PD Dr. J. Wolf
**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 13. Mai 2016

# Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
# Übungsblatt 4

(Besprechung in der Übung am 20. Mai 2016)

**Aufgabe 1** Seien $X, Y$ Banachräume. Wir definieren $F : ISO(X,Y) \to ISO(Y,X)$ durch

$$F(T) = T^{-1}, \quad T \in ISO(X,Y).$$

Zeigen Sie, dass $T \in C^2(ISO(X,Y); ISO(Y,X))$ und berechnen Sie jeweils die erste und zweite Fréchet-Ableitung von $F$.

**Aufgabe 2** (a) Sei $f \in C^0([0,1])$ mit $f(0) \neq 0$ und $f(1) \neq 0$. Wir definieren

$$\deg(f) \ = \ \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(f(1)) - \mathrm{sign}(f(0))).$$

Man zeige die Existenz einer Folge von Polynomen $(p_n)$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(\{0\})$, so dass $p_n \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$ für $n \to +\infty$ . Man zeige:

$$\sum_{\substack{x \in (0,1) \\ p_n(x)=0}} \mathrm{sign}(p_n'(x)) \to \deg(f) \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

(b) Sei $f \in C^0([0,1])$ und sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{f(0), f(1)\}$. Man zeige, dass

$$\deg(f, (0,1), y) \ = \ \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(f(1) - y) - \mathrm{sign}(f(0) - y)).$$

*Hinweis zu (b)*: Man benutze eine geeignete Homotopie.

**Aufgabe 3** Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} > 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $A$ einen positiven Eigenwert mit einem zugehörigen positiven Eigenvektor besitzt, d.h. es existiert ein $\lambda > 0$ und $x^* \in \mathbb{R}^n, x_j^* > 0\,(j = 1, \ldots, n)$, so dass $Ax^* = \lambda x^*$.
*Hinweis*: Betrachten Sie $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j > 0, j = 1, \ldots, n, \sum\limits_{j=1}^n x_j = 1\}$, sowie $f : B \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) := \frac{Ax}{\sum\limits_{j=1}^n (Ax)_j}.$$

## Lösungen Blatt 4

**Aufgabe 2**: (a) Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{|f(0)|, |f(1)|\}$. Nach de Satz von Weierstrass existiert ein Polynom $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Ferner sei $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ mit $\varepsilon' \not\in \{p(w_1), \ldots, p(w_m)\}$), wobei $\{w_1, \ldots, w_m\} = (p')^{-1}(\{0\})$. Wir setzen $\tilde{p} = p + \varepsilon'$. Dann gilt

$$\tilde{p}'(x) = p'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \tilde{p}^{-1}(0).$$

Denn aus $\tilde{p}'(x) = 0$ folgt $p'(x) = 0$, also $x = w_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $p(w_i) = \varepsilon'$, was aber der Voraussetzung widerspricht. Ferner sieht man

$$\operatorname{sign}(f(0)) \;=\; \operatorname{sign}(\tilde{p}(0)), \quad \operatorname{sign}(f(1)) \;=\; \operatorname{sign}(\tilde{p}(1)).$$

Falls $f(0) < 0$, so haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{p}(0) \;&=\; p(0) + \varepsilon' = \; f(0) + (p(0) - f(0)) + \varepsilon' \\ &\leq f(0) + |p(0) - f(0)| + \varepsilon' < f(0) + |f(0)| = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{p}'(x) \neq 0$ für alle $x \in \tilde{p}^{-1}(\{0\})$, hat $\tilde{p}$ nur einfache Nulstellen $\{x_1, \ldots, x_N\}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_1)) \;&=\; -\operatorname{sign}(f(0)), \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_2)) \\ &=\; \operatorname{sign}(f(0)), \ldots, \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_i)) \;=\; (-1)^i \operatorname{sign}(f(0)), \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir

$$\operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_N)) \;=\; (-1)^N \operatorname{sign}(f(0)) \;=\; \operatorname{sign}(f(1)).$$

Dies zeigt, dass

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_i)) \;=\; \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \operatorname{sign}(f(0)).$$

Falls $\operatorname{sign}(f(0)) \;=\; \operatorname{sign}(f(1))$, so $N = 2k$, also $\sum\limits_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_i)) = 0$. Falls $\operatorname{sign}(f(0)) \neq \operatorname{sign}(f(1))$, so $N = 2k - 1$, also $\sum\limits_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_i)) = -\operatorname{sign}(f(0)) \;=\; \operatorname{sign}(f(1))$. Also

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\tilde{p}'(x_i)) \;=\; \frac{\operatorname{sign}(f(1)) - \operatorname{sign}(f(0))}{2}.$$

(b) Wegen (d1) können wir OBdA $y = 0$ annehmen. Wir definieren $g \in C^0([0,1])$, durch $g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ und definieren die Homotopie $H \in C^0([0,1] \times [0,1])$ durch

$$H(x,t) \;=\; (1-t)g(x) + tf(x), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1].$$

Wie man leicht sieht gilt $H(0,t) = f(0) \neq 0$ und $H(1,t) = f(1) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Folglich haben wir

$$\deg(f, (0,1), 0) = \deg(H(\cdot, t), (0,1), 0) \;=\; \deg(g, (0,1), 0).$$

Hat $g$ eine Nullstelle, so folgt gemäß 6.24

$$\begin{aligned}\deg(g,(0,1),0) &= \deg(((f(1)-f(0))x,(0,1),f(0)) \\ &= \operatorname{sign}(f(1)-f(0)) = \frac{\operatorname{sign}(f(1))-\operatorname{sign}(f(0))}{2}.\end{aligned}$$

Hat $g$ keine Nullstellen, so folgt nach (d5)

$$\deg(g,(0,1),0) = 0 = \frac{\operatorname{sign}(f(1))-\operatorname{sign}(f(0))}{2}.$$

**Aufgabe 3**: Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine $n\times n$-Matrix mit $a_{ij} > 0$ für alle $i,j = 1,\ldots,n$. Setzen $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j > 0, j = 1,\ldots,n, \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$ und definieren $f : B \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) := \frac{Ax}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j}.$$

Offensichtlich ist $B$ abgeschlossen und konvex. Außerdem gilt $f(x) \in B$, denn

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(Ax)_i}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j} = 1$$

und $f_i(x) = \frac{(Ax)_i}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j} > 0 \;\; \forall\, i = 1,\ldots,n$. Nach dem Browerschen Fixpunktsatz existiert ein $x_* \in B$, so dass $f(x_*) = x_*$. Folglich haben wir

$$Ax_* = \sum_{j=1}^n (Ax_*)_j x_*.$$

Da $x_* \neq 0$ ist $\lambda = \sum_{j=1}^n (Ax_*)_j$ ein positiver Eigenwert von $A$. Außerdem haben wir

$$x_{*,i} = f_i(x_*) = \frac{(Ax_*)_i}{\lambda} > 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n.$$