Nichtlineare Funktionalanalysis

Literatur

1. Ambrosetti and Prodi, **A Primer of Nonlinear Analysis**, Cambridge studies in advanced mathematics 34 (1995).

2. K. Deimling. **Nonlinear Functional Analysis**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

3. E. Zeidler, **Nonlinear Functional Analysis and its Applications**, Vol 1-4, Springer.

4. M. Růžička, **Nichtlineare Funktionalanalysis**, Springer (2004).

0. Einführung und Motivation

Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen. $F : U \to Y$.

Frage: Hat die Gleichung $F(x) = y$ eine Lösung $x \in U$?

Ein mögliches Verfahren, falls $X = Y = \mathbb{R}^n$ und U offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$:

a) falls $F(x_0) = y_0, F \in C^1(U, \mathbb{R}^n), \det F'(x_0) \neq 0$, so bildet F eine Umgebung von x_0 homöomorph auf eine Umgebung von y_0 ab. Hieraus folgt $F(x) = y$ ist lösbar, falls y "nahe" bei y_0 ist. ("lokale Analysis")

b) schreibe $\boldsymbol{F}(x) = y$ als Fixpunktgleichung $\boldsymbol{G}(x) = x$. Zum Beispiel durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(x) &= x - \lambda \cdot (\boldsymbol{F}(x) - y), \quad \lambda \neq 0 \quad \text{lineare Relaxation.} \\ \boldsymbol{G}(x) &= x - [\boldsymbol{F}'(x)]^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}(x) - y), \quad \text{Newtonverfahren.} \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, einen Fixpunkt von $\boldsymbol{G}$ zu finden. (z.B. mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes). Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes:

$n = 1 : G : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $G(x_0) = x_0$

$n > 1 : \boldsymbol{G} : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in \overline{B_1(0)}$ mit $\boldsymbol{G}(x_0) = x_0$.

c) falls $F(x) = \nabla E(x)$ und E ein lokales Extremum in x_0 hat, so gilt $F(x_0) = \nabla E(x_0) = 0$.

Typische Situation: $E(x) = x^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot x + b^\top \cdot x$ mit $\boldsymbol{A}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$.

Ziel: Erweiterung dieser Verfahrensweise auf Banachräume mit unendlicher Dimension

Beispiel Nichtlineares Randwertproblem

Wir suchen eine Funktion $u \in C^2([0,1])$, so dass

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' + f(u) \;=\; h \quad \text{in} \quad [0,1] \\[2ex] u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0. \end{cases}$$

Hierbei sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen. Falls $f(u) = \lambda u$, so ist (1) ein lineares Randwertproblem.

Formulierung als Gleichung in Banachräumen.

$$X \;=\; \Big\{ v \in C^2([0,1]) \;\Big|\; v(0) = v(1) = 0 \Big\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_X \;=\; \max_{x\in[0,1]} |v(x)| + \max_{x\in[0,1]} |v'(x)| + \max_{x\in[0,1]} |v''(x)|, \quad v \in X.$$

$(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum. Ferner definieren wir $Y = C^0([0,1])$ mit der Norm

$$\|v\|_Y \;=\; \max_{x\in[0,1]} |v(x)|, \quad v \in Y$$

$(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist ebenfalls ein Banachraum. Wir betrachten $F : X \to Y$ mit

$$F(v) := -v'' \,+\, f(v), \quad v \in X.$$

Dann ist $u \in X$ Lösung von (1) genau dann, wenn $F(u) \;=\; h$. ∎

Themen der Vorlesung

I *Analysis in Banachräumen*

II *Fixpunktsätze, Abbildungsgrad*

III *Monotone Operatoren.*

I. Analysis in Banachräumen

Im folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ reelle Banachräume. Der Einfachheit halber schreiben wir $\|\cdot\|$ statt $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$.

1. Stetigkeit

1.1 Definition Sei $M \subset X, F : M \to Y$

a) F heißt *stetig in* $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in M$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ gilt:

$$\|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon.$$

b) F heißt *gleichmäßig stetig* in M, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x, \widetilde{x} \in M$ mit $\|x - \widetilde{x}\| < \delta$ gilt

$$\|F(x) - F(\widetilde{x})\| < \varepsilon.$$

1.2 Beispiel

1) Sei $A \in \mathscr{L}(X,Y) = \{A : X \to Y; A \text{ linear und stetig}\}$.

   Dann $\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \le \|A\|\|x_1 - x_2\|$ für alle $x_1, x_2 \in X$. Dies zeigt, dass A gleichmäßig stetig ist (A ist sogar Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten $\|A\|$).

2) $F : X \to \mathbb{R}$, $F(x) := \|x\|$ ist gleichmäßig stetig auf X, denn mit Hilfe der Dreiecksungleichung findet man

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \Big| \|x_1\| - \|x_2\| \Big| \le \|x_1 - x_2\|.$$

Sei $M \subset X$ abgeschlossen und beschränkt und sei $F : M \to Y$ stetig. Ist $\dim X < \infty$, so ist $F(M) \subset Y$ beschränkt. Dies ist i. a. nicht der Fall, wenn $\dim X = \infty$.

1.3 Gegenbeispiel $X = \ell^2 = \Big\{\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\Big\}$ mit der Norm

$$\|\boldsymbol{x}\| := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2}, \quad \boldsymbol{x} \in X$$

Der Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum (Hilbertraum). Sei

$$\boldsymbol{e}^{(n)} := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2 \quad \text{(die 1 an der } n\text{-ten Stelle)}$$

Definiere $F : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \max\Big\{\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}^{(n)}\|, 0\Big\}.$$

1) F ist wohldefiniert. Sei $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in X$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=N+1}^{\infty} \widetilde{x}_i^2 \le \frac{1}{16}$. Hiermit folgt für $n \ge N+1$, folgt wegen $|\widetilde{x}_n| \le \frac{1}{4}$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{e}^{(n)}\| \ge |1 - \widetilde{x}_n| \ge \frac{3}{4}.$$

also $\frac{1}{4} - \|\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{e}^{(n)}\| < 0$ für alle $n \ge N+1$.

2) Stetigkeit von F in $\widetilde{x}$: Für $\boldsymbol{x} \in X$ mit $\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\| \le \frac{1}{2}$ gilt insbesondere $\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} (x_i - \widetilde{x}_i)\Big)^{1/2} \le \frac{1}{2}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung in ℓ^2 folgert man

$$\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2} \le \frac{1}{2} + \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \widetilde{x}_i^2\Big)^{1/2} \le \frac{3}{4}.$$

Insbesondere gilt für jedes $n \geq N+1$ wegen $x_n \leq \frac{3}{4}$, dass

$$\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{e}^{(n)} - \boldsymbol{x}\|_X \leq \frac{1}{4} - |1 - x_n| \leq 0.$$

Somit erhält man

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} n \max\left\{\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{e}^{(n)} - \boldsymbol{x}\|_X, 0\right\} \quad \forall\, x \in B_{1/4}(\widetilde{\boldsymbol{x}}).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\boldsymbol{x} \mapsto n \max\left\{\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{e}^{(n)} - \boldsymbol{x}\|_X, 0\right\}$ stetig ist, existiert ein $0 < \delta < \frac{1}{2}$, so dass

$$\left| n \max\left\{\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{e}^{(n)} - \boldsymbol{x}\|_X, 0\right\} - n \max\left\{\frac{1}{4} - \|\boldsymbol{e}^{(n)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\|_X, 0\right\}\right| \leq \frac{\varepsilon}{N} \quad \forall\, x \in B_\delta(\widetilde{x}).$$

Dies impliziert

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\widetilde{\boldsymbol{x}})| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in B_\delta(\widetilde{\boldsymbol{x}}).$$

Auf der anderen Seite berechnet man für $\boldsymbol{e}^{(j)} \in \overline{B_1(0)}$

$$F(\boldsymbol{e}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\infty} n \max\left\{\frac{1}{4} - \underbrace{\|\boldsymbol{e}^{(j)} - \boldsymbol{e}^{(n)}\|}_{=\begin{cases}\sqrt{2}, j \neq n \\ 0, j = n\end{cases}}, 0\right\} = \frac{j}{4} \to \infty$$

für $j \to \infty$. Dies zeigt, dass f auf $\overline{B_1(0)}$ unbeschränkt ist. ■

1.4 Lemma *Sei $M \subset X$ nichtleer, beschränkt und konvex, $F : M \to Y$ gleichmäßig stetig. Dann ist $F(M)$ beschränkt.*

Beweis Da f gleichmäßig stetig, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|F(x) - F(\widetilde{x})\| \leq 1 \quad \forall\, x, \widetilde{x} \in X \text{ mit } \quad \|x - \widetilde{x}\| \leq \delta.$$

Sei $x_0 \in M$ fixiert. Setzen $R := \sup\limits_{x \in M} \|x - x_0\| < \infty$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{R}{N} \leq \delta$. Sei $x \in M$ beliebig gewählt. Da M konvex ist, ist $x_j := \left(1 - \frac{j}{N}\right)x_0 + \frac{j}{N}x \in M$ ($i = 0, \ldots, N$). Wie man leicht sieht ist

$$x_{j+1} - x_j = \left(\frac{j+1}{N} - \frac{j}{N}\right)(x - x_0) = \frac{1}{N}(x - x_0) \quad \forall\, i = 0, \ldots, N-1$$

also $\|x_{j+1} - x_j\| \leq \delta$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung zusammen mit $x_0 = x_0, x_N = x$ findet man

$$\begin{aligned}\|F(x)\| &\leq \|F(x) - F(x_0)\| + \|F(x_0)\| = \left\|\sum_{j=0}^{N-1}(F(x_{j+1}) - F(x_j)\right\| + \|F(x_0)\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \|F(x_{j+1}) - F(x_j\| + \|F(x_0)\| \\ &\leq N + \|F(x_0)\|.\end{aligned}$$

Somit ist f auf M beschränkt. ■

---

2. Integration in Banachräumen

Sei $-\infty < a < b < \infty, f : [a, b] \to Y$ stetig. Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, das heißt

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Wir setzen $\Delta_{\mathcal{Z}} := \max\limits_{n=1,\ldots,N}(t_n - t_{n-1})$ die zugehörige Feinheit. Dann definieren wir Riemann-Summen

$$S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{n=1}^{N} f(\bar{t}_n)(t_n - t_{n-1}), \quad \bar{t}_n \in [t_{n-1}, t_n].$$

2.1 Satz *Sei $f : [a, b] \to Y$ stetig. Der Limes $\lim_{\Delta_{\mathcal{Z}} \to 0} S(f, \mathcal{Z})$ existiert in Y und wird mit $\int\limits_a^b f(t)dt$ bezeichnet.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ kompakt, ist f gleimäßig stetig. Demzufolge existiert ein $\delta > 0$ so dass

$$\|f(s) - f(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, s, t \in [a, b] \quad \text{mit} \quad |s - t| \le \delta.$$

Wir wählen nun Zerlegungen $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ und $\mathcal{Z}' = \{t'_0, t'_1, \ldots, t'_{N'}\}$ mit $\Delta_{\mathcal{Z}} \le \delta$ und $\Delta_{\mathcal{Z}'} \le \delta$ zusammen mit den Riemann-Summen

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{n=1}^{N} f(\bar{t}_n)(t_{n-1} - t_n), \\ S(f, \mathcal{Z}') &= \sum_{n=1}^{N'} f(\bar{t}'_n)(t'_{n-1} - t'_n). \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{Z}'' = \{t''_0, \ldots, t''_{N''}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, welche durch Vereinigung der beiden Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ entsteht. Weiter sei $S(f, \mathcal{Z}'')$ eine zugehörige Riemann-Summe. Wir setzen $s_n = \bar{t}_m$, falls $[t''_{n-1}, t''_n] \subseteq [t_{m-1}, t_m]$ und $s'_n = \bar{t}'_m$, falls $[t''_{n-1}, t''_n] \subseteq [t'_{m-1}, t'_m]$. Dann bekommt man

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{n=1}^{N''} f(s_n)(t''_{n-1} - t''_n), \\ S(f, \mathcal{Z}') &= \sum_{n=1}^{N''} f(s'_n)(t''_{n-1} - t''_n). \end{aligned}$$

Dies impliziert mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
|S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}')| \;&\leq\; |S(f,\mathcal{Z}) - S(f,\mathcal{Z}'')| \;+\; |S(f,\mathcal{Z}'') - S(f,\mathcal{Z}')| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N''} \|f(s_n) - f(\bar{t}''_n)\|(t''_{n-1} - t''_n) \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=1}^{N''} \|f(s'_n) - f(\bar{t}''_n)\|(t''_{n-1} - t''_n) \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{n=1}^{N''}(t''_{n-1} - t''_n) \;=\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $S(f,\mathcal{Z})$ eine Cauchy-Folge in Y ist. Da Y vollständig ist, existiert der Grenzwert $\lim_{\Delta_{\mathcal{Z}}\to 0} S(f,\mathcal{Z})$. ■

2.2 Lemma *Sei $f : [a,b] \to Y$ stetig. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \;\leq\; \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

Beweis Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung findet man

$$\|S(f,\mathcal{Z})\| \;=\; \left\| \sum_{n=1}^{N} f(\bar{t}_n)(t_{n-1} - t_n) \right\| \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} \|f(\bar{t}_n)\|(t_{n-1} - t_n) \;=\; S(\|f\|,\mathcal{Z}).$$

Da $\|\cdot\|$ und $\|f(\cdot)\|$ stetig sind, folgt

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \;=\; \lim_{\Delta_{\mathcal{Z}}\to 0} \|S(f,\mathcal{Z})\| \;\leq\; \lim_{\Delta_{\mathcal{Z}}\to 0} S(\|f\|,\mathcal{Z}) \;=\; \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

■

2.3 Lemma *Sei $f : [a,b] \to Y$ stetig. Dann gilt:*

$$\left\langle y', \int_a^b f(t)dt \right\rangle \;=\; \int_a^b \langle y', f(t)\rangle dt \quad \forall\, y' \in Y'.$$

Beweis Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Dann folgt aus der Linearität von y'

$$\langle y', S(f,\mathcal{Z})\rangle \;=\; \left\langle y', \sum_{n=1}^{N} f(\bar{t}_n)(t_{n-1} - t_n) \right\rangle \;=\; \sum_{n=1}^{N} \langle y', f(\bar{t}_n)\rangle(t_{n-1} - t_n).$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Definition des Integrals und der Stetigkeit von y'. ■

3. Differentiation in Banachräumen

3.1 Definition Sei $U \subset X$ offen, $F : U \to Y$. F heißt in $x_0 \in U$ *Fréchet-differenzierbar*, falls es eine Abbildung $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ gibt, so dass

$$(1) \qquad \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - Ah}{\|h\|} \to 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \to 0.$$

A ist eindeutig bestimmt (siehe unten) und heißt *Fréchet-Ableitung* von F in x_0 mit der Bezeichnung $A = DF(x_0)$.
F heißt *Fréchet-differenzierbar* in U, falls F in jedem Punkt $x_0 \in U$ Fréchet-differenzierbar.

