PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`
19. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 1

(Besprechung in der Übung am 29. April 2016)

Aufgabe 1 Sei $g : (a, b) \to Y$. Wir sagen g ist *differenzierbar in* $t \in (a, b)$, falls ein $g'(t) \in Y$ existiert, so dass

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \to f'(t) \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad h \to 0.$$

Sei $f : [a, b] \to Y$ steig. Wir definieren $g : [a, b] \to Y$ durch das Riemann-Integral

$$g(t) = \int\limits_a^t f(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass g in jedem Punkt $t \in (a, b)$ differenzierbar ist. Ferner zeigen Sie, dass

$$g'(t) = f(t) \quad \forall\, t \in (a, b).$$

Aufgabe 2
Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum. Untersuchen Sie $F : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ auf Fréchet-Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Man betrachte $C^0(I)$, versehen mit der Maximumnorm $\| \cdot \|_\infty$. In welchen Punkten $u \in C^0(I)$ ist $F(u) := \|u\|_\infty$ Gâteaux-differenzierbar?

Aufgabe 4
Man betrachte die Abbildung $F : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ definiert durch

$$F(u)(t) := \sin(u(t)), \quad u \in L^2(0, 1), \quad t \in (0, 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass F auf $L^2(0, 1)$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass F auf $L^2(0, 1)$ Gâteaux-differenzierbar ist und berechnen Sie $d_G F(u, h)$ für $u, h \in L^2(0, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass F in $u_0 = 0$ nicht Fréchet-differenzierbar ist.

Lösungen Blatt 1

Aufgabe 1: Sei $t \in (a,b)$. Für $0 < h < b-t$ findet man

$$g(t+h) - g(t) = \int_a^{t+h} f(s)ds - \int_a^{t} f(s)ds = \int_t^{t+h} f(s)ds$$

Hiermit bekommt man unter Verwendung von Lemma 2.2 und der Stetigkeit von f

$$\left\| \frac{g(t+h)-g(t)}{h} - f(t) \right\| = \frac{1}{h} \left\| \int_t^{t+h} f(s) - f(t) ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\| ds \leq \varepsilon$$

falls $h < \delta$ für $\delta > 0$ hinreichend klein. Eine analoge Aussage beweist man für $a - t < h < 0$.

Aufgabe 2: Seien $x_0, h \in X$. Wir betrachten die Abbildung $G : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $G(x) = \|x\|^2$. Sei $x \in X \setminus \{0\}$. Dann gilt für $h \in X$

$$G(x_0 + h) - G(x_0) - 2(x_0, h) \;=\; (x_0 + h, x_0 + h) - (x_0, x_0) - 2(x_0, h) \;=\; \|h\|^2 = o(h).$$

Folglich ist G in x_0 Fréchet-differenzierbar mit $DG(x_0)h = 2(x_0, h)$. Nun gilt $F(x) = W(G(x))$ $(x \in X)$, wobei

$$W(t) = \sqrt{t}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Die Funktion W ist in $(0, +\infty)$ Fréchet-differenzierbar mit

$$DW(t)s \;=\; W'(t)s \;=\; \frac{s}{2\sqrt{t}}, \quad t \in (0, +\infty), s \in \mathbb{R}.$$

Nach Lemma 3.4 (Kettenregel) ergibt sich, dass F in x_0 Fréchet-differenzierbar ist , und es gilt

$$DF(x_0)h \;=\; DW(G(x_0))(DF(x_0)h) \;=\; \frac{(x_0, h)}{\sqrt{\|x_0\|}}, \quad h \in X.$$

F ist in $x_0 = 0$ nicht Fréchet-differenzierbar. Angenommen F ist in 0 Fréchet-differenzierbar. Dann gilt für $h \in X \setminus \{0\}$

$$\frac{\|th\| - DF(0)(th)}{\|th\|} \;=\; 1 - \frac{DF(0)h}{\|h\|} \to 0 \quad \text{as} \quad t \to 0.$$

Dies würde $DF(0)h = \|h\|$ implizieren. Da diese Abbildung nichtlinear ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe 3 F ist Gâteaux-differenzierbar in u genau dann, wenn es existiert genau ein $x_0 \in I$ mit $|u(x_0)| = \|u\|_\infty$.

$\Rightarrow$ Wir nehmen an, es existieren $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, so dass $|u(x_0)| = |u(x_1)| = \|u\|_\infty$. Wir nehmen an, dass $u(x_0) > 0$. Dann existiert $0 < \delta < |x_1 - x_0|$, so dass $u(x) > 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Nun sei $h \in C^0(I)$ mit $0 \leq h \leq 1$ in I, $h(x_0) = 1$ und

$h(x) = 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| \geq \delta$. Insbesondere ist $h(x_1) = 0$. Sei $t > 0$ beliebig. Dann haben wir $\|u + th\|_\infty \;=\; u(x_0) + t = \|u\|_\infty + t$. Hieraus folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|u + th\|_\infty - \|u\|_\infty}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Als nächstes sei $t < 0$. Dann haben wir $\|u + th\|_\infty \;=\; |u(x_1)| = \|u\|_\infty$. Dies liefert

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|u + th\|_\infty - \|u\|_\infty}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Folglich ist F in u nicht Gâteaux-differenzierbar.
Falls, $u \equiv 0$, so wäre

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|u + th\|_\infty - \|u\|_\infty}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{|t|\|h\|_\infty}{t} = \pm 1.$$

Also ebenfalls nicht Gâteaux-differenzierbar. Folglch ist die Annahme falsch.

