PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

08. Juli 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 11

(Besprechung in der Übung am 15. Juli 2016)

Aufgabe 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 Gebiet. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion, so dass für alle $(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$|f(x, u, \xi)| \leq c_1(1 + |\xi|^{\frac{n}{n+2}}), \quad f(x, u, \xi)u \leq g(x)$$

$(c_1 > 0, g \in L^2(\Omega))$. Zeigen Sie die Existenz einer schwachen Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ des Problems

$$-\Delta u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Hinweis: Man löse zunächst das obige Problem mit $f_\varepsilon(x, u, \xi) = \frac{f(x,u,\xi)}{1+\varepsilon|\xi|}, \varepsilon > 0$ anstelle von f und führe anschließend den Grenzübergang $\varepsilon \to 0^+$ aus.

Aufgabe 2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, 2 \leq n \leq 4$, ein beschränktes C^1 Gebiet. Wir definieren $X = H^1_{0,\sigma}(\Omega) = \{u \in H^1_0(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\}$. Sei $F : X \to X'$ definiert durch

$$\langle F(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla v - u \otimes u : \nabla v dx, \quad u, v \in X.$$

Zeigen Sie, dass F koerziv, beschränkt und pseudomonoton ist. Schließen Sie hieraus, dass für jedes $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n^2})$ die stationären Navier-Stokes Gleichungen

$$\text{(NSG)} \qquad -\Delta u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \operatorname{div} f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

eine schwache Lösung $u \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ hat.

Aufgabe 3* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n > 4$, ein beschränktes C^1 Gebiet. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ eine schwache Lösung $u \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ von (NSG) existiert. Hierbei heißt $u \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ schwache Lösung von (NSG), falls für alle $v \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $\operatorname{div} v = 0$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v - u \otimes u : \nabla v dx = -\int_\Omega f : \nabla v dx.$$