3.2 Bemerkungen a) Eine Funktion $o : U \to Y$ heißt klein o Funktion, falls $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$. Wie man leicht sieht, ist (1) äquivalent zu

$$F(x_0+h) - F(x_0) - Ah = o(h).$$

b) Die Funktion A in 2.1 ist eindeutig bestimmt. Sei $B \in \mathscr{L}(X,Y)$, so dass

$$F(x_0+h) - F(x_0) - Bh = \widetilde{o}(h).$$

Dann ist gilt

$$Ah - Bh \;=\; o(h) - \widetilde{o}(h).$$

Sei $x \in X \setminus \{0\}$. Mit $h = tx$ ergibt sich

$$Ax - Bx \;=\; \frac{1}{t}(o(tx) - \widetilde{o}(tx)) \;=\; \|x\|\frac{o(h) - \widetilde{o}(h)}{\|h\|} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0.$$

Dies zeigt $Ax = Bx$, also $A = B$. □

(c) Ist F Fréchet-differenzierbar in x_0, so ist F stetig in x_0. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(1+\|DF(x_0)\|)}$, so dass $\|o(h)\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Definition von $DF(x_0)$ folgt

$$\|F(x) - F(x_0)\| \;\le\; \|DF(x_0)\|\|x - x_0\| + \|o(x - x_0)\| \;\le\; \varepsilon \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0).$$

3.3 Beispiele 1) $F : U \to Y$, mit $F(x) = y_0 \forall\, x \in U$ $(y_0 \in Y)$. Dann gilt $DF(x) = 0 \forall\, x \in U$.
2) Sei $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Sei $F(x) = Ax$ $(x \in U)$. Dann ist

$$DF(x) = A \quad \forall\, x \in U.$$

Denn $A(x+h) - Ax - Ah = 0$, d.h. $o(h) \equiv 0$.

3) $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ ist Fréchet-differenzierbar $\Leftrightarrow$ F total differenzierbar in x_0 mit

$$DF(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix},$$

wobei in $\mathbb{R}^n$ (bzw. in $\mathbb{R}^m$) die kanonische Basis gewählt wurde.

4) $I = [a,b]$, $X = Y = C^0(I)$ ausgestattet mit der Norm $\|u\| := \max_{t\in I} |u(t)|$. Wir definieren $F : X \to X$ durch

$$F(u)(t) \;=\; u(t)^2, \quad u \in X.$$

Sei $u_0 \in X$. Sei $h \in X$, dann

$$F(u_0 + h)(t) - F(u_0)(t) \;=\; (u_0(t) + h(t))^2 - u_0(t)^2 \;=\; 2u_0(t)h(t) - h(t)^2.$$

Wir setzen $(Ah)(t) := 2u_0(t)h(t)$ $(h \in X)$, dann ist $A \in \mathscr{L}(X, X)$ und es gilt

$$F(u_0 + h)(t) - F(u_0)(t) - Ah(t) \;=\; h(t)^2 = o(h)(t).$$

Dies zeigt, dass F auf X Fréchet-differenzierbar ist und $DF(u_0) \cdot h = 2u_0 \cdot h$. (Multiplikationsoperator)

3.4 Lemma a) *Sei $U \subset X$ offen, $F, G : U \to Y$. Sind F und G in Fréchet-differenzierbar, so ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\alpha F + \beta G$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit*

$$D(\alpha F + \beta G)(x_0) \;=\; \alpha DF(x_0) + \beta DG(x_0).$$

b) Sei Z ein weiterer (reeller) Banachraum, $F : U \to Y, G : V \to Z$, wobei $U \subset X, V \subset Y$ offen und $F(U) \subset V$. Ist F in x_0 Fréchet-differenzierbar und G in $y_0 = F(x_0)$ Fréchet-differenzierbar, so ist $G \circ F$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$D(G \circ F)(x_0) \;=\; DG(y_0) \circ DF(x_0).$$

Beweis a) Ist klar. b) Sei $h \in X$, so dass $x_0 + h \in U$. Da G in $y_0 = F(x_0)$ Fréchet-diffeenzierbar ist, findet man

$$\begin{aligned} &G(F(x_0 + h)) - G(F(x_0)) \\ &\quad = G(y_0 + (F(x_0 + h) - F(x_0))) - G(y_0) \\ &\quad = DG(y_0) \cdot (F(x_0 + h) - F(x_0))) \;+\; o_2(F(x_0 + h) - F(x_0)). \end{aligned}$$

Darüber hinaus haben wir

$$F(x_0 + h) - F(x_0) \;=\; DF(x_0)h \;+\; o_1(h).$$

Nach einsetzen in die obige Identität folgt

$$\begin{aligned} &G(F(x_0 + h)) - G(F(x_0)) \\ &\quad = DG(y_0)(DF(x_0)h) \;+\; DG(y_0) \cdot o_1(h) \;+\; o_2(DF(x_0)h + o_1(h)) \\ &\quad = DG(y_0)(DF(x_0)h) + o_3(h). \end{aligned}$$

Dies bestätigt die Behauptung. ■

Notation Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar auf U, so ist $DF : U \to \mathscr{L}(X, Y)$. Mit $C^1(U; Y)$ bezeichnen wir die Menge aller Fréchet-differenzierbaren Abbildungen $F : U \to Y$ für die DF stetig ist.

3.5 Definition: Sei $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$. $F : U \to Y$ heißt in x_0 *Gâteaux-differentierbar*, falls eine Abbildung $A : X \to Y$ existiert, so dass

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{F(x_0 + \tau v) - F(x_0)}{\tau} \;=\; A(v) \quad \text{in } Y \qquad \forall\, v \in X.$$

A ist eindeutig bestimmt und heißt die Gateaux-Ableitung von F in x_0.

Notation. $A = d_G F(x_0)$ und $A(v) \;=\; d_G F(x_0; v)$.

3.6 Bemerkung F in x_0 Gâteaux-differenzierbar. Sei $v \in X$. Dann ist $t \mapsto F(x_0 + tv)$ in 0 differenzierbar und es gilt:

$$d_G F(x_0; v) \;=\; \frac{d}{d\tau} F(x_0 + \tau v)|_{\tau=0}.$$

3.7 Beispiel 1) Sei $F : C^0(I) \to C^0(I)$ wie in Beispiel 3.3, 4., $F(u)(t) = u(t)^2$. Sei $v \in C^0(I)$. Dann

$$\frac{d}{d\tau} F(u_0 + \tau v)|_{\tau=0} \;=\; \frac{d}{d\tau}(u_0(t) + \tau v(t))^2|_{\tau=0} \;=\; 2u_0(t)v(t) \quad \text{in} \quad C^0(I).$$

Also $d_G F(x_0; v) = 2u_0 v = DF(x_0)$

2) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch,

$$F(x_1, x_2) \;=\; \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Wie man sieht, ist F in $(0, 0)$ Gâteaux-differenzierbar mit

$$d_G F(0, 0; v_1, v_2) \;=\; \begin{cases} 0, & (v_1, v_2) = (0, 0), \\ \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}, & (v_1, v_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Da aber $d_G F(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nichtlinear ist, ist F nicht Fréchet-differenzierbar in $(0,0)$.

3.8 Bemerkungen Ist $F : U \to Y$ Gateaux-differenzierbar in $x_0 \in U$ so gilt

$$d_G F(x_0; \alpha v) \;=\; \alpha d_G F(x_0; v) \quad \forall\, v \in X, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. F Fréchet-differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; F$ Gâteau-differenzierbar in x_0 und $d_G F(x_0) = DF(x_0)$.

Begr.: F Fréchet-differenzierbar in x_0. Für $v \in X$ und $\tau \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 + \tau v \in U$ erhält man

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+\varepsilon v) - F(x_0)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}(F(x_0+\varepsilon v) - F(x_0) - DF(x_0)(\varepsilon v)) \;+\; DF(x_0)v \\ &= \frac{o(\varepsilon v)}{\varepsilon} \;+\; DF(x_0)v \\ &\to DF(x_0)v \quad \text{in} \quad Y \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

2. Sei $F : U \to Y$ Gâteaux-differenzierbar. Sei $y' \in Y'$. Dann ist $t \mapsto \langle y', F(x_0+tv)\rangle$ in 0 differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\langle y', F(x_0+tv)\rangle|_{t=0} \;=\; \langle y', d_G F(x_0; v)\rangle.$$

Notation Für $x, y \in X$ setzen wir $[x,y] := \{(1-t)x + ty \,|\, t \in [0,1]\}$.

3.9 Satz *Sei $U \subset X$ offen, $F : U \to Y$ sei auf U Gâteaux-differenzierbar mit $d_G F : U \to \mathscr{L}(X,Y)$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in U$ mit $[x_1, x_2] \subset U$, dass*

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \;\le\; \sup\Big\{\|d_G F(w)\| \,\Big|\, w \in [x_1, x_2]\Big\}\|x_1 - x_2\|.$$

Beweis O.E. $F(x_1) \neq F(x_2)$. Hahn-Banach $\Rightarrow$ es existiert $y' \in Y'$ mit $\|y'\| = 1$, so dass $\langle y', F(x_1) - F(x_2)\rangle \;=\; \|F(x_1) - F(x_2)\|$. Definiere $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) \;=\; \langle y', F(tx_1 + (1-t)x_2)\rangle, \quad t \in [0,1].$$

Aus der Definition von φ und y' folgt

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \langle y', F(x_1) - F(x_2)\rangle = \|F(x_1) - F(x_2)\|.$$

Wir zeigen, dass φ ist in $(0,1)$ differenzierbar. Sei $t_0 \in (0,1)$. Da F in $t_0 x_1 + (1-t_0)x_2$ Gâteaux-differenzierbar, ist nach Bemerkung 3.8 die Abbildung $\psi : t \mapsto \varphi(t_0 + t) = \langle y', F(t_0 x + (1-t_0)y + t(x_1 - x_2))\rangle$ in 0 und mithin φ in t_0 differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(t_0) \;=\; \psi'(0) \;=\; \Big\langle y', d_G F(t_0 x + (1-t_0)y) \cdot (x_1 - x_2)\Big\rangle.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $t_0 \in (0,1)$, so dass

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \varphi(1) - \varphi(0) \;=\; \varphi(t_0) = \Big\langle y', d_G F(t_0 x_1 + (1-t_0)x_2; x_1 - x_2)\Big\rangle.$$

Hiermit bekommt man

$$\begin{aligned}\|F(x_1) - F(x_2)\| &= \Big\langle y', d_G F(t_0 x_1 + (1-t_0)x_2; x_1 - x_2)\Big\rangle \\ &\le \|y'\| \|d_G F(t_0 x_1 + (1-t_0)x_2)\| \, \|x_1 - x_2\| \\ &\le \sup \Big\{ \|d_G F(w)\| \,\Big|\, w \in [x_1, x_2] \Big\} \|x_1 - x_2\|.\end{aligned}$$

■

3.10 Satz *Sei $F : U \to Y$ in U Gâteaux-differenzierbar. Und sei $d_G F : U \to \mathscr{L}(X, Y)$ stetig in x_0. Dann ist F in x_0 Fréchet-differenzierbar und es gilt $d_G F(x_0) = DF(x_0)$.*

Beweis Da U offen, existiert ein $\delta > 0$, so dass $x_0 + h \in U$ für alle $h \in B_\delta(0)$. Wir setzen

$$H(h) \;=\; F(x_0 + h) - d_G F(x_0; h), \quad h \in B_\delta(0) \subset U.$$

Nach Voraussetzung ist H in $B_\delta(0)$ Gâteaux-differenzierbar mit

$$d_G H(h; v) \;=\; d_G F(x_0 + h; v) - d_G F(x_0; v) \quad \forall\, v \in X.$$

Anwendung von Satz 3.9 (mit $x = 0, y = h$) liefert

$$\begin{aligned}&\|F(x_0 + h) - F(x_0) - d_G F(x_0; h)\| \\ &\quad = \|H(h) - H(0)\| \\ &\quad \le \sup \Big\{ \|d_G H(w)\| \,\Big|\, w \in [0, h] \Big\} \|h\| \\ &\quad = \sup \Big\{ \|(d_G F(x_0 + w) - d_G F(x_0))\| \,\Big|\, w \in [0, h] \Big\} \|h\|.\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von $d_G F$ in x_0 folgt, dass der letzte Ausdruck der obigen Ungleichung ein $o(h)$ ist. Demzufolge ist F in x_0 Fréchet-differenzierbar und es gilt $d_G F(x_0) = DF(x_0)$. ■

3.11 Beispiel 1) $I = [a, b]$, sei $f \in C^1(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Sei $X = C^1(I)$ mit

$$\|u\|_{C^1} \;=\; \|u\|_{C^0} + \|u'\|_{C^0}.$$

Wir betrachten $F : X \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(u) := \int_a^b f(t, u(t), u'(t))dt, \quad u \in X.$$

Berechnung der Gâteaux-Ableitung. Seien $u_0, v \in X$. Dann folgt aus der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration und der Kettenregel

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau} F(u_0+\tau v)|_{\tau=0}\\
&\quad = \frac{d}{d\tau}\int\limits_a^b f(t,u_0(t)+\tau v(t),u_0'(t)+\tau v'(t))dt\Big|_{\tau=0}\\
&\quad = \int\limits_a^b f_u(t,u_0(t),u_0'(t))v(t)+f_{u'}(t,u_0(t),u_0'(t))v'(t)dt.
\end{aligned}$$

Folglich ist F Gâteaux-differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
&d_G F(u_0;v)\\
&\quad = \int\limits_a^b f_u(t,u_0(t),u_0'(t))v(t)+f_{u'}(t,u_0(t),u_0'(t))v'(t)dt
\end{aligned}$$

für alle $v\in X$.

Fréchet-Differenzierbarkeit. Man sieht leicht, dass $d_GF : X\to\mathscr{L}(X,\mathbb{R})$. Aufgrund von Satz 3.10, genügt es zu zeigen, dass d_GF in u_0 stetig ist. Seien $u_0,u,v\in X$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
&|d_GF(u_0;v)-d_GF(u;v)|\\
&\quad = \Big|\int\limits_a^b f_u(t,u_0(t),u_0'(t))v(t)+f_{u'}(t,u_0(t),u_0'(t))v'(t)dt\\
&\qquad - \int\limits_a^b f_u(t,u(t),u'(t))v(t)+f_{u'}(t,u(t),u'(t))v'(t)dt\Big|\\
&\quad\le \int\limits_a^b |f_u(t,u_0(t),u_0'(t))-f_u(t,u(t),u'(t))|dt \max_I |v|\\
&\qquad + \int\limits_a^b |f_{u'}(t,u_0(t),u_0'(t))-f_{u'}(t,u(t),u'(t))|dt \max_I |v'|.
\end{aligned}$$

Wir setzen $M=\|u_0\|_{C^1}+1$. Die Einschränkung von $f_u, f_{u'}$ auf $I\times[-M,M]\times[-M,M]$ ist gleichmäßig stetig. Folglich existiert ein $0<\delta<1$ so dass

$$\begin{cases}
|f_u(t,u_1,w_1)-f_u(t,u_2,w_2)|\le\frac{\varepsilon}{b-a},\\
|f_{u'}(t,u_1,w_1)-f_{u'}(t,u_2,w_2)|\le\frac{\varepsilon}{b-a}\\
\forall\, u_i,w_i\in[-M,M]\,(i=1,2)\quad\text{mit}\quad |u_1-u_2|\le\delta, |w_1-w_2|\le\delta.
\end{cases}$$

Falls $\|u_0 - u\|_{C^1} \leq \delta$, so schließt man aus der obigen Ungleichung

$$|d_G F(u_0; v) - d_G F(u; v)| \leq \varepsilon \|v\|_{C^1} \quad \forall\, v \in X.$$

Folglich $\|d_G F(u_0; \cdot) - d_G F(u; \cdot)\| \leq \varepsilon$, was die Stetigkeit von $d_G F$ in u_0 beweist.

