PD Dr. J. Wolf
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
www2.mathematik.hu-berlin.de/∼ jwolf
E-Mail: `jwolf@math.hu-berlin.de` 17. Juni 2016

Nichtlineare Funktionalanalysis - SoSe 2016
Übungsblatt 9

(Besprechung in der Übung am 01. Juli 2016)

Aufgabe 1
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 Gebiet. Sei $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ so dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} u = 0$ gilt

$$\int_\Omega u \cdot \varphi dx = 0.$$

Beweisen Sie, dass ein $p \in W^{1,2}(\Omega)$ existiert mit $u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}$ fast überall in Ω.

Aufgabe 2
Seien $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $F : C^1(I) \to C(I)$ wie im Beispiel 7.8.

(a) Zeigen Sie, dass F stetig und kompakt ist.

(b) Beweisen Sie Lemma 7.8.2.

Aufgabe 3 (**Nemitski Operatoren**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1. f heißt *Carathéodory Funktion*, falls

$$u \mapsto f(x, u) \quad \text{stetig für fast alle } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$x \mapsto f(x, u) \quad \text{messbar für alle } u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

2. Seien $1 \le p, q < \infty$. Wir nehmen an f genügt der folgenden Wachtumsbedingung

$$|f(x, u)| \le a + b|u|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p}{q}. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ die Funktion $F(u)(x) = f(x, u(x))$ in $L^q(\Omega)$ liegt. (Der Operator $u \mapsto F(u)$ heißt *Nemitski Operator* zu f).

(b) Zeigen Sie, dass $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ unter den Annahmen (1), (2), (3) stetig ist.

Aufgabe 4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $k > 0$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= e^{\frac{1}{u}} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= k \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige positive Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ hat.

Lösungen Blatt 9

Aufgabe 4
Satz *Sei $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $-\Delta u = f$, dann*

$$\|u\|_{C^2} \le c_1 \|f\|_{C^1}. \tag{4}$$

Außerdem gilt für $f \in L^\infty(\Omega)$:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le c_2 \|f\|_{L^\infty} \quad \forall\, p > 1. \tag{5}$$

Für $p > n$ haben wir $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Also haben wir

$$\|u\|_{C^1} \le c\|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \le c_3 \|f\|_{L^\infty}. \tag{6}$$

Wir definieren $T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ durch

$$T(v) = u, \quad -\Delta u = e^{\frac{1}{v^+ + k}}, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Dann ist $e^{\frac{1}{v^+ + k}} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ mit

$$\|\nabla e^{\frac{1}{v^+ + k}}\|_\infty \le \|v\|_{C^1} k^{-2} e^{1/k}.$$

Dies zeigt
$$\|T(v)\|_{C^2} \le c\|v\|_{C^1} k^{-2} e^{1/k}.$$

Folglich ist T ein kompakter Operator.
Nun sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\lambda \in [0,1]$ mit

$$u = \lambda T(u).$$

Dann haben wir

$$\|u\|_{C^1} \le c\|u\|_{W^{n+1,2}(\Omega)} \le c\|e^{\frac{1}{v^+ + k}}\|_\infty \le ce^{1/k}.$$

Nach dem Satz von Leray-Schauder existiert ein $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $T(u) = u$. Dann ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und genügt der Differentialgleichung

$$-\Delta u = e^{\frac{1}{u^+ + k}} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt $u \ge 0$, also $e^{\frac{1}{u^+ + k}} = e^{\frac{1}{u+k}}$. Hieraus folgt die Behauptung.

Alternativ: $f(\tau) = -e^{\frac{1}{\tau+k}}$. Wir berechnen

$$f'(\tau) = \frac{1}{(\tau^+ + k)^2} e^{\frac{1}{\tau+k}}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Also
$$0 \le f'(\tau) \le L = k^{-2} e^{\frac{1}{k}} \quad \forall\, \tau \in R \setminus \{0\}.$$

Dies zeigt, dass der Operator $-\Delta u - e^{\frac{1}{u^+ + k}}$ monoton ist. Gemäß 8.6 existiert ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int\limits_\Omega e^{\frac{1}{u^+ + k}} v dx \;=\; 0 \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Setzt man insbesondere $v = u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so erhält man

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^- dx - \int\limits_\Omega e^{\frac{1}{u^+ + k}} u^- dx \;=\; \int\limits_\Omega |\nabla u^-|^2 dx + \int\limits_{\{u<0\}} e^{\frac{1}{k}} (-u) dx \;=\; 0$$

Hieraus folgt, dass $u \geq 0$ fast überall in Ω, also ist u schwache Lösung von

$$-\Delta u \;=\; e^{\frac{1}{u+k}} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Wegen $e^{\frac{1}{u+k}} \;\leq\; e^{1/k}$ in Ω folgt aus der obigen Abschätzung, dass $u \in W^{2,n+1}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ und

$$\|u\|_{C^1} \;\leq\; c e^{1/k}.$$

Hieraus ergibt sich $e^{\frac{1}{u+k}} \in C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\partial_{x_i} e^{\frac{1}{u+k}} \;=\; \frac{\partial_{x_i} u}{(u+k)^2} e^{\frac{1}{u+k}}$$

also

$$\|\nabla e^{\frac{1}{u+k}}\|_{L^\infty} \;\leq\; c k^{-2} e^{1/k} \|\nabla u\|_{L^\infty} \;\leq\; c k^{-2} e^{2/k}.$$

Folglich ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$\|u\|_{C^2} \;\leq\; c \|e^{\frac{1}{u+k}}\|_{C^1} \;\leq\; c k^{-2} e^{2/k}.$$