) v dx = 0 \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bemerkung: Die Funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Aufgabe 4 Sei X ein reflexiver, separabler Banachraum. Sei $A : X \to X'$ pseudomonoton und beschränkt sowie $B : X \to X'$ kompakt und schwach $*$-stetig, das heißt

$$x_k \rightharpoonup x \;\; in \;\; X \quad für \;\; k \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad B(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} B(x) \;\; in \quad X' \quad für \;\; k \to +\infty.$$

Zeigen Sie: Ist ferner $A + B$ koerziv, so ist $A + B$ surjektiv .

Lösungen Blatt 10

Aufgabe 1: $\Rightarrow$ Seien $x_1, x_2 \in X$. Aus F monoton, folgt

$$\langle F(x_1 + tx_2) - F(x_1), tx_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, t > 0.$$

Dividiert man beide Seiten durch t^2, so ergibt sich

$$\langle \frac{1}{t} F(x_1 + tx_2) - F(x_1), x_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, t > 0.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus $t \to 0$, da

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} F(x_1 + tx_2) - F(x_1) \;=\; d_G F(x_1)x_2.$$

$\Leftarrow$ Seien $x_1, x_2 \in X$. Da F Gâteaux-differenzierbar ist, ist $\varphi(t) = F(x_2 + t(x_1 - x_2))$ in $(0, 1)$ differenzierbar mit

$$\varphi'(t) \;=\; d_G F(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2).$$

Nach dem HSdIDR folgt

$$F(x_1) - F(x_2) \;=\; \varphi(1) - \varphi(0) \;=\; \int_0^1 \varphi(t)dt \;=\; \int_0^1 d_G F(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)dt.$$

Nach Voraussetzung haben wir

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle = \int_0^1 \langle d_G F(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle dt \geq 0.$$

Aufgabe 2: a) 1) Seien $x_1, x_2 \in X$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\langle J(x_1) - J(x_2), x_1 - x_2\rangle \;&=\; \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \langle J(x_1), x_2\rangle - \langle J(x_2), x_1\rangle \\
&\geq\; \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \|J(x_1)\|\|x_2\| - \|J(x_2)\|\|x_1\| \\
&=\; \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2\| \;=\; (\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Somit ist J monoton.

2) J ist koerziv, denn

$$\frac{\langle J(x), x\rangle}{\|x\|} \;=\; \|x\| \to +\infty \quad \text{für} \quad \|x\| \to +\infty.$$

3) Sei $x_n \to x$. Dann ist $\{x_n\}$ in X beschränkt. Somit existiert eine Teilfolge $\{x_{n_j}\}$ und ein $f \in X'$, so dass

$$J(x_{n_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Aus der Definition von J folgt

$$\|J(x_{k_j})\|^2 = \|x_{k_j}\|^2 = \langle J(x_{k_j}), x_{k_j}\rangle \to \langle f, x\rangle = \|x\|^2.$$

Auf der andern Seite haben wir für $y \in X$

$$\langle f, y\rangle \;=\; \lim_{j\to\infty} \langle J(x_{k_j}), y\rangle \;\leq\; \lim_{j\to\infty} \|x_{k_j}\|\|y\| \;=\; \|x\|\|y\|.$$

Also $\|f\|^2 \;\leq\; \|x\|^2 \;\leq\; \|x\|\|f\|$, was $\|x\| = \|f\|$ impliziert und mithin $f = J(x)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes haben wir

$$J(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} J(x) \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

b) Wir setzen $F(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2$. Wir berechnen

$$\langle d_G F(x), h\rangle \;=\; \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|^2 - \|x\|^2}{t} \in X'.$$

Für $h = x$ erhält man

$$\langle d_G F(x), x\rangle \;=\; \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\|x+tx\|^2 - \|x\|^2}{t} \;=\; \frac{\|x\|^2}{2} \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2 - t^2}{t} \;=\; \|x\|^2.$$

Dies impliziert

$$\langle d_G F(x), x\rangle \;=\; \|x\|^2 \;\leq\; \|d_G F(x)\|^2.$$

Auf der anderen Seite erhält man unter Verwendung der Dreiecksungleichung:

$$\|x+th\|^2 - \|x\|^2 = (\|x+th\| - \|x\|)(\|x+th\| + \|x\|) \;\leq\; t\|h\|(\|x+th\| + \|x\|).$$

Dies impliziert

$$\langle d_G F(x), h\rangle \;\leq\; \frac{\|h\|}{2} \lim_{t\to 0} (\|x+th\| + \|x\|) \;=\; \|x\|\|h\|.$$

Folglich ist $\|d_G F(x)\| \;\leq\; \|x\|$, also $d_G F(x) = J(x)$.

c) Wir definieren

$$F(u) \;=\; \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^p(\Omega)} \;=\; \frac{1}{2}\Bigg(\int_\Omega |u|^p dx\Bigg)^{2/p}, \quad u \in L^p(\Omega).$$