2) Zum Beispiel $f(t, u, w) = f(t, w) = \sqrt{1 + w^2}, \quad (t, u, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann ist $f \in C^1(I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Wir setzen

$$F(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(t)^2} dt, \quad u \in X.$$

Aus 1) folgt, dass F Fréchet-differenzierbar ist und, dass

$$DF(u)v = \int_a^b \frac{u'(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} v'(t) dt, \quad u, v \in X.$$

Ist $u \in X$ mit der Eigenschaft, dass

$$F(v) \geq F(u) \quad \forall\, v \in X \quad \text{mit} \quad v(a) = u(a),\ v(b) = u(b).$$

Sei $v \in X$ mit $v(a) = v(b) = 0$ fixiert. Man betrachte die Abbildung

$$\varphi(\tau) := F(u + \tau v), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Dann hat φ ein globales Minimum in 0 und es gilt

$$\varphi'(0) = d_G F(u; v) = \int_a^b \frac{u'(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} v'(t) dt = 0.$$

Falls außerdem $u \in C^2(I)$, so genügt u der Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dt} \frac{u'(t)}{\sqrt{1 + u'(t)^2}} = -\frac{u''}{(1 + u'(t)^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Dies impliziert, $u(t) = mt + c$.

4. Multilineare Abbildungen und höhere Ableitungen

4.1 Definion Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ Vektorräume. Eine Abbildung $M : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ heißt *multilinear*, falls M in jeder Variablen x_i $(i = 1, \ldots, n)$ linear ist.

4.2 Satz *Sei $M : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ multilinear. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist stetig;

(ii) $\exists c \geq 0$ *so dass*

$$\|M(x_1,\dots,x_n)\| \leq c\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \quad \forall\, (x_1,\dots,x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Hierbei sei $\|(x_1,\dots,x_n)\| := \max_{i=1,\dots,n} \|x_i\|$.

Beweis $\Rightarrow$ Da M stetig in $(0,\dots,0)$ ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|M(x_1,\dots,x_n)\| \leq 1 \quad \forall\, \|(x_1,\dots,x_n)\| \leq \delta.$$

Sei $(x_1,\dots,x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. Falls, $x_i = 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$, so ist, $M(x_1,\dots,x_n) = 0$. Ansonsten, setzt man $x_i' = \frac{\delta x_i}{\|x_i\|}$ $(i = 1,\dots,n)$, so ergibt sich

$$\frac{\delta}{\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|}\|M(x_1,\dots,x_n)\| \;=\; \|M(x_1',\dots,x_n')\| \;\leq\; 1.$$

Dies bestätigt die Behauptung mit $c = \delta^{-1}$.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\|(x_1,\dots,x_n)\| \leq \varepsilon c^{-1}$, folgt

$$\|M(x_1,\dots,x_n)\| \;\leq\; c\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \;\leq\; \varepsilon.$$

Folglich ist M stetig in (0,...,0). Die Stetigkeit in $(x_1,\dots,x_n)$ ergibt sich nun unmittelbar aus der Multilinearität. Man beachte hierbei

$$\begin{aligned}
&M(x_1,\dots,x_n) - M(x_1',\dots,x_n') \\
&\;= M(x_1,\dots,x_n) - M(x_1', x_2 \dots, x_n') \\
&\qquad + M(x_1', x_2 \dots, x_n') - M(x_1', x_2', x_3 \dots, x_n') \\
&\qquad + \ldots + M(x_1', x_2' \dots x_{n-1}', x_n) - M(x_1', x_2', \dots, x_n') \\
&\;= M(x_1 - x_1', \dots, x_n) + M(x_1', x_2 - x_2', \dots, x_n') \\
&\qquad + \ldots + M(x_1', x_2' \dots x_{n-1}', x_n - x_n').
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung findet man

$$\begin{aligned}
&\|M(x_1,\dots,x_n) - M(x_1',\dots,x_n')\| \\
&\;\leq c\|x_1 - x_1'\|\|x_2\| \cdot \ldots \cdot c\|x_n\| \;+\; \|x_1'\|\|x_2 - x_2'\|\|x_3\| \cdot \ldots \cdot c\|x_n\| \\
&\qquad + \;\ldots + c\|x_1'\| \cdot \ldots \cdot \|x_{n-1}'\|\|x_n - x_n'\|.
\end{aligned}$$

■

Notation. $\mathscr{L}(X_1,\dots,X_n;Y) := \{M : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y \,|\, \text{M multilinear und stetig}\}$
Ist ein Vektorraum und wird zu einem normierten Raum vermöge der Norm

$$\|M\| := \sup_{\|(x_1,\dots,x_n)\|=1} \|M(x_1,\dots,x_n)\|.$$

ist Y vollständig, so ist $\mathscr{L}(X_1,\dots,X_n;Y)$ ebenfalls vollständig, also ein Banachraum. Falls $X_i = X$ für alle $i = 1,\dots,n$, so schreiben wir $\mathscr{L}_n(X;Y)$ anstelle von $\mathscr{L}(X,\dots,X;Y)$.

4.3 Beispiel $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}, M = \mathscr{L}_2(X;Y)$. Wählen in $\mathbb{R}^n$ die kanonische Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Seien $x_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i, y_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{e}_i$. Unter Verwendung der Multilinearität von M folgt

$$M(x_1, x_2) = M\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j M(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{M} \boldsymbol{\beta},$$

wobei $\boldsymbol{M} \in M(n \times n)$ die Matrix $M_{ij} = M(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\,(i, j = 1, \ldots, n)$ bezeichne. Wir sehen also dass $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \cong M(n \times n) \cong \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Benutzt man außerdem die kanonische Isometrie $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, so folgt

$$\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \cong \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})).$$

Allgemeiner gilt sogar das follgende

4.4 Lemma *Seien X, Y Vektorräume. Die Abbildung $\Phi : \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y)) \to \mathscr{L}_2(X;Y)$ gegeben durch*

$$\Phi(A)(x_1, x_2) := A(x_1)(x_2), \quad A \in \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y)), \quad x_1 \in X, x_2 \in Y$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis 1. $\Phi(A)$ *ist multilinear*: Sei $x_2 \in X$. Dann ist $\Phi(A)(\cdot, x_2) = A(\cdot)x_2$ linear da $A(\cdot)$ linear ist. Sei $x_1 \in X$. Dann ist $\Phi(A)(x_1, \cdot) = A(x_1) \in \mathscr{L}(X;Y)$, also linear.

2. Sei $A \in \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y))$. Dann

$$\begin{aligned}\|\Phi(A)\| &= \sup_{\|(x_1,x_2)\| \le 1} \|\Phi(A)(x_1, x_2)\|_Y = \sup_{\|x_1\| \le 1, \|x_2\| \le 1} \|A(x_1)(x_2)\|_Y \\ &= \sup_{\|x_1\| \le 1} \|A(x_1)\|_{\mathscr{L}(X;Y)} = \|A\|_{\mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y))}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist Φ injektiv.

3. Φ *ist surjektiv.* Sei $M \in \mathscr{L}_2(X;Y)$. Wir definieren $A \in \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y))$ durch

$$A(x_1)(x_2) = M(x_2, x_2), \quad x_1, x_2 \in X.$$

Wie man leich nachprüft ist $\Phi(A) = M$.

4. Dass Φ^{-1} stetig ist folgt sofort aus der Eigenschaft $\|\Phi^{-1}(M)\| = \|M\|$ für alle $M \in \mathscr{L}_2(X;Y)$. . ■

4.5 Definition Sei $U \subset X$ offen. Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar in U mit Ableitung $DF : U \to \mathscr{L}(X;Y)$. F heißt zweimal Fréchet-differenzierbar in $u_0 \in U$, falls DF in u_0 Fréchet-differenzierbar ist.

Bezeichnung: $D^2F(u_0)$.

Ist F in jedem Punkt $u \in U$ zweimal Fréchet-differenzierbar, so heißt F zweimal Fréchet-differenzierbar in U. Es gilt dann

$$D^2F : U \to \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X;Y)) \overset{4.4}{\cong} \mathscr{L}_2(X;Y).$$

Ist $D^2F : U \to \mathscr{L}_2(X;Y)$ stetig, so heißt F zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in U und wir schreiben $F \in C^2(U;Y)$.

4.6 Beispiel $X = U = C^0(I)\,(I = [a,b])$. Sei $F : X \to X$ gegeben durch

$$F(u)(t) \;=\; u(t)^2, \quad u \in X, \quad t \in I.$$

In 3.3; 4. wurde bewiesen, dass $F \in C^1(X;X)$ mit $DF(u)h = 2u \cdot h$. Für $u, h_1, h_2 \in X$ bekommt man

$$DF(u+h_1)h_2 - DF(u)h_2 \;=\; 2(u+h_1)\cdot h_2 - 2u \cdot h_2 \;=\; 2h_1 \cdot h_2.$$

Folglich ist DF Fréchet-differenzierbar mit $D^2F(h_1,h_2) = 2h_1 \cdot h_2 \quad (h_1, h_2 \in X)$.

4.7 Lemma *Sei $\boldsymbol{F} : U \to Y$ zweimal Fréchet-differenzierbar in $u_0 \in U$. Dann ist für jedes $k \in X$ die Abbildung $F_k : U \to X$,*

$$F_k(u) := DF(u)k, \quad u \in X,$$

Fréchet-differenzierbar in u_0 und es gilt

$$DF_k(u_0)h \;=\; D^2F(u_0)(h,k) \quad \forall\, h \in X.$$

Beweis Sei $h \in X$. Da DF in u_0 Fréchet-differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned}
&F_k(u_0+h) - F_k(u_0) - D^2F(u_0)(h,k)\\
&\quad = F_k(u_0+h) - F_k(u_0) - D^2F(u_0)(h)k\\
&\quad = (DF(u_0+h) - DF(u_0) - D^2F(u_0)(h))k\\
&\quad = o(h)k.
\end{aligned}$$

■

4.8 Satz *Sei $F : U \to Y$ zweimal Fréchet-differenzierbar in $u_0 \in U$. Dann ist $D^2F(u_0)$ symmetrisch, das heißt*

$$D^2F(h,k) \;=\; D^2F(k,h) \quad \forall\, h,k \in X.$$

Beweis Seien $h, k \in X$. Sei $y' \in Y'$. Wir definieren

$$f(x_1,x_2) \;=\; \langle y', F(u_0 + x_1h + x_2k)\rangle, \quad (x_1,x_2) \in B_R(0).$$

Wie man leicht sieht gilt $f = \Psi \circ F \circ \Phi$, wobei $\Phi : B_R(0) \to X$ und $\Psi : Y \to \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= u_0 + x_1 h + x_2 k, \quad (x_1, x_2) \in B_R(0), \\ \Psi(y) &= \langle y', y \rangle, \quad y \in Y. \end{aligned}$$

Sowohl Φ als auch Ψ sind Fréchet-differenzierbar mit $D\Phi(x_1, x_2)(s, t) = sh + tk$ und $D\Psi(y)\eta = \langle y', \eta \rangle$. Die Kettenregel (vgl. Lemma 3.4) impliziert, dass auch f Fréchet-differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} & Df(x_1, x_2)(s, t) \\ &= D\Psi(F(u_0 + x_1 h + x_2 k)) \cdot DF(u_0 + x_1 h + x_2 k) \cdot D\Phi(x_1, x_2)(s, t) \\ &= D\Psi(F(u_0 + x_1 h + x_2 k)) \cdot DF(u_0 + x_1 h + x_2 k)(sh + tk) \\ &= \langle y', DF(u_0 + x_1 h + x_2 k)(sh + tk) \rangle. \end{aligned}$$

Folglich ist $f \in C^1(B_R(0))$. Nochmaliges Anwenden der Kettenregel zeigt, dass Df in $(0, 0)$ total differenzierbar ist, und es gilt

$$D^2 f(0, 0)((s_1, t_1), (s_2, t_2)) = \langle y', D^2 F(u_0)(s_1 h + t_1 h, s_2 h + t_2 h) \rangle$$

für alle $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Aus dem Satz von Schwarz (siehe unten) folgt nunmehr

$$\langle y', D^2 F(u_0)(h, k) \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) = \langle y', D^2 F(u_0)(k, h) \rangle.$$

Der Satz von Hahn-Banach garantiert schließlich $D^2 F(u_0)(h, k) = D^2 F(u_0)(k, h)$.

Beweis des Satzes von Schwarz: Sei $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f : C^1(U)$ und Df in $(0, 0)$ total differenzierbar. Mithilfe der Newton-Leibnitz Formel bekommt man für $0 < t < R$

$$\begin{aligned} & f(te_1 + te_2) - f(te_2) - f(te_1) + f(0, 0) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau t e_1 + t e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau t e_1) d\tau \, t \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t(\tau e_1 + t e_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau t e_1) d\tau \, t \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t(\tau e_1 + t e_2)) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) - D\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)(t(\tau e_1 + t e_2)) d\tau \, t \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tau t e_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) - D\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)(t\tau e_1) d\tau \, t \, + \, t^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0). \\ &= o(t)t \, + \, t^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0). \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned}
&f(te_1 + te_2) - f(te_2) - f(te_1) + f(0,0) \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(te_1 + \tau te_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tau te_2) d\tau t \\
&\quad = o(t)t \; + \; t^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0).
\end{aligned}$$

Also gilt $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0).$ ∎

Höhere Ableitungen können nun induktiv definiert werden. Wir sagen, $F : U \to Y$ ist in $u_0 \in U$ n-mal Fréchet-differenzierbar falls $D^{n-1}F : U \to \mathscr{L}_{n-1}(X;Y)$ in u_0 Frechet-differenzierbar ist. Wir schreiben:

$$D^n F(u_0) := D(D^{n-1}F(u_0)) \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}_{n-1}(X;Y)) \cong \mathscr{L}_n(X;Y).$$

Die Isometrie $\Phi : \mathscr{L}(X; \mathscr{L}_{n-1}(X;Y)) \to \mathscr{L}_n(X;Y)$ ist gegeben via

$$\Phi(A)(x_1, \ldots, x_n) \;=\; A(x_1)(x_2, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n,$$

$A \in \mathscr{L}(X; \mathscr{L}_{n-1}(X;Y))$. Ist F in U n-mal Fréchet-differenzierbar und dann ist $D^nF : U \to \mathscr{L}_n(X;Y)$ die n-te Ableitung von F. Ist darüber hinaus D^nF stetig, so schreibt man $F \in C^n(U;Y)$.

