PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de`

17. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 9

(Besprechung in der Übung am 01. Juli 2016)

Aufgabe 1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 Gebiet. Sei $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ so dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} u = 0$ gilt

$$\int_\Omega u \cdot \varphi dx = 0.$$

Beweisen Sie, dass ein $p \in W^{1,2}(\Omega)$ existiert mit $u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}$ fast überall in Ω.

Aufgabe 2
Seien $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $F : C^1(I) \to C(I)$ wie im Beispiel 7.8.

(a) Zeigen Sie, dass F stetig und kompakt ist.

(b) Beweisen Sie Lemma 7.8.2.

Aufgabe 3 (**Nemitski Operatoren**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1. f heißt *Carathéodory Funktion*, falls

$$u \mapsto f(x, u) \quad \text{stetig für fast alle } x \in \Omega, \tag{1}$$
$$x \mapsto f(x, u) \quad \text{messbar für alle } u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

2. Seien $1 \le p, q < \infty$. Wir nehmen an f genügt der folgenden Wachtumsbedingung

$$|f(x, u)| \le a + b|u|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ die Funktion $F(u)(x) = f(x, u(x))$ in $L^q(\Omega)$ liegt. (Der Operator $u \mapsto F(u)$ heißt *Nemitski Operator* zu f).

(b) Zeigen Sie, dass $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ unter den Annahmen (1), (2), (3) stetig ist.

Aufgabe 4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $k > 0$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= e^{\frac{1}{u}} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= k \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige positive Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ hat.