PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`
10. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 8

(Besprechung in der Übung am 17. Juni 2016)

Aufgabe 1 Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ abgeschlossen. Sei $F : M \to 2^X$ mit $F(M)$ präkompakt. Ferner sei F gemäß Definition 7.1 stetig. Zeigen Sie, falls $F(x) = \{y\}$ für alle $x \in M$, so ist $F : M \to X$ eine stetige Abbildung.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &\frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = f(t), \quad t \in [0,1], \\ &u(0) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^2([0,1])$ besitzt, falls $f \in C^0([0,1])$, $\int\limits_0^1 |f(t)|dt < 1$.
Hinweis: Man gehe in folgenden Schritten vor:

(a) Sei $g \in C^0([0,1])$. Man zeige, dass das Problem

$$v'' = g \quad \text{in} \quad [0,1], \quad v(0) = v(1) = 0$$

eine eindeutige Lösung in $C^2([0,1])$ hat. Diese genügt der Ungleichung $\|v\|_{C^2} \le C\|g\|$ mit einer von g unabhängigen Konstante.

(b) Man betrachte den Operator $F : C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$, welcher jeder Funktion $u \in C^1([0,1])$ die eindeutige Lösung $v \in C^2([0,1])$ von

$$\frac{v''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = f(t), \quad t \in [0,1], \quad v(0) = v(1) = 0$$

zuordnet und wende auf diesen den Fixpunktsatz von Leray-Schauder an.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Herleitung einer Schranke für die Menge $\{v \in C^1([0,1]) \,|\, v = tF(v)\}$ für ein $t \in [0,1]$, dass $\frac{v''}{(1+(v')^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{v'}{\sqrt{1+(v')^2}}\right)'$.