Unter Verwendung von Satz 4.8 bekommt man unmittelbar den

4.9 Satz (**Symmetrie**) *Sei $F \in C^{n-1}(U;Y)$. Sei F in $u_0 \in U$ n-mal Fréchet-differenzierbar. Dann ist $D^nF \in \mathscr{L}_n(X;Y)$ symmetrisch*

4.10 Satz (**Taylor**) Sei $F \in C^{n+1}(U;Y)$ und sei $[x, x+h] \in U$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F(x+h) \;=\; & F(x) + DF(x)h + \frac{1}{2}D^2F(x)(h,h) + \ldots + \frac{1}{n!}D^nF(x)(h, \ldots, h) \\
& + \; R_{n+1}(x,h),
\end{aligned}$$

wobei

$$R_{n+1}(x,h) \;=\; \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1}F(x+th)(h, \ldots, h)dt.$$

Beweis Sei $y' \in Y'$ beleibig. Betrachte $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) := \langle y', F(x+th) \rangle, \quad t \in [0,1].$$

Es ist $\phi(0) = \langle y', F(x)\rangle$ und $\phi(1) = \langle y', F(x+h)\rangle$. Wie die Kettenregel zeigt, ist $\phi \in C^{n+1}([0,1])$ und man berechnet

$$\phi'(t) = \langle y', DF(x+th)h\rangle, \quad \phi''(t) = \langle y', D^2F(x+th)(h,h)\rangle, \ldots$$

Wendet man die bekannte Taylorfolrmel (Analysis I) auf ϕ an so findet man

$$\begin{aligned}
\langle y', F(x+h)\rangle &= \phi(1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{n+1}(t)dt \\
&= \Big\langle y', F(x)\rangle + \langle y', DF(x)h\rangle + \ldots + \frac{1}{n!}\langle y', D^nF(x)(h,\ldots,h)\Big\rangle \\
&\quad + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\langle y', D^{n+1}F(x+th)(h,\ldots,h)\rangle dt.
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $D^{n+1}F$ folgt die Stetigkeit von $y(t) = D^{n+1}F(x+th)(h,\ldots,h)$. Mithilfe von Satz 2.1 und Lemma 2.3 bekommt man

$$\begin{aligned}
\langle y', F(x+h)\rangle &= \Big\langle y', F(x) + DF(x)h + \ldots + \frac{1}{n!}D^nF(x)(h,\ldots,h) \\
&\qquad + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}F(x+th)(h,\ldots,h)dt\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mithilfe des Satzes von Hahn-Banach. ■

4.11 Folgerung *Sei $F \in C^1(U;Y)$. Seien $x_1, x_2 \in U$, so dass $[x_1,x_2] \subset U$. Dann existiert ein $\xi \in [x_1,x_2]$, so dass*

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \le \|DF(\xi)\|\,\|x_1 - x_2\|.$$

Beweis Aus Satz 4.10 folgt

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 DF(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)dt.$$

Mithilfe von Lemma 2.2 folgt

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \le \int_0^1 \|DF(x_2 + t(x_1-x_2))\|dt\|x_1 - x_2\|.$$

Unter Verwedung des MWS der Integralrechnung findet man ein $t_0 \in (0,1)$, so dass

$$\int_0^1 \|DF(x_2 + t(x_1 - x_2))\|dt = \|DF(x_2 + t_0(x_1 - x_2))\|.$$

Die Behauptung ergibt sich mit $\xi = x_2 + t_0(x_1 - x_2)$. ■

4.12 Satz (**Anwendung zur Untersuchung von Extrema**) *Sei $U \subset X$ offen. Sei $F \in C^2(U;\mathbb{R})$ ein Funktional. Sei $u_0 \in U$, so dass*

(i) $DF(u_0) = 0$,

(ii) $D^2F(u_0)(h,h) \geq c_0\|h\|^2 \quad \forall\, h \in X$,

Dann hat F in u_0 ein striktes lokales Minimum.

Beweis Sei $0 < R < +\infty$, so dass $B_R(u_0) \subset U$. Da D^2F in u_0 stetig ist existiert ein $0 < \delta < R$, so dass $\|D^2F(u_0) - D^2F(u)\| \leq c_0/2$ für alle $u \in B_\delta(u_0)$. Aus Satz 4.10 zusammen mit (i) und (ii) erhält man für alle $h \in B_\delta(0)$

$$\begin{aligned}
F(u_0+h) &= F(u_0) + DF(u_0)h + \int_0^1 (1-t)D^2F(u_0+th)(h,h)dt \\
&\geq F(u_0) + \int_0^1 (1-t)D^2F(u_0))(h,h)dt \\
&\qquad + \int_0^1 (1-t)(D^2F(u_0+th) - D^2F(u_0))(h,h)dt \\
&\geq F(u_0) + \frac{c_0}{2}\|h\|^2 - \int_0^1 (1-t)\|D^2F(u_0+th) - D^2F(u_0))\|dt\|h\|^2. \\
&\geq F(u_0) + \frac{c_0}{2}\|h\|^2 - \frac{c_0}{4}\|h\|^2 > F(u_0).
\end{aligned}$$

Also hat F in u_0 ein striktes lokales Minimum. ■

4.13 Beispiel Sei $I = (a,b)$ und $X = W_0^{1,2}(I)$ mit

$$\|u\|_X^2 = \|u\|^2 = \int_a^b u'(t)^2 dt, \quad u \in X.$$

Sei $w \in W^{1,2}(I)$. Wir betrachten das Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) = \int_a^b \sqrt{1 + (w'(t) + u'(t))^2}dt, \quad u \in X.$$

Wie in 3.12; 2) zeigt man, dass $F \in C^1(X)$ und es gilt:

$$DF(u)h = \int_a^b \frac{w'(t) + u'(t)}{\sqrt{1 + (w'(t) + u'(t))^2}}h'(t)dt, \quad u,h \in X.$$

Weiter ist F zweimal Fréchet-differenzierbar mit

$$D^2F(u)(h,k) \;=\; \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{1+(w'(t)+u'(t))^2}^3} k'(t)h'(t)dt, \quad u,h,k \in X.$$

Nun sei $u_0 \in X$, so dass $DF(u_0) = 0$. Wir nehmen an, dass $w + u_0 \in C^2(I)$. Wie in 3.12; 2) sieht man, dass $(w + u_0)'' = 0$, also $w + u_0 = mt + c$ für gewisse Konstanten $m, c \in \mathbb{R}$. Da aber $w(a) + u_0(a) = w(a)$ und $w(b) + u_0(b) = w(b)$ haben wir

$$m = \frac{w(a) - w(b)}{a-b}, \quad c = \frac{aw(b) - bw(a)}{a-b}.$$

Dies impliziert

$$u_0(t) \;=\; \frac{(b-t)w(a) + (t-a)w(b)}{b-a} - w(t), \quad t \in I.$$

Für die zweite Ableiting erhält man

$$\begin{aligned} D^2F(u_0)(h,h) \;&=\; \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{1+(w'(t)+u_0'(t))^2}^3} h'(t)^2 dt \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{1+m^2}^3}\|h\|^2. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 4.12 hat F in u_0 ein lokales Minimum. ■

5. Satz über implizite Funktionen

Notation: $ISO(X,Y) = \{T \in \mathscr{L}(X,Y) \,:\, T \text{ bijektiv}\}$.

5.1 Lemma *Sei $T \in ISO(X,Y)$. Dann ist $T + S \in ISO(X,Y)$ für alle $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ mit $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(X,Y)}$ und es gilt:*

$$\|(T+S)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \;\leq\; \frac{\|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(X,Y)}}{1 - \|T^{-1}S\|_{\mathscr{L}(X,X)}}.$$

Insbesondere ist $ISO(X,Y)$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X,Y)$.

Beweis Sei $T \in ISO(X,Y)$. Dann ist $T^{-1} \in ISO(Y,X)$. Sei $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ mit $\|S\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(Y,X)}$. Dann folgt

$$\|T^{-1}S\|_{\mathscr{L}(X,X)} \;\leq\; \|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)}\|S\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < 1.$$

Unter Verwendung der Neumannschen Reihe findet man $I + T^{-1}S \in ISO(X,X)$ und

$$(T+S)^{-1} \;=\; (I+T^{-1}S)^{-1}T^{-1} \;=\; \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(T^{-1}S)^k\Big)T^{-1}.$$

Folglich ist $T+S \in ISO(X,Y)$. Die obige Abschätzung folgt sofort aus $\|(T^{-1}S)^k\|_{\mathscr{L}(X,X)} \leq \|T^{-1}S\|^k_{\mathscr{L}(X,X)}$ $(k \in \mathbb{N})$ und der Berechnung der entsprechenden geometrischen Reihe.

■

Hilfssatz *Sei $U \subset X$ offen und konvex. Sei $F \in C^1(U;Y)$ mit $DF(x) \in ISO(X,Y)$ für alle $x \in U$. Dann gilt*

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 = {} & (DF(x_0))^{-1}(F(x_1) - F(x_2)) \\ & - (DF(x_0))^{-1} \int_0^1 (DF(x_2 + t(x_1 - x_2)) - DF(x_0))dt(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

für alle $x_0, x_1, x_2 \in U$.

Beweis Seien $x_0, x_1, x_2 \in U$. Aus dem Satz 4.10 mit $n = 0$ folgt

$$\begin{aligned} & F(x_1) - F(x_2) \\ & \quad = \int_0^1 DF(x_2 + t(x_1 - x_2))dt(x_1 - x_2) \\ & \quad = DF(x_0)(x_1 - x_2) + \int_0^1 (DF(x_2 + t(x_1 - x_2)) - DF(x_0))dt(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Wendet man auf beiden Seiten $(DF(x_0))^{-1}$ an, und stellt das Ergebnis nach $x_1 - x_2$ um, so erhält man die Behauptung. ■

5.2 Satz (**Offene Abbildung**) *Sei $U \subset X$ offen. Sei $F \in C^1(U;Y)$, so dass $DF(x) \in ISO(X,Y)$ für alle $x \in U$, dann ist $F(U) \subset Y$ offen.*

Beweis Sei $y_0 \in F(U)$. Sei $x_0 \in U$ mit $F(x_0) = y_0$. Wir setzen

$$c_0 := \|[DF(x_0)]^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)}.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $DF : U \to \mathscr{L}(X,Y)$ existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, so dass

$$\|DF(x) - DF(x_0)\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \frac{1}{2c_0} \quad \forall\, x \in \overline{B_\delta(x_0)}.$$

Sei $y \in Y$ mit $|y - y_0| < \frac{\delta}{2c_0}$. Ziel ist es die Gleichung $F(x) = y$ in U zu lösen. Hierfür definieren wir

$$\Phi(x) := x - [DF(x_0)]^{-1}(F(x) - y), \quad x \in \overline{B_\delta(x_0)}.$$

Wir zeigen, dass $\Phi : \overline{B_\delta(x_0)} \to \overline{B_\delta(x_0)}$ strikt kontraktiv ist, und somit einen Fixpunkt besitzt.

Seien $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$. Unter Verwendung der Identität $(*)$ aus dem Hilfssatz bekommt man kommt man

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1) - \Phi(x_2) \;&=\; x_1 - x_2 - [DF(x_0)]^{-1}(F(x_1) - F(x_2)) \\
&=\; -(DF(x_0))^{-1} \int_0^1 (DF(x_2 + t(x_1 - x_2)) - DF(x_0))dt(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2 erhält man

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \;&\leq\; c_0 \int_0^1 \|DF(x_2 + t(x_1 - x_2)) - DF(x_0))\|dt\|x_1 - x_2\| \\
&\leq\; c_0 \frac{1}{2c_0}\|x_1 - x_2\| \;=\; \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Folglich ist Φ strikt kontraktiv. Außerdem folgt mithilfe der letzten Ungleichung mit $x_1 = x \in B_\delta(x_0), x_2 = x_0$ und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - x_0\| \;&\leq\; \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| \;+\; \|\Phi(x_0) - x_0\| \\
&\leq\; \frac{1}{2}\|x - x_0\| \;+\; \|[DF(x_0)]^{-1}(y_0 - y)\| \\
&\leq\; \frac{\delta}{2} \;+\; c_0\|y - y_0\| \leq \delta,
\end{aligned}$$

also $\Phi(x) \in \overline{B_\delta(x_0)}$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat Φ einen Fixpunkt $x_* \in \overline{B_\delta(x_0)}$, was äquivalent ist zu $F(x_*) = y$. Folglich ist $B_{\delta/2c_0}(y_0) \subset F(U)$. Somit ist $F(U)$ offen in Y. ■

5.3 Satz (**Lokale Umkehrbarkeit**) *Sei $F \in C^1(U;Y)$. Sei $x_0 \in U$ mit $DF(x_0)) \in ISO(X,Y)$. Dann existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$, so dass $F|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to F(B_\delta(x_0))$ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis Da nach Lemma 5.1 die Menge $ISO(X,Y)$ offen ist und $DF : U \to \mathscr{L}(X,Y)$ stetig ist, ist die Menge $\{x \in U \,|\, DF(x) \in ISO(X,Y)\}$ in U offen. Da $DF(x_0) \in ISO(X,Y)$ existiert ein $0 < R < \operatorname{dist}(x_0, U)$, so dass $DF(x) \in ISO(X,Y)$ für alle $x \in \overline{B_R(x_0)}$. Insbesondere, ist die Abbildung $x \in B_R(x_0) \mapsto (DF(x))^{-1}$ stetig. Insbesondere können wir annehmen, dass $\|(DF(x))^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)}$ auf $B_R(x_0)$ beschränkt ist. Wir setzen

$$c_0 := \sup_{x \in B_R(x_0)} \|(DF(x))^{-1}\|_{\mathscr{L}(Y,X)}.$$

Da DF stetig ist, existiert ein $0 < \delta < R$, so dass

$$\|DF(x) - DF(x_0)\| \;\leq\; \frac{1}{4c_0} \quad \forall\, x \in B_\delta(x_0).$$

Wir definieren nun $f := F|_{B_\delta(x_0)}$ auf $F(B_\delta(x_0))$.

1° f *ist bijektiv.* Seien $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Aus $(*)$ ergibt sich

$$x_1 - x_2 \;=\; -[DF(x_0)]^{-1} \int_0^1 (DF(x_2 + t(x_1 - x_2)) - DF(x_0))dt(x_1 - x_2).$$

Wie im Beweis von Satz 5.2 unter Verwendung von Lemma 2.2 folgt

$$\|x_1 - x_2\| \;\leq\; c_0 \frac{1}{2c_0} \|x_1 - x_2\| \;=\; \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Also $x_1 = x_2$. Folglich ist f injektiv also auch bijektiv.

2° $f(B_\delta(x_0)) \subset Y$ *ist offen und* $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \to B_\delta(x_0)$ *ist stetig.* Wegen $DF(x) \in ISO(X, Y)$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$, folgt aus Satz 5.2, $f(B_\delta(x_0))$ ist in Y offen. Nun sei $V \subset B_\delta(x_0)$ offen. Da f bijektiv ist erhalten wir $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$. Aus Satz 5.2 folgt, dass $f(V) = F(V)$ in Y offen ist. Also ist f^{-1} stetig.

