PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

06. April 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 3

(Besprechung in der Übung am 13. Mai 2016)

Aufgabe 1
Sei $X = W_0^{1,2}((0,2))$. Wir definieren das Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) = \int_0^2 (u'(t))^2 dt + \int_0^2 u(t) dt, \quad u \in X.$$

(a) Zeigen Sie, das $F \in C^\infty(X)$ und bestimmen Sie $D^k F$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Untersuchen Sie F auf lokale und globale Extrema und bestimmen Sie diese gegebenfalls.

Aufgabe 2
Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathscr{L}(X,X)$ mit $\|T\| < 1$ gilt: $I + T \in ISO(X,X)$, so dass

$$(I+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^k.$$

Schließen Sie hieraus, dass $ISO(X,X)$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,X)$ ist.

Aufgabe 3
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 17 \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein $\delta > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\Phi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$F(t,\Phi(t)) = 0 \quad \forall\, t \in (-\delta,\delta), \quad \Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_2(0) = 2.$$

Ferner berechne man die Ableitung $\Phi' : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass F keine isolierte Nullstelle besitzt.