PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/$\sim$ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`
10. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 8

(Besprechung in der Übung am 17. Juni 2016)

Aufgabe 1 Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ abgeschlossen. Sei $F : M \to 2^X$ mit $F(M)$ präkompakt. Ferner sei F gemäß Definition 7.1 stetig. Zeigen Sie, falls $F(x) = \{y\}$ für alle $x \in M$, so ist $F : M \to X$ eine stetige Abbildung.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned}&\frac{u''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = f(t), \quad t \in [0,1],\\ &u(0) = u(1) = 0\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $u \in C^2([0,1])$ besitzt, falls $f \in C^0([0,1])$, $\int\limits_0^1 |f(t)|dt < 1$.

Hinweis: Man gehe in folgenden Schritten vor:

(a) Sei $g \in C^0([0,1])$. Man zeige, dass das Problem

$$v'' = g \quad \text{in} \quad [0,1], \quad v(0) = v(1) = 0$$

eine eindeutige Lösung in $C^2([0,1])$ hat. Diese genügt der Ungleichung $\|v\|_{C^2} \leq C\|g\|$ mit einer von g unabhängigen Konstante.

(b) Man betrachte den Operator $F : C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$, welcher jeder Funktion $u \in C^1([0,1])$ die eindeutige Lösung $v \in C^2([0,1])$ von

$$\frac{v''(t)}{(1+u'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = f(t), \quad t \in [0,1], \quad v(0) = v(1) = 0$$

zuordnet und wende auf diesen den Fixpunktsatz von Leray-Schauder an.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Herleitung einer Schranke für die Menge $\{v \in C^1([0,1]) \,|\, v = tF(v)\}$ für ein $t \in [0,1]$, dass $\frac{v''}{(1+(v')^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{v'}{\sqrt{1+(v')^2}}\right)'$.

Lösungen Blatt 8

Aufgabe 2 a) Sei $g \in C^0(I)$. Dann ist

$$v(t) = \int_0^t \int_0^s g(\tau) d\tau ds - t \int_0^1 \int_0^s g(\tau) d\tau ds, \quad t \in I$$

in $C^2(I)$ die eindeutige Lösung von

$$v'' = g \quad \text{in} \quad I, \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Offensichtlich gilt

$$\|v\|_{C^2} \leq 6\|g\|_{C^0}.$$

(b) Wir definieren $T : C^1(I) \to C^1(I)$ durch $v = T(u)$, wobei

$$v'' = (1 + (u')^2)^{3/2} f \quad \text{in} \quad I, \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Nach (a) haben wir $T(u) \in C^2(I)$ mit

$$\|v\| \leq 6(1 + \sup_I |u'|^2)^{3/2} \sup_I |f|).$$

Somit ist T kompakte Abbildung.

Nun sei $u \in C^1(I)$ und $t \in [0, 1]$ mit $u = \lambda T(u)$. Dann ist $v = T(u) = \frac{1}{\lambda} u$, was zeigt dass

$$\left(\frac{u'}{(1 + (u')^2)^{1/2}} \right)' = \frac{u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}} = \lambda f.$$

Aus dem Satz von Rolle folgt die Existenz eines $t_0 \in I$, so dass $u'(t_0) = 0$. Unter Verwendung partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{(1 + (u'(t))^2)^{1/2}} &= \frac{u'(t)}{(1 + (u'(t))^2)^{1/2}} - \frac{u'(t_0)}{(1 + (u'(t_0))^2)^{1/2}} \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{u'}{(1 + (u')^2)^{1/2}} \right)' ds \\ &= \lambda \int_{t_0}^t f(s) ds \end{aligned}$$

Nach Umstellen folgt

$$u'(t) \left(1 - \lambda \int_{t_0}^t f(s) ds \right) = \lambda \int_{t_0}^t f(s) ds.$$

Nach Voraussetzung haben wir

$$\left| \lambda \int_{t_0}^t f(s) ds \right| \leq \|f\|_{L^1} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \lambda \int_{t_0}^t f(s) ds > 0.$$

Folglich ist

$$|u'(t)| \le \frac{\|f\|_{L^1}}{1 - \|f\|_{L^1}} < +\infty \quad \forall\, t \in I.$$

Hieraus folgt dass $\{u \,|\, u = \lambda T(u)$ für ein $0 \le \lambda \le 1\}$ in $C^1(I)$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Leray-Schauder existiert ein $u \in C^1(I)$ mit $T(u) = u$, so dass $u \in C^2(I)$ die gesuchte Lösung des Problems ist.

Eindeutigkeit Seien $u, v \in C^2(I)$ mit

$$\frac{u''}{(1+(u')^2)^{3/2}} = \frac{v''}{(1+(v')^2)^{3/2}}, \quad u(0) = v(0) = u(1) = v(1) = 0.$$

Aus der obigen Gleichung folgt

$$\left(\frac{u'}{(1+(u')^2)^{1/2}} - \frac{u'}{(1+(u')^2)^{1/2}}\right)' = 0$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $t_0 \in (0,1)$, so dass $u'(t_0) = v'(t_0)$. Nach Integration und Anwendung des Hauptsatzes der Integral und Differentialrechnung erhält man

$$\frac{u'}{(1+(u')^2)^{1/2}} - \frac{u'}{(1+(u')^2)^{1/2}} = 0$$

Die Abbildung $s \to \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}$ is injektiv. Denn aus

$$\frac{s}{(1+s^2)^{1/2}} = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}$$

folgt

$$s^2(1+t^2) = t^2(1+s^2) \quad \Longrightarrow s^2 = t^2.$$

Also ergibt sich $s = t$. Mit dieser Aussage erhält man $u' = v'$ und wegen $u(0) = v(0)$ auch $u = v$, was die Eindeutigkeit beweist.