3° f^{-1} *ist stetig differenzierbar.* Sei $y \in f(B_\delta(x_0))$ mit $y = f(x)\,(x \in B_\delta(x_0))$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung findet man

$$\|DF(x) - DF(x')\| \;\leq\; \frac{1}{4c_0} + \frac{1}{4c_0} = \frac{c_0}{2} \quad \forall\, x' \in B_\delta(x)$$

Sei $h \in Y$, so dass $y + h \in f(B_\delta(x))$. Wir setzen $x' = f^{-1}(y + h) \in B_\delta(x)$. Unter Verwendung von $(*)$ mit $x_0 = x, x_1 = x, x_2 = x'$ erhält man

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\\
&\;= x' - x\\
&\;= [Df(x)]^{-1}(f(x') - f(x))\\
&\qquad - [DF(x)]^{-1} \int_0^1 (Df(x' + t(x - x')) - Df(x))dt(x - x')\\
&\;= [DF(x)]^{-1}h - [DF(x)]^{-1} \int_0^1 (Df(x' + t(x - x')) - Df(x))dt(x - x').
\end{aligned}$$

Wie oben bekommt man unter Verwendung von Lemma 2.2

$$\begin{aligned}
\|x - x'\| \;&\leq\; c_0\|h\| \;+\; c_0 \int_0^1 \|Df(x' + t(x - x')) - Df(x)\|dt\|x - x'\|.\\
&\leq\; c_0\|h\| \;+\; c_0 \frac{1}{2c_0}\|x - x'\|.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\|f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)\| = \|x - x'\| \;\leq\; 2c_0\|h\|.$$

Hiermit bekommt man

$$\begin{aligned}\|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1}h\| &\le 2c_0 \int_0^1 \|Df(x'+t(x-x')) - Df(x)\|dt\|h\| \\ &= o(h).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f^{-1} in y Fréchet-differenzierbar ist mit

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1} = (DF(f^{-1}(y)))^{-1}.$$

Da $(DF)^{-1}$ und f^{-1} stetig sind ist auch $Df^{-1} = (DF)^{-1} \circ f^{-1}$ stetig, was die Aussage des Satzes vollständig beweist.

■

5.4 Satz (**Satz über implizite Funktionen**) *Seien X, Y, Z Banachräume. Seien $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offene Mengen. Sei $F : U \times V \to Z$ stetig Fréchet-differenzierbar. Sei $(x_0, y_0) \in U \times V$, so dass $D_yF(x_0, y_0)) \in ISO(Y, Z)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ des Punktes (x_0, y_0) und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_1 \to V$ mit $g(x_0) = y_0$, so dass $\forall\,(x, y) \in U_1 \times V_1$:*

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x).$$

Außerdem gilt

$$Dg(x) = -[D_yF(x,g(x))]^{-1} \cdot DF_x(x,g(x)), \quad x \in U_1.$$

Beweis Wir definieren die Abbildung $H : U \times V \to X \times Z$, gemäß

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ F(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in U \times V.$$

Wie man leicht sieht, ist H Fréchet-differenzierbar mit

$$\begin{cases} DH(x,y)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} h_1 \\ D_xF(x,y)h_1 + D_yF(x,y)h_2 \end{pmatrix}, \\ (x,y) \in U \times V, \quad h_1 \in X, h_2 \in Y. \end{cases}$$

1. *$DH(x_0, y_0)$ ist injectiv* Denn aus $DH(x_0, y_0)(h_1, h_2) = 0$ folgt $h_1 = 0$ und hiermit $D_yF(x_0, y_0)h_2 = 0$. Nach Vorraussetzung ist $h_2 = 0$.

2. *$DH(x_0, y_0)$ ist surjektiv* Sei $(x, z) \in X \times Z$. Nach Voraussetzung ist $DF_y(x_0, y_0)$ surjektiv. Also existiert ein $h_2 \in Y$, so dass

$$DF_y(x_0,y_0)h_2 = z - DF_x(x_0,y_0)x.$$

Hiermit $DH(x_0, y_0)(x, h_2) = (x, z)^t$. Also ist $DH(x_0, y_0)$ surjektiv.

Dies zeigt, dass $DH(x_0,y_0) \in ISO(X\times Y, X\times Z)$. Folglich existieren nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit, offene Mengen $\tilde{U} \subset U$ und $\tilde{V} \subset V$, so dass $\tilde{H} = H|_{\tilde{U}\times\tilde{V}}$ ein Diffeomorphismus auf $H(\tilde{U}\times\tilde{V})$ ist. Nun definieren wir $G = \tilde{H}^{-1}$ und $G_1 = pr_x \circ G$ und $G_2 = pr_y \circ G$. Hiermit ergibt sich

$$H(G(x,z)) \;=\; \begin{pmatrix} G_1(x,z) \\ F(G_1(x,z), G_2(x,z)) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,z) \in H(\tilde{U} \times \tilde{V})$. Also

$$F(x, G_2(x,z)) \;=\; z \quad \forall\, (x,z) \in H(\tilde{U} \times \tilde{V}).$$

Da $H(\tilde{U} \times \tilde{V})$ in $X \times Z$ offen ist und $(H(x_0,y_0)) \in H(\tilde{U} \times \tilde{V})$ existiert eine offenen Umgebung $U_1 \times W_1 \subset H(\tilde{U} \times \tilde{V})$ von $H(x_0,y_0))$. Wir setzen

$$g(x) := G_2(x, F(x_0,y_0)), \quad x \in U_1.$$

Aus der Definition von G_2 folgt $F(x,g(x)) = F(x, G_2(x, F(x_0,y_0))) = F(x_0,y_0)$.
Nun seien $(x,y) \in U_1 \times V_1$. Dann gilt $F(x,y) = (x_0,y_0)$ g.d.w.

$$H(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x \\ F(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ F(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ F(x,g(x)) \end{pmatrix} = H(x,g(x)).$$

Wegen $g(x) \in \tilde{V}$ und der Injektivität von H ist die obige Identität äquivalent zu $y = g(x)$.
Als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen ist g ebenfalls stetig differenzierbar. Unter Verwendung der Kettenregel und $F(x,g(x)) =$ konstant bekommt man

$$0 \;=\; D_xF(x,g(x)) \;+\; D_yF(x,g(x)) \circ Dg(x) \quad \forall\, x \in U_1.$$

Nach Umstellen dieser Gleichung erhält man

$$Dg(x) \;=\; -[D_yF(x,g(x))]^{-1} \cdot DF_x(x,g(x)), \quad \forall\, x \in U_1.$$

■

5.5 Beispiel Seien $f \in C^0([0,1])$, $g \in C^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in C^2([0,1])$, so dass

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -u'' + \lambda g(u) \;=\; f \quad \text{in} \quad (0,1) \\ u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0 \end{cases}$$

Sei $u_0 \in C^2([0,1])$ eine Lösung von (P_{λ_0}).

Beh.: Falls $\lambda_0 g'(u_0(x)) > -\pi^2$ für alle $x \in [0,1]$, so existiert $\varepsilon > 0$, so dass (P_λ) eine eindeutige Lösung $u = u_\lambda$ in Umgebung von u_0 für $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ hat.

Vorbetrachtung Setzen $V = W_0^{1,2}(0,1)$. Dann ist V Hilbertraum mit Skalarprodukt $((u,v)) = \int\limits_0^1 u'v'dx$. Ferner sei $H = L^2(0,1)$ der übliche Hilbertraum. Dann ist $V \hookrightarrow H$. Sei $c_0 > 0$ die beste Einbettungskonstante, d.h. c_0 ist die kleinste aller Konstanten $c > 0$ für die gilt

$$\int\limits_0^1 (v')^2 dx \geq \frac{1}{c^2} \int\limits_0^1 v^2 dx \quad \forall\, v \in V.$$

Aus der liearen FA folgt, dass $\lambda = 1/(c_0)^2$ ist der kleinste Eigenwert der Gleichung

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in} \quad (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Wegen $u(0) = 0$ kommt nur in Frage $u = \alpha \sin(\sqrt{\lambda} x)$ als Lösung. Aus $\sin(\sqrt{\lambda} 1) = 0$ folgt $\lambda = k^2\pi^2$ $(k \in \mathbb{N})$. Somit ist der kleinste Eigenwert $\lambda = \pi^2$. Dies impliziert

$$\int\limits_0^1 (v')^2 dx \geq \pi^2 \int\limits_0^1 v^2 dx \quad \forall\, v \in V.$$

Nun $q \in C^0([0,1])$ mit $q(x) < \pi^2$ für alle $x \in [0,1]$. Wir definieren $L : V \to V'$ durch

$$\langle Lu, v\rangle \;=\; ((u,v)) - (qu, v), \quad u, v \in V.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $0 < \beta < 1$, so dass $q \leq \beta\pi^2$. Folglich haben wir

$$\langle Lu, u\rangle \;=\; \|u\|^2 - \beta\pi^2 |u|^2 \geq (1-\beta)\|u\|^2 \quad \forall\, u \in V.$$

Dies zeigt, dass L abgeschlossenes Bild hat und injektiv ist. Da L außerdem selbstadjungiert ist, folgt, dass L bijektiv ist.

Beweis der obigen Aussage: Wir setzen $X = \mathbb{R}, Y = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ und $Z = C^0([0,1])$. Wir definieren $F : X \times Y \to Z$ durch

$$F(\lambda, u) \;=\; -u'' + \lambda g(u) - f, \quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times Y.$$

Wir berechnen

$$D_y F(\lambda_0, u_0)h \;=\; -h'' + \lambda_0 g'(u_0)h, \quad h \in Y.$$

Mit $q = -\lambda_0 g'(u_0)$ gilt also $D_y F(\lambda_0, u_0)h = -h'' - qh$, wobei nach Voraussetzung $q < \pi^2$.

$D_y F(\lambda_0, u_0)$ *ist bijektiv:* Aus der Vorbemerkung folgt sofort die Injektivität, denn $D_y F(\lambda_0, u_0)h = 0$ impliziert $Lh = 0$ und wegen $q < \pi^2$ ergibt sich $h = 0$. Nun sei $z \in Z$. Wegen $Z \hookrightarrow V'$ existiert ein $h \in V$, so dass $Lh = z$. Da $qh \in C^0([0,1])$ folgt $h'' = -qh - z \in C^0([0,1])$, also $h \in Y$ und $D_y F(\lambda_0, u_0)h = z$. Folglich ist $D_y F(\lambda_0, u_0)$ surjektiv. Die Behauptung ergibt sich nun sofort unter Verwendung von Satz 5.4.

Nichtlineare Funktionalanalysis

II. Abbildungsgrad und Fixpunktsätze

6. Der Brouwersche Abbildungsgrad

6.1 **Motivation** Sei $f \in C^0([a,b]) \cap C^1(a,b)$ mit $f(a) \neq 0$ und $f(b) \neq 0$. Sei $S = f^{-1}(\{0\})$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in S$. Wir definieren

$$\deg(f) = \sum_{x \in S} \operatorname{sign}(f'(x)).$$

Diese Definition macht Sinn (vgl. ÜA). Seien $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ die Nullstellen in (a,b). Dann kann man zeigen, dass $\operatorname{sign}(f'(x_i)) + \operatorname{sign}(f'(x_{i+1})) = 0$ für alle $i = 1,\ldots,N-1$. In der Tat, ist $\operatorname{sign}(f'(x_{i+1})) = 1$, so folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$. Dann folgt $f'(x_{i+1}) < 0$. Also $\operatorname{sign}(f'(x_{i+1})) = -1$. Folglich gilt $\deg(f) \in \{-1, 0, 1\}$. Man zeigt außerdem

$$\deg(f) \ = \ \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(f(a)) - \operatorname{sign}(f(b))).$$

Wir sehen also, im Fall $\deg(f) = \pm 1$ ist die Anzahl der Nullstellen von f ungerade und im Fall $\deg(f) = 0$ ist die Anzahl der Nullstellen von f gerade. Weiter sehen wir, dass $\deg(f)$ im wesentlichen durch seien Werte auf dem Rand bestimmt ist.

In den folgenden Betrachtungen geht es also darum, den topologischen Grad für Vektorfelder $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zu verallgemeinern. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig. Wir beginnen mit einigen wichtigen Eigenschaften der Funktionaldeterminante. Dazu die folgenden Bezeichnungen. Sei $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Wir definieren $\operatorname{cof}(\boldsymbol{A}) \in M(n \times n)$ gemäß

$$\operatorname{cof}(\boldsymbol{A})_{ik} \ = \ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n), \quad i,k = 1,\ldots,n.$$

Wegen der Linearität von det im k-ten Argument erhält man für $k, l = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{il} \operatorname{cof}(\boldsymbol{A})_{ik} \ &= \ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \sum_{i=1}^n A_{il} \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \ \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \ \det(\boldsymbol{A}) \delta_{kl}. \end{aligned} \tag{1}$$

Insbesondere ist $\frac{\operatorname{cof}(\boldsymbol{A})^t}{\det(\boldsymbol{A})} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Folglich gilt

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} \operatorname{cof}(\boldsymbol{A})_{jk} \ = \ \det(\boldsymbol{A}) \delta_{ij} \quad \forall\, k, l = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

6.2 Lemma *Für jedes Vektorfeld $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f}(x))_{ik} = 0 \quad \forall\, x \in \Omega \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis Sei $x \in \Omega$. Aus der Eigenschaft der Determinante ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f}(x))_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_k \partial x_l}, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}\Big) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_{l+1}}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_k \partial x_l}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}\Big) \\
&= -\sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} \det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_{l+1}}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_l \partial x_k}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}\Big) \\
&= -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f}(x))_{il}.
\end{aligned}$$

Dies bestätigt die Behauptung. ∎

Wir beweisen nun das folgende zentrale Lemma, welches uns ermöglicht den Abbildungsgrad über die Determinatenformel einzuführen

6.3. Lemma *Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ mit $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|) \det(D\boldsymbol{f}(x)) dx = 0$$

für alle $\omega \in C_0^0(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset (0, \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|)dy = 0$.

