PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

03. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 7

(Besprechung in der Übung am 10. Juni 2016)

Aufgabe 1

(a) Für $x \in S^n$ ist $H_x := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (z,x) = x_{n+1}\}$ die zu x senkrechte affine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Nordpol von S^n, $H_x^+ := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (z,x) \geq x_{n+1}\}$ der durch H_x bestimmte Halbraum mit $x \in H_x^+$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt. Zeigen Sie, daß $\lambda^n(\{y \in A \,|\, (y,0) \in H_x^+\})$ stetig von $x \in S^n$ abhängt.

(b) ("Ham-Sandwich-Theorem") Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, von endlichem Maß. Man zeige: Es gibt eine $(n-1)$-dimensionale affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die alle Mengen in zwei Teile gleichen Volumens teilt. (Hinweis: Man benutze den Satz von Borsuk.)

Aufgabe 2 (Zwischenwertsatz von Miranda)

Q bezeichne den n-dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Sei $f \in C^0(Q;\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit

$$f_i(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x_i = 0, \quad f_i(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann f mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3 (Peano)

Sei $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige, es existiert ein $0 < t_0 \leq T$ und eine Funktion $x \in C^1([0,t_0))$ mit

$$x' = f(t,x) \quad \text{in} \quad (0,t_0) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0.$$