PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/$\sim$ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

13. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 4

(Besprechung in der Übung am 20. Mai 2016)

Aufgabe 1 Seien X, Y Banachräume. Wir definieren $F : ISO(X,Y) \to ISO(Y,X)$ durch

$$F(T) = T^{-1}, \quad T \in ISO(X,Y).$$

Zeigen Sie, dass $T \in C^2(ISO(X,Y); ISO(Y,X))$ und berechnen Sie jeweils die erste und zweite Fréchet-Ableitung von F.

Aufgabe 2 (a) Sei $f \in C^0([0,1])$ mit $f(0) \neq 0$ und $f(1) \neq 0$. Wir definieren

$$\deg(f) \;=\; \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(f(1)) - \mathrm{sign}(f(0))).$$

Man zeige die Existenz einer Folge von Polynomen (p_n) mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(\{0\})$, so dass $p_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$ für $n \to +\infty$. Man zeige:

$$\sum_{\substack{x\in(0,1)\\ p_n(x)=0}} \mathrm{sign}(p_n'(x)) \to \deg(f) \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

(b) Sei $f \in C^0([0,1])$ und sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{f(0), f(1)\}$. Man zeige, dass

$$\deg(f,(0,1),y) \;=\; \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(f(1)-y) - \mathrm{sign}(f(0)-y)).$$

Hinweis zu (b): Man benutze eine geeignete Homotopie.

Aufgabe 3 Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} > 0$ für alle $i,j = 1,\dots,n$. Zeigen Sie, dass A einen positiven Eigenwert mit einem zugehörigen positiven Eigenvektor besitzt, d.h. es existiert ein $\lambda > 0$ und $x^* \in \mathbb{R}^n, x_j^* > 0\,(j = 1,\dots,n)$, so dass $Ax^* = \lambda x^*$.
Hinweis: Betrachten Sie $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j > 0, j = 1,\dots,n, \sum\limits_{j=1}^n x_j = 1\}$, sowie $f : B \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) := \frac{Ax}{\sum\limits_{j=1}^n (Ax)_j}.$$