Beweis Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ mit $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Wir setzen $\sigma = \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}| > 0$. Sei $\omega \in C_0^0(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset (0, \sigma)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|)dy = 0$. Wir definieren

$$\varphi(r) = \begin{cases} r^{-n} \int\limits_0^r \rho^{n-1} \omega(\rho) d\rho, & \text{für } 0 < r < +\infty, \\ 0 & \text{für } -\infty < r \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ und genügt der Gleichung

$$\varphi'(r) r + n\varphi(r) = \omega(r) \quad \forall\, r \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ferner haben wir für $r \geq \max\{\mathrm{supp}(\omega)\}$

$$\varphi(r) \;=\; r^{-n} \int\limits_0^r \rho^{n-1}\omega(\rho)d\rho \;=\; \frac{1}{r^n|\partial B_1|} \int\limits_{B_\sigma(0)} \omega(|y|)dy \;=\; 0.$$

Folglich ist $\mathrm{supp}(\varphi) \subset (0,\sigma)$. Unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel berechnet man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)f_i \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f})_{ik}\Big) \\
&= \varphi'(|\boldsymbol{f}(x)|)\sum_{j=1}^n \frac{f_i f_j}{|\boldsymbol{f}(x)|}(Df)_{jk}\operatorname{cof}(D\boldsymbol{f})_{ki} \;+\; \varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)(Df)_{ik}\operatorname{cof}(D\boldsymbol{f})_{ik} \\
&\qquad + \varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)f_i \frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{cof}(D\boldsymbol{f})_{ik}.
\end{aligned}$$

Mithilfe von Lemma 6.2 und der Formeln (**??**), (**??**) bekommt man

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)f_i \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f})_{ik}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \varphi'(|\boldsymbol{f}(x)|)\frac{f_i f_j}{|\boldsymbol{f}(x)|}\delta_{ij}\det(D\boldsymbol{f}(x)) \;+\; \sum_{i=1}^n \varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)\det(D\boldsymbol{f}(x)) \\
&= \Big(\varphi'(|\boldsymbol{f}(x)|)|\boldsymbol{f}(x)| + n\varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)\Big)\det(D\boldsymbol{f}(x)).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (**??**) ergibt sich

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\varphi(|\boldsymbol{f}(x)|)f_i \operatorname{cof}(D\boldsymbol{f}(x))_{ik}\Big) \;=\; \omega(|\boldsymbol{f}(x)|)\det(D\boldsymbol{f}(x)).$$

Wegen $\varphi(|\boldsymbol{f}(\cdot)|) = 0$ auf einer Umgebung von $\partial\Omega$ folgt die Behauptung unter Verwendung partieller Integration. ∎

6.4 Definition 1. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$. Für $y \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$ definiert man

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,y) := \int\limits_\Omega \omega(|\boldsymbol{f}(x)-y|)\det(D\boldsymbol{f}(x))dx,$$

wobei $\omega \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\omega) \subset (0, \min_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f}-y|)$ und $\int\limits_\Omega \omega(|y|)dy = 1$.

6.5 Bemerkung 1. Aus Lemma 6.3 (mit $\boldsymbol{f}-y$ anstelle von $\boldsymbol{f}$) folgt, dass die Definition von $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,y)$ unabhängig von der Wahl der Funktion ω ist.

2. Falls $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, so ist $\sigma = \min_{\overline{\Omega}}|\boldsymbol{f}-y| > 0$. Wählt man nunmehr $\omega \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\omega) \subset (0,\sigma)$ und $\int \omega(|y|)dy = 1$, so ergibt sich $\omega(|\boldsymbol{f}(\cdot)|) = 0$ auf $\overline{\Omega}$. Folglich ist dann $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,y) = 0$.

Eine zentrale Eigenschaft von $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y)$ ist seine Ganzzahligkeit, welche mithilfe des Lemmas von Sard (siehe unten) bewiesen werden kann. Zunächst führen wir den Begriff des regulären Wertes ein. Hierzu die folgende

6.6 Definition Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Dann definiert man den *Index* von $\boldsymbol{f}$ an der Stelle x durch $\mathrm{ind}\boldsymbol{f}(x) := \mathrm{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x)))$. Ferner heißt $y \in \boldsymbol{f}(\Omega)$ *regulärer Wert* , falls

$$\mathrm{ind}\boldsymbol{f}(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}).$$

Mit $\mathrm{reg}(\boldsymbol{f})$ bezeichnen wir die Menge aller regulären Werte von $\boldsymbol{f}$.

6.7 Bemerkung Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Sei $y \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{f}) \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Dann ist die Menge $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) \subset \Omega$ endlich. Denn wegen $y \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$ ist $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) \subset \Omega$ kompakt. Wäre $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\})$ nicht endlich, so hätte diese Menge mindestens einen Häufungspukt $x_0 \in \Omega$. Da aber $\det(D\boldsymbol{f}(x_0)) \neq 0$, würde dies im Widerpruch zum Satz der lokalen Umkehrbarkeit stehen.

Die Ganzahligkeit von $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y)$ für reguläre Werte y erhält man mithilfe der folgenden Indexformel

6.8 Satz(**Indexformel**) *Sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$. *Dann gilt:*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \sum_{x \in \boldsymbol{f}^{-1}(\{y\})} \mathrm{ind}\boldsymbol{f}(x) \quad \forall\, y \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{f}) \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega). \tag{4}$$

Beweis Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf den Fall $y = 0$ beschränken. Sei also $0 \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{f}) \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Nach Bemerkung 6.7 ist $S = \boldsymbol{f}^{-1}(\{0\})$ endlich, also $S = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Dann existiert ein $0 < R < \mathrm{dist}(S, \partial\Omega)$, so dass $\boldsymbol{f}|_{B_R(x_i)} : B_R(x_i) \to \boldsymbol{f}(B_R(x_i))\,(i = 1, \ldots, N)$ C^1 Diffeomorphismen sind. Insbesondere ist $\boldsymbol{f}(B_R(x_i))$ offen und $0 \in \boldsymbol{f}(B_R(x_i))$ für alle $i = 1, \ldots, N$. Folglich existiert ein $0 < \delta < +\infty$, so dass $B_\delta(0) \subset \boldsymbol{f}(B_R(x_i))$ für alle $i = 1, \ldots, N$.

Wir setzen $U := \cup_{i=1}^N B_R(x_i)$. Dann ist $S \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$. Also $\sigma = \min\{\min_{\Omega \setminus U} |\boldsymbol{f}|, \delta\} > 0$. Sei $\omega \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\omega) \subset (0, \sigma)$ und $\int \omega(|y|)dy = 1$. Unter Verwendung der

Transformationsformel für das Lebesgueintegral berechnet man

$$\begin{aligned}
\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0) &= \int\limits_{\Omega} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|)\det(D\boldsymbol{f}(x))dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{B_R(x_i)} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|)\det(D\boldsymbol{f}(x))dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x_i))) \int\limits_{B_R(x_i)} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|)|\det(D\boldsymbol{f}(x))|dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x_i))) \int\limits_{\boldsymbol{f}(B_R(x_i))} \omega(|y|)dy \\
&= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x_i))) \int\limits_{B_\delta(0)} \omega(|y|)dy \\
&= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x_i))).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmitelbar aus der Definition des Index von $\boldsymbol{f}$. ■

Mit dem folgenden Lemma werden wir sehen, dass bis auf eine Menge vom Maß 0 alle Werte regulär sind.

6.9 Lemma von Sard *Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Die Menge $\boldsymbol{f}(\Omega)\setminus\operatorname{reg}(\boldsymbol{f})$ ist eine Menge vom Maß 0.*

6.10 Hilfssatz *Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Sei $Q_r \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Würfel der Kantenlänge $r > 0$ mit $\overline{Q}_r \subset \Omega$. Wir nehmen an, dass $\det(D\boldsymbol{f}(x_0)) = 0$ für ein $x_0 \in \overline{Q}_r$. Dann*

$$\lambda^n(\boldsymbol{f}(\overline{Q}_r)) \le 2^n M^{n-1} n^{n/2} \max_{\overline{Q}_r} |D\boldsymbol{f} - D\boldsymbol{f}(x_0)| \lambda^n(Q_r),$$

wobei $M = \max\limits_{\overline{Q}_r} |D\boldsymbol{f}|$.

Beweis Wir setzen $M := \max\limits_{\overline{Q}_r} |D\boldsymbol{f}|$. Wegen $\det(D\boldsymbol{f}(x_0)) = 0$ existiert ein $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, so dass $\boldsymbol{a} \perp \operatorname{im}(D\boldsymbol{f}(x_0))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\boldsymbol{f}(x_0) = 0$ und $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_n$, sonst ersetze man $\boldsymbol{f}$ durch $\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}(x_0))$ mit einer geeigneten orthogonalen Matrix $\boldsymbol{U}$. Unter Verwendung des Hauptsatzes der Integralund Differentialrechnung findet man

$$f_i(x) := \int_0^1 Df_i(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$f_n(x) := \int_0^1 (Df_n(x_0 + t(x - x_0)) - Df_n(x_0)) \cdot (x - x_0) dt, \quad \forall\, x \in \overline{Q}_r.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $Df_n(x_0) = 0$. Folglich ist

$$\boldsymbol{f}(\overline{Q}_r) \subset [-M\sqrt{n}r, M\sqrt{n}r]^{n-1} \times [-L\sqrt{n}r, L\sqrt{n}r],$$

wobei $L := \max_{\overline{Q}_r} |D\boldsymbol{f}(x) - D\boldsymbol{f}(x_0)|$. Hieraus schließt man

$$\lambda^n(\boldsymbol{f}(\overline{Q}_r)) \;\le\; 2^n n^{n/2} M^{n-1} L r^n.$$

Dies beweist die Aussage des Hilfssatzes. ∎

Beweis des Lemmas von Sard Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega)$. Sei $Q \subset \Omega$ ein beliebiger Würfel mit $\overline{Q} \subset \Omega$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $Q = [0,1]^n$. Wir setzen $M := \max_{[0,1]^n} |D\boldsymbol{f}|$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $D\boldsymbol{f}$ auf $[0,1]^n$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|D\boldsymbol{f}(x) - D\boldsymbol{f}(x')| \le \varepsilon 2^{-n} M^{1-n} n^{-n/2} \quad \forall\, x, x' \in \overline{Q} \quad \text{mit} \quad |x - x'| \le \delta.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{n^{1/2}}{N} < \delta$. Es existieren paarweise disjunkte offene Würfel $Q_1, \ldots, Q_{N^n}$ der Kantenlänge $\frac{1}{N}$, so dass $\cup_{i=1}^{N^n} \overline{Q}_i = [0,1]^n$. Mit I bezeichen wir die Indexmenge aller $i \in \{1, \ldots, N^n\}$ mit $\det(D\boldsymbol{f}(x_i)) = 0$ für ein $x_i \in \overline{Q}_i$. Gemäß Hilfsatz 6.10 haben wir

$$\lambda^n(\boldsymbol{f}(\overline{Q}_i)) \le \varepsilon \lambda^n(Q_i) \quad \forall\, i \in I.$$

Offensichtlich gilt

$$\boldsymbol{f}(Q) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f}) \subset= \bigcup_{i \in I} \overline{Q}_i.$$

In der Tat, ist $y \in \boldsymbol{f}(Q) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f})$, so existiert ein $x \in Q$ mit $\det D\boldsymbol{f}(x) = 0$, also $x \in Q_i$ für ein $i \in I$. Dann folgt

$$\lambda^n(\boldsymbol{f}(Q) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f})) \le \lambda^n\Big(\bigcup_{i \in I} \overline{Q}_i\Big) = \sum_{i \in I} \lambda^n(\boldsymbol{f}(\overline{Q}_i)) \le \varepsilon \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \;\le\; \varepsilon.$$

Da ε beliebig war ergibt sich $\lambda^n(\boldsymbol{f}(Q) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f})) = 0$.

Nun seien Q^j höchstens abzählbar viele Würfel mit $\overline{Q}^j \subset \Omega$ und $\cup_j Q^j = \Omega$. Dann gilt:

$$\boldsymbol{f}(\Omega) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f}) = \bigcup_j \boldsymbol{f}(Q^j) \setminus \operatorname{reg}(\boldsymbol{f}).$$

Wegen $\lambda^n(\boldsymbol{f}(Q^j) \setminus \mathrm{reg}(\boldsymbol{f})) = 0$ für alle j folgt die Behauptung. ■

6.11 Satz *Sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathbb{Z} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega).$$

Beweis Wegen $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{f} - y, \Omega, 0)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$, genügt es die Aussage für den Fall $y = 0$ zu beweisen. Wir setzen $\sigma := \frac{1}{2}\min_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f}|$. Dann haben wir $\min_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f} - w| \geq 2\sigma - \sigma = \sigma$ für alle $w \in B_\sigma(0)$. Sei $\omega \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\omega) \subset (0, \sigma)$ und $\int \omega(|y|)dy = 1$. Gemäß der Definition von deg haben wir

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, w) = \int\limits_\Omega \omega(|\boldsymbol{f}(x) - w|)\det(D\boldsymbol{f}(x))dx \quad \forall\, w \in B_\sigma(0).$$

Es leicht zu sehen, dass $w \mapsto \deg(\boldsymbol{f}, \Omega, w)$ in $B_\sigma(0)$ stetig ist. Auf der anderen Seite, folgt aus der Indexformel (**??**) dass $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, w) \in \mathbb{Z}$ für alle $w \in B_\sigma(0) \cap \mathrm{reg}(\boldsymbol{f})$. Da aber nach dem Sardschen Lemma $B_\sigma(0) \cap \mathrm{reg}(\boldsymbol{f})$ eine dichte Teilmenge von $B_\sigma(0)$ ist, muss $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, \cdot)$ auf $B_\sigma(0)$ mit einer Konstanten $m \in \mathbb{Z}$ identisch sein. ■.

6.12 Lemma *Sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$. *Sei* $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. *Dann gilt:*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y)$$

für alle $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ *mit* $\max_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \min|\boldsymbol{f} - y|$.

Beweis Es genügt wieder die Aussage für den Fall $y = 0$ zu beweisen. Sei also $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Wir definieren $\boldsymbol{H}(x,t) = (1-t)\boldsymbol{f}(x) + t\boldsymbol{g}(x)$ für $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,1]$. Sei $\sigma_0 := \min_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f}|$ und $\sigma_1 := \max_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}|$. Nach Voraussetzung ist $0 \leq \sigma_1 < \sigma_0$. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{H}(x,t)| &= |(1-t)\boldsymbol{f}(x) + t\boldsymbol{g}(x)| = |\boldsymbol{f}(x) - t(\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x))| \\ &\geq |\boldsymbol{f}(x)| - |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| \geq \sigma_0 - \sigma_1 > 0. \end{aligned}$$

Nun sei $\omega \in C_0^0(0, \sigma_0 - \sigma_1)$ mit $\int \omega(|y|)dy = 1$. Dann gilt

$$\deg(\boldsymbol{H}(\cdot,t), \Omega, 0) = \int\limits_\Omega \omega(|\boldsymbol{H}(x,t)|)\det(D\boldsymbol{H}(x,t))dx \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Wie man leicht sieht, ist $t \mapsto \deg(\boldsymbol{H}(\cdot,t), \Omega, 0)$ stetig auf $[0,1]$ und ganzzahlig. Folglich gilt $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) = \deg(\boldsymbol{H}(\cdot,0), \Omega, 0) = \deg(\boldsymbol{H}(\cdot,1), \Omega, 0) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, 0)$. ■

6.13 Lemma *Sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ *und sei* $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. *Ferner seien* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ *offen mit* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *und* $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. *Dann gilt*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_1, y) + \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_2, y).$$

Beweis Wie oben, genügt es die Aussage für $y = 0$ zu beweisen. Wegen der Beschränktheit von Ω, ist $K := \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ kompakt. Da $\boldsymbol{f}^{-1}(\{0\}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, folgert man $\sigma := \min_K |\boldsymbol{f}| > 0$. Insbesondere haben wir $|\boldsymbol{f}| \geq \sigma$ auf $\partial\Omega_i\,(i = 1, 2)$. Nun sei $\omega \in C_0^0(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset (0, \sigma)$ und $\int \omega(|y|)dy = 1$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}
\deg(\Omega, \boldsymbol{f}, 0) &= \int_{\Omega} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|) \det(D\boldsymbol{f}(x))dx = \int_{\Omega\setminus K} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|) \det(D\boldsymbol{f}(x))dx \\
&= \int_{\Omega_1} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|) \det(D\boldsymbol{f}(x))dx + \int_{\Omega_2} \omega(|\boldsymbol{f}(x)|) \det(D\boldsymbol{f}(x))dx \\
&= \deg(\Omega_1, \boldsymbol{f}, 0) + \deg(\Omega_2, \boldsymbol{f}, 0).
\end{aligned}$$

■

Als nächstes werden wir den Abbildungsgrad deg für Vektorfelder $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ definieren. Hierfür benötigen wir das folgende Approximationslemma

6.14 Lemma *Sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$. *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert ein Vektorfeld* $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ *mit* $\max |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| \leq \varepsilon$.