Unter Verwendung der Kettenregel findet man

$$\langle d_G F(u), h\rangle \;=\; \int_\Omega |u|^{p-2} u h dx \Bigg(\int_\Omega |u|^p dx\Bigg)^{(2-p)/p} \;=\; \|u\|^{2-p}_{L^p} \int_\Omega |u|^{p-2} u h dx.$$

Aufgabe 3: Wir setzen $X := W^{1,p}_0(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p}$. Wir definieren

$$\langle F(u), v\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx \;+\; \int_\Omega f(u) v dx, \quad u, v \in X.$$

Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung findet man

$$|\langle F(u), v\rangle| \;\leq\; \|u\|\|v\| \;+\; c\|v\|_{L^1} \;\leq\; (\|u\| + c)\|v\|.$$

Dies zeigt, dass $F : X \to X'$ beschränkt ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass F pseudomonoton ist. Sei also $u_k \rightharpoonup u$ in X mit $\limsup_{k\to\infty}\langle F(u_k), u_k - u\rangle \le 0$. Wir setzen

$$\langle F_1(u), v\rangle \;=\; \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \langle F_2(u), v\rangle \;=\; \int\limits_\Omega f(u)v dx, \quad v \in X.$$

Aufgrund der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$ haben wir

$$u_k \to u \quad \text{in} \quad L^1(\Omega) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Dies impliziert

$$\langle F_2 u_k, u_k - u\rangle \to 0, \quad \limsup_{k\to\infty}\langle F_1(u_k), u_k - u\rangle \le 0.$$

Wie wir unten zeigen werden ist F_1 monoton und stetig. Also ist nach 8.9 F_1 auch pseudomonoton. Folglich

$$\langle F_1(u), u - v\rangle \;\le\; \liminf_{k\to\infty}\langle F_1(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Beachtet man außerdem

$$\langle F_2(u), u - v\rangle \;=\; \lim_{k\to\infty}\langle F_2(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X,$$

so folgt

$$\langle F(u), u - v\rangle \;\le\; \liminf_{k\to\infty}\langle F(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X,$$

was bedeutet, dass F pseudomonoton ist.

F_1 *ist monoton*: Wir definieren

$$H(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist

$$\langle F_1(u), v\rangle \;=\; \int\limits_\Omega H(\nabla u) \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in X.$$

Wir berechnen

$$\partial_j H_i(\xi) \;=\; |\xi|^{p-2}\delta_{ij} \;+\; (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j$$

Also

$$DH(\xi)\eta \;=\; \|\xi\|^{p-2}\eta \;+\; (p-2)\|\xi\|^{p-4}(\xi,\eta)\xi$$

und hiermit

$$(DH(\xi)\eta,\eta) \;=\; \|\xi\|^{p-2}|\eta|^2 \;+\; (p-2)\|\xi\|^{p-4}(\xi,\eta)^2.$$

Falls $p \ge 2$ so folgt sofort $(DH(\xi)\eta,\eta) \;=\; \|\xi\|^{p-2}|\eta|^2$. Falls $p < 2$, so folgt

$$(DH(\xi)\eta,\eta) \;\ge\; \|\xi\|^{p-2}|\eta|^2 \;-\; (2-p)\|\xi\|^{p-4}|\xi|^2|\eta|^2 \;=\; (p-1)\|\xi\|^{p-2}|\eta|^2.$$

Hiermit bekommt man

$$\langle d_G F_1(u)v, v\rangle \;=\; \int\limits_\Omega (DH(\nabla u)\nabla v\cdot, \nabla v)dx \ge \min\{p-1, 1\} \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla v|^2 dx \ge 0.$$

Gemäß A.1 haben wir

$$\langle F_1(u) - F_1(v), u - v\rangle \geq 0 \quad \forall\, u, v \in X.$$

∎

Aufgabe 4: Sei $x_k \rightharpoonup x$ in X. Insbesondere ist (x_k) beschränkt. Da B kompakt, existiert eine Teilfolge (x_{k_j}) und ein $f \in X'$, so dass

$$B(x_{k_j}) \to f \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Auf der andern Seite haben wir

$$B(x_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} B(x) \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Also ist $f = B(x)$ und

$$B(x_k) \to B(x) \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Wir nehmen an, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \langle (A+B)(x_k), x_k - x\rangle \leq 0.$$

Dann

$$\langle B(u_k), u_k - u\rangle \;=\; \langle B(u_k) - B(u), u_k - u\rangle \;+\; \langle B(u), u_k - u\rangle \to 0.$$

Also

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A(x_k), x_k - x\rangle \leq 0.$$

Da A pseudomonoton ist, folgt

$$\langle A(u), u - v\rangle \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \langle A(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\langle B(u_k), u_k - v\rangle \;=\; \langle B(u_k) - B(u), u_k - v\rangle + \langle B(u), u_k - v\rangle \to \langle B(u), u - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Folglich gilt

$$\langle (A+B)(u), u - v\rangle \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \langle (A+B)(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Also ist $A + B$ pseudomonoton. Da außerdem $A + B$ beschränkt und koerziv ist, ergibt sich die Behauptung nach Satz 8.10. ∎