$\Leftarrow$ Sei $u \in C^0(I)$ mit $|u(x_0)| = \|u\|_\infty$ für genau ein $x_0 \in I$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $u(x_0) > 0$. Sei $h \in C^0(I)$ beliebig. Offensichtlich haben wir für $t \in \mathbb{R}$

$$\|u + th\|_\infty \geq u(x_0) + th(x_0) \;=\; \|u\|_\infty + th(x_0).$$

Folglich gilt

$$\frac{\|u + th\|_\infty - \|u\|_\infty}{t} \geq \frac{\|u\|_\infty + th(x_0) - \|u\|_\infty}{t} = h(x_0).$$

Da $u + th$ stetig ist existiert ein $x(t) \in I$, so dass $|u(x(t)) + th(x(t))| = \|u + th\|_\infty$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass $|u(x(t)) + th(x(t))| = u(x(t)) + th(x(t))$ für alle $|t| < \delta$, denn sonst gäbe es ein $x_1 \in I$ mit $u(x_1) = -\|u\|_\infty$. Für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \delta$ findet man

$$\frac{\|u + th\|_\infty - \|u\|_\infty}{t} \;=\; \frac{u(x(t)) + th(x(t)) - \|u\|_\infty}{t} \leq h(x(t)).$$

Nun gilt aber $x(t) \to x_0$ für $t \to 0$, denn sonst gäbe es eine Folge $t_m \to 0$ mit $x(t_m) \to x_1 \neq x_0$ und $u(x_1) \;=\; \lim_{m\to\infty} u(x(t_m)) + t_m h(x(t_m)) \;=\; \lim_{m\to\infty} \|u + t_m h\|_\infty \;=\; \|u\|_\infty$, was jedoch der Voraussetzung widerspricht. Dies zeigt, dass F in u Gâteaux-differenzierbar ist mit

$$d_G F(u, h) \;=\; h(x_0), \quad h \in C^0(I).$$

Da $d_G F \in \mathscr{L}(C^0(I), \mathbb{R})$, ist F Fréchet-differenzierbar.

Aufgabe 4 (a) Seien $u, v \in L^2(0, 1)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\|F(u) - F(v)\|_{L^2}^2 \;&=\; \int_0^1 (\sin(u(t)) - \sin(v(t)))^2 dt \\ &\leq\; \int_0^1 (u(t) - v(t))^2 dt \;=\; \|u - v\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

(b) Seien $u, h \in L^2(0,1)$. Für $v \in L^2(0,1)$. Unter Verwendung der Taylorformel bekommt man

$$\sin(u(t) + \varepsilon h(t)) = \sin(u(t)) + \int_0^1 \varepsilon h(t) \cos(u(t) + \varepsilon \tau h(t)) d\tau \quad \text{f.f.a. } t \in (0,1).$$

Hiermit findet man

$$\frac{F(u + \varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} = h \int_0^1 \cos(u + \varepsilon \tau h) d\tau \to h \cos(u) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0.$$

Folglich gilt

$$d_G F(u,h) = h \cos(u), \quad u, h \in L^2(0,1)$$

(c) Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir $h_m \in L^2(0,1)$ durch

$$h_m(t) = mt \quad \text{für} \quad t \in \Big(0, \frac{1}{m}\Big), \quad h_m(t) = 0 \quad t \in \Big(\frac{1}{m}, 1\Big).$$

Wie man leicht prüft gilt

$$\|h_m\|_{L^2}^2 = m^2 \int_0^{1/m} t^2 dt = \frac{1}{3m} \to 0 \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\begin{aligned}
\|F(h_m) - F(0) - d_G F(0, h_m)\|_{L^2}^2 &= \|\sin(h_m) - h_m)\|_{L^2}^2 \\
&= \int_0^{1/m} (\sin(mt) - mt)^2 dt = \frac{1}{m} \int_0^1 (\sin x - x)^2 dx = \frac{c_0}{m}
\end{aligned}$$

mit $c_0 > 0$. Dies zeigt, dass

$$\frac{\|F(h_m) - F(0) - d_G F(0, h_m)\|_{L^2}}{\|h_m\|_{L^2}} = \sqrt{3c_0} \not\to 0$$

für $m \to +\infty$. Somit ist F in $u = 0$ nicht Fréchet-differenzierbar.