Beweis Nach dem Satz von Tietze-Urysohn gibt es eine Fortsetzung $\widetilde{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\widetilde{\boldsymbol{f}}|_{\overline{\Omega}} = \boldsymbol{f}$. Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\eta) \subset B_1$ der übliche Glättungskern. Wir setzen

$$\boldsymbol{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\boldsymbol{f}}(y) r^{-n} \eta((x - y)/r)dy, \quad x \in \overline{\Omega} \quad r > 0.$$

Dann ist $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$. Für ein hinreichend kleines $r > 0$ erfüllt $\boldsymbol{g}$ die geforderten Eigenschaften. ■

6.15 Bemerkung Seien $\boldsymbol{f} \in C^0(\overline{\Omega})$ und $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Dann findet man mithilfe von Lemma 6.14 ein Vektorfeld $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, so dass $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$.

6.16 Definition Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ und sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Sei $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ mit $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$. Dann definieren wir

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) := \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y).$$

Im Fall $\Omega = \emptyset$ setzt man $\deg(\boldsymbol{f}, \emptyset, y) = 0$.

6.17 Bemerkung Die Definition von $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y)$ hängt nicht von der Wahl der Abbildung $\boldsymbol{g}$ ab. In der Tat, seien $\boldsymbol{g}_i \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ mit $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}_i| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$ $(i = 1, 2)$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &:= \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|, \\
\sigma_1 &:= \max\Big\{ \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}_1|, \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}_2| \Big\}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $\frac{1}{2}\sigma_0 - \sigma_1 > 0$. Gemäß Lemma 6.14 existiert ein Vektorfeld $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ mit $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{h} - \boldsymbol{f}| < \frac{\sigma_0}{2} - \sigma_1$. Sei $i \in \{1, 2\}$ fixiert. Mithilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{g}_i(x)| &\le |\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{f}(x)| + |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}_i(x)| \\ &< \frac{\sigma_0}{2} - \sigma_1 + \sigma_1 \;\le\; \frac{\sigma_0}{2} \quad \forall\, x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seiten haben wir

$$\sigma_0 = \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y| \;\le\; \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}_i| + \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g}_i - y| \;\le\; \frac{\sigma_0}{2} + \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g}_i - y|$$

und mithin

$$\frac{\sigma_0}{2} < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g}_i - y|.$$

Folglich gilt $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g}_i - \boldsymbol{h}| < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g}_i - y|$.

Wendet man nun Lemma 6.12 an, so folgt $\deg(\boldsymbol{g}_1, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{h}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}_2, \Omega, y)$.

■

6.18 Lemma (Heinz) *Seien* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ *und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. *Sei* $\boldsymbol{g} \in C^0(\overline{\Omega})$ *mit* $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$. *Dann gilt*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y).$$

Beweis Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Wir setzen $\sigma_0 := \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$ und $\sigma_1 := \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}|$. Nach Lemma 6.14 existiert ein $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, so dass $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}| < \frac{\sigma_0}{3} - \sigma_1$. Unter Verwendung der Dreicksungleichung folgt

$$|\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{g}(x)| \le |\boldsymbol{h}(x) - \boldsymbol{f}(x)| + |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| \;<\; \frac{\sigma_0}{3} - \sigma_1 + \sigma_1 \;=\; \frac{\sigma_0}{3} \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Auf der anderen Seite bekommt man mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\sigma_0 = \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y| \;\le\; \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| + \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g} - y| \;\le\; \frac{\sigma_0}{3} + \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g} - y|$$

und mithin

$$\frac{\sigma_0}{3} \le \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g} - y|.$$

Kombiniert man die letzten beiden Ungleichungen, so ergibt sich $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g} - \boldsymbol{h}| < \frac{\sigma_0}{3} \le \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{g} - y|$. Außerdem haben wir $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}| < \frac{1}{2}\sigma_0 = \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$. Gemäß Definition 6.16 bekommt man

$$\deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y) \;=\; \deg(\boldsymbol{h}, \Omega, y) \;=\; \deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y).$$

■

Wir setzen

$$\mathscr{M} := \{(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \mid \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, beschränkt}, y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)\}.$$

Wir haben nun den folgenden zentralen Satz:

6.19 Satz *Der Abbildungsgrad* $\deg : \mathscr{M} \to \mathbb{Z}$, *genügt den folgenden Eigenschaften:*

(d1) $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \;=\; \deg(\boldsymbol{f} - y, \Omega, 0) \quad \forall\, (\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$.

(d2) Sei $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$. *Seien* $\Omega_i \subset \Omega\, (i = 1, 2)$ *mit* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *und* $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. *Dann gilt:*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \;=\; \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_1, y) + \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_2, y),$$

(d3) $\deg(\mathrm{id}, B_1(0), 0) = 1$,

(d4) $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y) \quad \forall\, (\boldsymbol{f}, \Omega, y), (\boldsymbol{g}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$ *mit* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ *auf* $\partial\Omega$.

Beweis Eigenschaft $(d1)$ folgt sofort aus der Definition von deg. Mithilfe der Indexformel (vgl. Satz 6.8) folgt (d3) und aus Lemma 6.18 ergibt sich (d4). Es bleibt also nur noch die Eigenschaft (d3) zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $y = 0$ annehmen. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und $\boldsymbol{f}^{-1}(\{0\}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Die Menge $K := \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ist kompakt. Da $\boldsymbol{f}$ stetig ist gilt $\sigma := \min_K |\boldsymbol{f}| > 0$. Gemäß Lemma 6.14 existiert ein Vektorfeld $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ mit $\max_{\overline{\Omega}} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{2} \min_K |\boldsymbol{f}|$. Insbesondere haben wir $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$ und $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega_i} |\boldsymbol{f}|\, (i = 1, 2)$. Darüber hinaus haben wir für $x \in K$

$$|\boldsymbol{g}(x)| \geq |\boldsymbol{f}(x)| - |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| > \sigma - \frac{\sigma}{2} > 0,$$

was besagt, dass $\boldsymbol{g}^{-1}(\{0\}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Lemma 6.13 zusammen mit Definition 6.16 impliziert

$$\begin{aligned}\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) &= \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, 0) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega_1, 0) + \deg(\boldsymbol{g}, \Omega_2, 0)\\ &= \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_1, 0) + \deg(\boldsymbol{f}, \Omega_2, 0).\end{aligned}$$

■

Weitere Eigenschaften und Eindeutigkeit des Abbildungsgrades

Im vorliegenden Abschnitt werden wir zeigen, dass der Abbildungsgrad durch die Eigenschaften (d1)-(d4) (vgl. Satz 6.19) bereits eindeutig bestimmt ist. Zuvor leiten wir aus (d1)-(d4) einige weitere nützliche Eigenschaften her. Dazu der folgende

Satz 6.20 *Sei* $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung, welche (d1)-(d4) genügt. Dann genügt d den folgenden weiteren Eigenschaften:*
Für alle $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$*:*

(d5) $d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = 0$, *falls* $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) = \emptyset$,

(d6) $d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \;=\; d(\boldsymbol{f}, \Omega_0, y)$ *für alle* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) \subset \Omega_0$,

(d7) $d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \;=\; d(\boldsymbol{g}, \Omega, y)$ *für jedes* $\boldsymbol{g} \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *mit* $\max\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \min\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$.

Beweis (d5): Diese Eigenschaft folgt sofort aus (d2) mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$.

(d6) Diese Eigenschaft folgt sofort aus (d2) mit $\Omega_1 = \Omega_0$ und $\Omega_2 = \emptyset$.

(d7) Wegen (d1) genügt es, sich auf den Fall $y = 0$ zu beschränken. Sei $(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) \in \mathscr{M}$ und sei $\boldsymbol{g} \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| < |\boldsymbol{f}(x)| - \varepsilon \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Wir setzen $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,|\, |\boldsymbol{f}(x)| < |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| + \varepsilon\}$. Falls $\Omega_0 = \emptyset$, so wäre $|\boldsymbol{f}(x)| \geq \varepsilon$ und $|\boldsymbol{g}(x)| \geq |\boldsymbol{f}(x)| - |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)| \geq \varepsilon$ für alle $x \in \Omega$. Nach (d5) wäre dann $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, 0) = 0$. Ist $\Omega_0 \neq \emptyset$, so ist $\overline{\Omega}_0$ eine kompakte Teilmenge von Ω. Sei $\eta \in C_0^0(\Omega)$, so dass $0 \leq \eta \leq 1$ in Ω und $\eta \equiv 1$ auf $\overline{\Omega}_0$. Wir setzen $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} + \eta(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f})$. Wegen (d4) gilt $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) = d(\boldsymbol{h}, \Omega, 0)$. Außerdem haben wir $\boldsymbol{h}^{-1}(\{0\}) \subset \Omega_0$, denn aus $\boldsymbol{h}(x) = 0$ folgt wegen $\boldsymbol{f}(x) = \eta(x)(\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x))$, dass $|\boldsymbol{f}(x)| \leq |\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x)|$, also $x \in \Omega_0$. Mit (d6) und $h = g$ auf Ω_0 findet man

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) = d(\boldsymbol{h}, \Omega, 0) &= d(\boldsymbol{h}, \Omega_0, 0) = d(\boldsymbol{g}, \Omega_0, 0) \\ &= d(\boldsymbol{g}, \Omega, 0). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung in dieser Kette folgt aus (d6), da $\boldsymbol{g}^{-1}(\{0\}) \subset \Omega_0$. ∎

6.21 Bemerkung Aus (d5) folgt, ist $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{A}$ mit $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \neq 0$, so existiert ein $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$ (Lösbarkeit).

6.22 Satz (**Homotopieinvarianz**) *Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, mit (d1)-(d4). Seien $\boldsymbol{H} \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,1]; \mathbb{R}^n), y \in C^0([0,1]; \mathbb{R}^n)$, so dass $(\boldsymbol{H}(\cdot, t), \Omega, y(t)) \in \mathscr{M}$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt:*

$$d(\boldsymbol{H}(\cdot, 0), \Omega, y(0)) = d(\boldsymbol{H}(\cdot, 1), \Omega, y(1)) = d(\boldsymbol{H}(\cdot, t), \Omega, y(t))$$

für alle $t \in [0,1]$.

Beweis Wegen (d1) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $y \equiv 0$. Sei $M = \{t \in [0,1] \,|\, d(\boldsymbol{H}(\cdot, t), \Omega, 0) = d(\boldsymbol{H}(\cdot, 0), \Omega, 0)\}$. Wir zeigen dass $M \subset [0,1]$ offen und abgeschlossen ist, woraus dann die Behauptung folgt.
M offen Sei $t \in M$. Aufgrund der Stetigkeit von $\boldsymbol{H}$ haben wir $\alpha := \min_{\partial\Omega \times [0,1]} |\boldsymbol{H}| > 0$. Ferner existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\boldsymbol{H}(x, t_1) - \boldsymbol{H}(x, t_2)| \leq \alpha/2 \quad \forall\, t_1, t_2 \in [0,1], |t_1 - 1_2| \leq \delta.$$

Mithilfe von (d7) schließt man $d(\boldsymbol{H}(\cdot, s), \Omega, 0) = d(\boldsymbol{H}(\cdot, t), \Omega, 0)$ für alle $s \in [0,1]$ mit $|s - t| < \delta$, was zeigt, dass M offen ist.
M abgeschlossen Sei $\{t_k\}$ eine Folge in M mit $t_k \to t$ in $[0,1]$ für $k \to +\infty$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|t - t_k| < \delta$. Ebenfalls aus (d7) folgt $d(\boldsymbol{H}(\cdot, t), \Omega, 0) = d(\boldsymbol{H}(\cdot, t_k), \Omega, 0)$, also $t \in M$. ∎

6.23 Folgerung *Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, welche (d1)-(d4) genügt. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt: $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$ und die Abbildung $y \mapsto \deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y)$ ist auf jeder zusammenhängenden Komponente von $\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$ konstant.*

■

Für den Beweis der Eindeutigkeit des Abbildungsgrades ist der folgende Satz entscheidend.

6.24 Satz *Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, welche (d1)-(d4) genügt. Dann gilt:*

$$d(\boldsymbol{A}, B_1(0), 0) = \operatorname{sign}(\det(\boldsymbol{A})) \quad \forall\, \boldsymbol{A} \in Gl(n, \mathbb{R}).$$

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen zeigen wir den folgenden

Hilfssatz *Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Für jeden Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ existiert ein stetiger Weg $\boldsymbol{U} : [0,1] \to SO(n;\mathbb{R})$, so dass*

$$\boldsymbol{U}(0) = \mathrm{id}, \qquad \boldsymbol{U}(1)\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_1.$$

Beweis Wir zeigen diese Aussage mittels vollständiger Induktion über die Raumdimension $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Wir beginnen mit dem Fall $n = 2$. Sei $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Wir setzen $r := |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Dann existiert $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$a_1 = r\cos\varphi, \quad a_2 = r\sin\varphi.$$

Wir setzen

$$\boldsymbol{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos t\varphi & \sin t\varphi \\ -\sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt $\boldsymbol{U}(t) : [0,1] \to SO(2;\mathbb{R})$ die geforderten Eigenschaften.

