PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 03. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 7

(Besprechung in der Übung am 10. Juni 2016)

Aufgabe 1

(a) Für $x \in S^n$ ist $H_x := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (z,x) = x_{n+1}\}$ die zu x senkrechte affine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Nordpol von S^n, $H_x^+ := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, (z,x) \geq x_{n+1}\}$ der durch H_x bestimmte Halbraum mit $x \in H_x^+$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt. Zeigen Sie, daß $\lambda^n(\{y \in A \,|\, (y,0) \in H_x^+\})$ stetig von $x \in S^n$ abhängt.

(b) ("Ham-Sandwich-Theorem") Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, von endlichem Maß. Man zeige: Es gibt eine $(n-1)$-dimensionale affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die alle Mengen in zwei Teile gleichen Volumens teilt. (Hinweis: Man benutze den Satz von Borsuk.)

Aufgabe 2 (Zwischenwertsatz von Miranda)

Q bezeichne den n-dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Sei $f \in C^0(Q; \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit

$$f_i(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x_i = 0, \quad f_i(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass dann f mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3 (Peano)

Sei $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige, es existiert ein $0 < t_0 \leq T$ und eine Funktion $x \in C^1([0,t_0))$ mit

$$x' = f(t,x) \quad \text{in} \quad (0,t_0) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0.$$

Lösungen Blatt 7

Aufgabe 1: (a) Wir definieren

$$M_x^+ := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, (y,0) \in H_x^+\}.$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) \;=\; \lambda^n(\{y \in A \,|\, (y,0) \in H_x^+\}) = \lambda^n(A \cap M_x^+), \quad x \in S^n.$$

Sei $x \in S^n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $R > 0$, so dass $\lambda^n(A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen $\widetilde{M_x^+} = M_x^+ \cap B_R(0)$ und $\widetilde{A} = A \cap B_R(0)$. Wir erhalten

$$f(x) \;=\; \lambda^n((A \setminus \widetilde{A}) \cap M_x^+) + \lambda^n((A \cap \widetilde{M_x^+})$$

Nun sei $x' \in S^n$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\lambda^n(A \cap \widetilde{M_x^+}) \;&=\; \lambda^n(A \cap \widetilde{M_x^+} \cap \widetilde{M_{x'}^+}) + \lambda^n(A \cap (\widetilde{M_x^+} \setminus \widetilde{M_{x'}^+})),\\
\lambda^n(A \cap \widetilde{M_{x'}^+}) \;&=\; \lambda^n(A \cap \widetilde{M_x^+} \cap \widetilde{M_{x'}^+}) + \lambda^n(A \cap (\widetilde{M_{x'}^+} \setminus \widetilde{M_x^+})).
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$|\lambda^n(A \cap \widetilde{M_x^+}) - \lambda^n(A \cap \widetilde{M_{x'}^+})| \;\leq\; \lambda^n(A \cap (\widetilde{M_x^+} \setminus \widetilde{M_{x'}^+})) \;\leq\; \lambda^n(\widetilde{M_x^+} \setminus \widetilde{M_{x'}^+})$$

Wegen $\lambda^n(\widetilde{M_x^+} \setminus \widetilde{M_{x'}^+}) \to 0$ für $x' \to x$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\lambda^n(A \cap \widetilde{M_x^+}) - \lambda^n(A \cap \widetilde{M_{x'}^+})| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x' \in B_\delta(x).$$

Somit $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ für alle $x' \in B_\delta(x)$, was die Stetigkeit beweist.

(b) **Hilfssatz** *Sei $\boldsymbol{f} : S^n \to \mathbb{R}^n$ eine ungerade stetige Funktion. Dann hat $\boldsymbol{f}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis Wir nehmen an $\boldsymbol{f} \neq 0$ auf S^n. Wir definieren $H : \overline{B_1(0)} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch.

$$H(x,t) \;=\; \begin{cases} (|x| f_1(x/|x|), \ldots, |f_n(x/|x|)|, t) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ (0, \ldots, 0, t) & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dann ist H stetig. Nach Annahme ist $H(x,t) \neq 0$ für alle $(x,t) \in S^n \times [0,1]$. Folglich gilt

$$\deg(H(\cdot,0), \overline{B_1(0)}, 0) \;=\; \deg(H(\cdot,1), \overline{B_1(0)}, 0).$$

Da nach Voraussetzung $H(\cdot,0)$ ungerade ist, folgt nach dem Satz von Borsuk, dass $\deg(H(\cdot,0), \overline{B_1(0)}, 0)$ eine ungerade Zahl ist, was aber ein Widerspruch zu

$$\deg(H(\cdot,1), \overline{B_1(0)}, 0) = 0$$

ist, da $H(\cdot,1) \neq 0$ auf $\overline{B_1(0)}$ ist. Folglich ist die Annahme falsch und die Behauptung bewiesen. ∎

Seien $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ messbar mit endlichem Maß. Wir definieren

$$f_i(x) \;=\; \lambda_n(A \cap M_x^+) - \lambda_n(A \cap M_{-x}^+), \quad x \in S^n, i = 1, \ldots, n$$

Dann ist $\boldsymbol{f} : S^n \to \mathbb{R}^n$ eine ungerade, stetig Funktion. Nach dem Hilfssatz existiert ein $x \in S^n$, so dass $\boldsymbol{f}(x) = 0$. Also gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\lambda_n(A \cap M_x^+) \;=\; \lambda_n(A \cap M_{-x}^+)$$

Außerdem haben wir $A = (A \cap M_x^+) \cup (A \cup M_{-x}^+)$ und $\lambda^n(M_x^+ \cap M_{-x}^+) = 0$. Hieraus folgt die Behauptung mit der affinen Hyperebene $H = M_x^+ \cap M_{-x}^+$.

Aufgabe 3: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Da f, stetig ist gilt

$$C_0 := \sup_{t \in [0,T] \times [-2|x_0|, 2|x_0|]} < +\infty.$$

Sei $0 < t_0 < \min\left\{\frac{|x_0|}{C_0}, T\right\}$. Wir definieren den Operator $F : C^0([0, t_0]) \to C^0([0, t_0])$ gemäß

$$F(x)(t) \;=\; x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds, \quad t \in [0, t_0].$$

Sei $x \in C^0([0, t_0])$, so dass $F(x) = \lambda x$ für ein $\lambda \in [0, 1]$. Wir zeigen $|x(t)| < 2|x_0|$ für alle $t \in [0, t_0]$. Angenommen dies gilt nicht. Dann existiert ein kleinstes $t_1 \in [0, t_0]$ mit $|x(t_1)| = 2|x_0|$. Auf der anderen Seite gilt

$$|x(t)| \;=\; \left|\lambda x_0 + \lambda \int_0^t f(s, x(s))ds\right| \;\leq\; |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s))|ds \leq |x_0| + t_0 C_0 < 2|x_0|$$

was ein Widerspruch ist. Gmäß 7.5 existiert ein $x \in C^0([0, t_0])$ mit $F(x) = x$. Insbesondere ist $x \in C^1([0, t_0])$ und lößt das Anfangswertproblem

$$x'(t) \;=\; f(t, x(t)), \quad t \in [0, t_0], \quad x(0) = x_0.$$

,