PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

27. Mai 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 6

(Besprechung in der Übung am 3. Juni 2016)

Aufgabe 1

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, das heißt, $V \subset U$ is offen und relativ abgeschlossen, genau dann wenn $V = U$. Zeigen Sie, dass für alle $x_0, x_1 \in U$ ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to U$ existiert, so dass $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$.

(b) Sei $Gl_+(n;\mathbb{R}) = \{\boldsymbol{A} \in Gl(n;\mathbb{R}) \,|\, \det \boldsymbol{A} > 0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\boldsymbol{A} \in Gl_+(n;\mathbb{R})$ ein stetiger Weg $\boldsymbol{H} : [0,1] \to Gl(n;\mathbb{R})$ existiert, so dass $\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{E}_n$. Hierbei bezeichne $\boldsymbol{E}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Aufgabe 2 Sei $X = \ell_2 = \left\{ (x_n) \,\middle|\, \|x\|_{\ell^2}^2 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$ und $B := \{x \in X \,|\, \|x\|_{\ell^2} \le 1\}$. Sei $F : B \to X$ definiert durch

$$F(x) := \left(\sqrt{1 - \|x\|_{\ell^2}^2}, x_1, x_2, \dots \right), \quad x \in B.$$

Zeigen Sie, dass F stetig ist und $F(B) \subset B$ erfüllt ist, aber dass F keinen Fixpunkt hat.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$u(t) = \frac{1}{3}\Big(t + u(t)^2 + \int\limits_0^1 \sqrt{|u(s) - s|}\, ds \Big), \quad t \in [0,1]$$

mindestens eine Lösung $u \in C^0([0,1])$ mit $0 \le u(t) \le 1, t \in [0,1]$ besitzt.

Lösungen Blatt 6

Aufgabe 1: (b) Siehe Skript Seite 39 ff.

Aufgabe 3: Wir definieren $M = \{w \in C^0(I) \,|\, 0 \leq w \leq \frac{9}{4}\}$ und setzen

$$F(w) = \frac{9}{4} - t - \int_0^1 \sqrt{\left|\sqrt{w} + s - \frac{3}{2}\right|} ds.$$

Wie man leicht sieht, ist $F : M \to M$ stetig mit $F(M)$ ist relativ kompakt in M. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz existiert ein $w \in M$ mit $F(w) = w$. Wir definieren $u(t) = \frac{3}{2} - \sqrt{w(t)}$. Dann folgt $w(t) = u^2(t) - 3u(t) + \frac{9}{4}$. Hiermit ergibt sich

$$u^2(t) - 3u(t) = -t - \int_0^1 \sqrt{|s - u(s)|} ds \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{1}{3}\Big(t + u + \int_0^1 \sqrt{|u(s) - 2|} ds\Big).$$