Wir nehmen nun an die Aussage gilt für $n - 1 \geq 2$. Dann existiert eine stetiger Weg $\boldsymbol{U}' : [0,1] \to SO(n-1;\mathbb{R})$ mit $\boldsymbol{U}'(0) = \mathrm{id}_{n-1}$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}'(1) \end{pmatrix} \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + |\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{e}_2,$$

wobei $\boldsymbol{a}' = \sqrt{a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. Wie oben existiert ein stetiger Weg $\boldsymbol{U}'' : [0,1] \to SO(2;\mathbb{R})$, so dass $\boldsymbol{U}''(0) = \mathrm{id}_2$ und

$$\boldsymbol{U}''(1) \cdot \begin{pmatrix} a1 \\ |\boldsymbol{a}'| \end{pmatrix} = \sqrt{a_1^2 + |\boldsymbol{a}'|^2}\boldsymbol{e}_1 = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_1.$$

Wir definieren den stetigen Weg $\boldsymbol{U} : [0,1] \to SO(n;\mathbb{R})$ durch

$$\boldsymbol{U}(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}'(2t) \end{pmatrix} & \text{für} \quad t \in [0, 1/2] \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}''(2t-1) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}'(1) \end{pmatrix} & \text{für} \quad t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Dann genügt $\boldsymbol{H}$ den geforderten Eigenschaften, was die Aussage für n beweist. $\blacksquare$

Beweis vo Satz 6.24 1) Mit $\boldsymbol{E}_n \in Gl(n,\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Einheitsmatrix $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$. Wir zeigen, dass für jedes $\boldsymbol{A} \in Gl(n;\mathbb{R})$ mit $\det(\boldsymbol{A}) > 0$ eine stetiger Weg $\boldsymbol{H} : [0,1] \to Gl(n;\mathbb{R})$ mit $\boldsymbol{U}(0) = \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{A}$ existiert. Wir zeigen diese Aussage mittels vollständiger Induktion über die Raumdimension $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Wir nehmen an, die Aussage gilt für $n-1 \geq 1$. Sei $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) \in Gl(n;\mathbb{R})$ mit $\det(\boldsymbol{A}) > 0$. Gemäß Hilfssatz existiert ein stetiger Weg $\boldsymbol{U} : [0,1] \to SO(n;\mathbb{R})$, so dass $\boldsymbol{U}(0) = \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{U}(1)\boldsymbol{a}_1 = |\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{e}_1$. Wir setzen

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{U}(1)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}_1| & \widetilde{a}_{12}\ldots\widetilde{a}_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{A}' \end{pmatrix}$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein stetiger Weg $\boldsymbol{H}' : [0,1] \to Gl(n-1;\mathbb{R})$, so dass $\boldsymbol{H}'(0) = \boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{E}_{n-1}$. Wir definieren nun den folgenden stetigen Weg $\boldsymbol{H} : [0,1] \to Gl(n;\mathbb{R})$ durch

$$\boldsymbol{H}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{U}(3t)\boldsymbol{A} & \text{falls} \quad t \in [0,1/3], \\[2ex] \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}_1| & \widetilde{a}_{12}\ldots\widetilde{a}_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{H}'(3t-1) \end{pmatrix} & \text{falls} \quad t \in (1/3,2/3], \\[2ex] \begin{pmatrix} 3t-2+(3-3t)|\boldsymbol{a}_1| & (3-3t)\widetilde{a}_{12}\ldots(3-3t)\widetilde{a}_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{E}_{n-1} \end{pmatrix} & \text{falls} \quad t \in (2/3,1]. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{E}_n$. Somit gilt die Aussage auch für n.

2) Als nächstes definieren wir die Spiegelung $\boldsymbol{\delta} \in Gl(n,\mathbb{R})$ durch

$$\boldsymbol{\delta}x = x^* = x - 2\boldsymbol{e}_1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $\tau(\boldsymbol{\delta})$ die zusammenhängende Komponente von $\boldsymbol{\delta}$ in $Gl(n,\mathbb{R})$. Dann gilt $\tau(\boldsymbol{\delta}) = \{\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R}) \,|\, \det(\boldsymbol{A}) < 0\}$. In der Tat, ist $\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R})$ mit $\det(\boldsymbol{A}) < 0$, so folgt aus $\det(\boldsymbol{\delta}) < 0$, dass $\det(\boldsymbol{\delta A}) > 0$. Wie oben gezeigt existiert ein stetiger Weg $\boldsymbol{H} : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R})$, so dass $\boldsymbol{H}(0) = \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{H}(1) = \delta\boldsymbol{A}$. Dann ist $\boldsymbol{\delta H} : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R})$ eine stetiger Weg mit

$$\boldsymbol{\delta H}(0) = \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta H}(1) = \boldsymbol{\delta\delta A} = \boldsymbol{A}.$$

Folglich gilt $\boldsymbol{A} \in \tau(\boldsymbol{\delta})$.

3) Sei $\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R})$ mit $\det(\boldsymbol{A}) > 0$. Gemäß 1) existiert eine stetige Abbildung $\boldsymbol{H} : [0,1] \to Gl(n,\mathbb{R}))$ mit $\boldsymbol{H}(0) = \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{H}(1) = \boldsymbol{A}$. Wir setzen

$$\boldsymbol{h}(x,t) = \boldsymbol{H}(t)\cdot x, \quad (x,t) \in \overline{B}_1(0) \times [0,1].$$

Dann ist $\boldsymbol{h} \in C^0(\overline{B}_1(0) \times [0,1];\mathbb{R}^n)$ mit $\boldsymbol{h}(\cdot,0) = \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{h}(1) = \boldsymbol{A}$. Aus Satz 6.22 und (a3) folgt $d(\boldsymbol{A}, B_1(0), 0) = d(\mathrm{id}, B_1(0), 0) = 1 = \mathrm{sign}(\det(\boldsymbol{A}))$.

4) Sei $\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R})$ mit $\det(\boldsymbol{A}) < 0$. Wie in 3) zeigt man, dass $d(\boldsymbol{A}, B_1(0), 0) = d(\boldsymbol{\delta}, B_1(0), 0)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $d(\boldsymbol{\delta}, B_1(0), 0) = -1$. Wir definieren

$$\boldsymbol{H}(x,t) = t(|x_1| - 1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, \quad (x,t) \in \overline{B}_1 \times [0,1].$$

Für $t \in (0,1]$ ist $\boldsymbol{H}(x,t) = 0$ äquivalent zu $|x_1| = 1 - \frac{1}{2t}$. Folglich ist $0 \notin \boldsymbol{H}(\partial B_1, t)$ für alle $t \in [0,1]$. Aus Satz 6.22 und (a5) ergibt sich

$$d(\boldsymbol{H}(\cdot,1), B_1, 0) = d(\boldsymbol{H}(\cdot,0), B_1, 0) = 0.$$

Wir setzen $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{H}(x,1)$. Dann ist $\boldsymbol{f}^{-1}(\{0\}) = \Big\{ -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 \Big\}$. Mit (a1), (a2), (a6) und Folgerung 6.23 ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= d(\boldsymbol{f}, B_1, 0) \\
&= d(\boldsymbol{f}, B_{1/2}(\boldsymbol{e}_1/2), 0) + \deg(\boldsymbol{f}, B_{1/2}(-\boldsymbol{e}_1/2), 0) \\
&= d(\mathrm{id} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, B_{1/2}(\boldsymbol{e}_1/2), 0) + d(\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, B_{1/2}(-\boldsymbol{e}_1/2), 0) \\
&= d(\mathrm{id} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, B_1(0), 0) + \deg(\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, B_1(0), 0) \\
&= d(\mathrm{id}, B_1(0), \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1) + \deg(\boldsymbol{\delta}, B_1(0), \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1) \\
&= 1 + d(\boldsymbol{\delta}, B_1(0), 0).
\end{aligned}$$

Also $d(\boldsymbol{\delta}, B_1(0), 0) = -1 = \mathrm{sign}(d(\boldsymbol{\delta}))$. ■

6.25 Folgerung *Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, mit (d1)-(d4). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt für alle $\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R})$*

$$\deg(\boldsymbol{A}, \Omega, y) = \mathrm{sign}(\det(\boldsymbol{A})) \quad \forall\, y \in \boldsymbol{A}(\Omega).$$

Beweis Seien $\boldsymbol{A} \in Gl(n,\mathbb{R})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $y \in \boldsymbol{A}(\Omega)$. Dann existiert genau ein $x \in \Omega$ mit $\boldsymbol{A}x = y$. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $R > 0$, so dass $\Omega \subset B_R(0)$. Wegen $\boldsymbol{A}^{-1}(\{y\}) = \{x\} \subset \Omega$ folgt unter Verwendung von (d6)

$$d(\boldsymbol{A}, \Omega, y) = d(\boldsymbol{A}, B_R(0), y).$$

Außerdem haben wir $\boldsymbol{A}^{-1}(\{ty\}) = \{tx\} \subset B_R(0)$ für alle $t \in [0,1]$. Mithilfe von (d6) und Satz 6.24 schließt man

$$d(\boldsymbol{A}, B_R(0), y) = d(\boldsymbol{A}, B_1(0), 0) = \mathrm{sign}(\det(\boldsymbol{A})).$$

■

6.26 Satz (Indexformel) *Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, mit (d1)-(d4). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$. Falls außerdem $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$ und $y \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{f})$ so gilt:*

$$d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \sum_{x \in \boldsymbol{f}^{-1}(\{0\})} \mathrm{ind}\,\boldsymbol{f}(x).$$

Beweis Sei $y \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{f})$. Wie in 6.7 bemerkt wurde ist $\boldsymbol{f}^{-1}(\{y\})$ endlich. Wir haben also $S := \boldsymbol{f}^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \Omega$ mit $\det(D\boldsymbol{f}(x_i)) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, N$. Dann existiert ein $0 < R < d(S, \partial\Omega)$ so dass $B_R(x_i)\,(i = 1, \ldots, N)$ paarweise disjunkt sind. Aus (d2) und (d6) schließt man

$$d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \;=\; \sum_{i=1}^{N} d(\boldsymbol{f}, B_R(x_i), y).$$

Sei $i \in \{1, \ldots, N\}$ fixiert. Wir setzen $\boldsymbol{A} := D\boldsymbol{f}(x_i) \in Gl(n, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt

$$r := \min_{x \in \partial B_1} |\boldsymbol{A}x| > 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $D\boldsymbol{f}$ existiert ein $0 < \delta < R$, so dass

$$|D\boldsymbol{f}(x) - D\boldsymbol{f}(x')| \;\leq\; \frac{r}{2} \quad \forall\, x, x' \in B_\delta(x_i).$$

Mithilfe der Newton-Leibniz-Formel schreibt man $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$, wobei

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1(x) \;&=\; y + \boldsymbol{A} \cdot (x - x_i),\\
\boldsymbol{f}_2(x) \;&=\; \int_0^1 (D\boldsymbol{f}(x_i + t(x - x_i)) - D\boldsymbol{f}(x_0)) \cdot (x - x_i)dt, \quad x \in \overline{B}_\delta(x_i)
\end{aligned}$$

Unter Benutzung von (d1), (d6) und Folgerung 6.25 ergibt sich

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{f}_1, B_\delta(x_i), y) \;&=\; d(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}x_i, B_\delta(x_i), 0)\\
&=\; d(\boldsymbol{A}, B_\delta(x_i), \boldsymbol{A}x_i)\\
&=\; \mathrm{sign}(\det(\boldsymbol{A})).
\end{aligned}$$

Für $x \in \partial B_\delta(x_i)$ bekommt man

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}_1(x)| \leq \frac{\delta r}{2} &= \frac{\delta}{2} \min_{x' \in \partial B_1} |\boldsymbol{A}x'| \;=\; \frac{1}{2} \min_{x' \partial B_\delta(x_i)} |\boldsymbol{A}(x' - x_i)|\\
&< \min_{x' \in \partial B_\delta(x_i)} |\boldsymbol{f}_1(x') - y|
\end{aligned}$$

Gemäß (a6) und (a7) folgt

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{f}, B_R(x_i), y) \;&=\; d(\boldsymbol{f}, B_\delta(x_i), y) \;=\; d(\boldsymbol{f}_1, B_\delta(x_i), y)\\
&=\; \mathrm{sign}(\det(D\boldsymbol{f}(x_i))).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der obigen Gleichung ergibt sich die Behauptung. ∎

Wir sind nun in der Lage das folgende Eindeutigkeitsresultat zu beweisen.

6.27 Satz (**Eindeutigkeit**) *Sei* $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung, mit (d1)-(d4). Dann ist* $d \equiv \deg$, *wobei* $\deg : \mathscr{M} \to \mathbb{Z}$ *die in Definition 6.16. definierte Abbildung bezeichne.*

Beweis Sei $d : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, mit (d1)-(d4). Sei $(\boldsymbol{f}, \Omega, y) \in \mathscr{M}$. Nach Lemma 6.14 existiert ein $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, so dass $\max_{\overline{\Omega}} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$. Aus der Eigenschaft (d7) folgert man $d(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = d(\boldsymbol{g}, \Omega, y)$ und $\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y)$. Es genügt also zu zeigen, dass $d(\boldsymbol{g}, \Omega, y) = \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y)$. Falls $y \notin \boldsymbol{g}(\Omega)$ so folgt die Behauptung sofort aus (d5). Im Fall $y \in \boldsymbol{g}(\Omega)$ ist $B_R(y) \subset \boldsymbol{f}(\Omega)$ für ein $0 < R < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - y|$ und mithilfe von Folgerung 6.23 sieht man, dass sowohl $d(\boldsymbol{g}, \Omega, \cdot)$ als auch $\deg(\boldsymbol{g}, \Omega, \cdot)$ auf $B_R(y)$ konstant ist. Außerdem existiert nach dem Lemma von Sard ein $w \in B_R(y) \cap \operatorname{reg}(\boldsymbol{g})$. Unter Verwendung von Satz 6.26 erhält man schließlich

$$d(\boldsymbol{g}, \Omega, y) \;=\; d(\boldsymbol{g}, \Omega, w) \;=\; \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, w) \;=\; \deg(\boldsymbol{g}, \Omega, y).$$

Somit ist $d \equiv \deg$. ■

Anwendungen des Brouwerschen Abbildungsgrad

Eine der wichtigsten Anwendungen des Brouwerschen Abbildungsgrad ist der Brouwersche Fixpunktsatz und der Zwischenwertsatz

6.28 Satz (**Brouwerscher Fixpunktsatz**) *Sei* $K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex, abgeschlossen und beschränkt. Ferner sei* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(K; \mathbb{R}^n)$, *mit* $\boldsymbol{f}(K) \subset K$. *Dann existiert ein* $x_* \in K$ *mit* $\boldsymbol{f}(x_*) = x_*$.

6.29 Hilfssatz I *Sei* $K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex. Dann gilt*

$$(1-t)x + ty \in \operatorname{int}(K) \quad \forall\, x \in \operatorname{int}(K), y \in K, \forall\, t \in [0,1).$$

Beweis Seien $x \in \operatorname{int}(K)$ und $y \in K$. Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset \operatorname{int}(K)$. Nun sei $t \in (0,1)$. Wir zeigen $B_{(1-t)\varepsilon}((1-t)x + ty) \subset K$. Sei $w \in B_{(1-t)\varepsilon}((1-t)x + ty)$, d.h.

$$|w - (1-t)x - ty| < (1-t)\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w - ty}{1-t} \in B_\varepsilon(x) \subset K.$$

Da K konvex ist, haben wir $ty + (1-t)\frac{w-ty}{1-t} = w \in K$, was die Aussage beweist. ■

6.30 Hilfssatz II *Sei* $K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex mit* $0 \in K$. *Außerdem existiere kein* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *so dass* $(a, x) = 0$ *für alle* $x \in K$. *Dann ist* $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$.

Beweis Seien $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ $(m \leq n)$ eine maximale linear unabhängige Menge. Falls $m < n$, gibt es ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $(a, x_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_{m+1} \in K$ mit $(x_{m+1}, a) \neq 0$. Dann folgt aus $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = 0$, dass $\lambda_{m+1}(x_{m+1}, a) = 0$, also $\lambda_{m+1} = 0$ und mithin $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Folglich sind $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ linear unabhängig, was aber der Maximaleigenschaft von

$\{x_1, \ldots, x_m\}$ widerspricht. Also ist $m = n$. Dies zeigt aber, dass der durch $\{x_1, \ldots, x_n\}$ aufgespannte Parallepiped in K liegt, so dass in K ein innerer Punkt liegen muss. ■

Beweis von 6.28 1° Wir nehmen an, dass $\Omega := \operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Dann gilt $K = \overline{\Omega}$. In der Tat, sei $y \in K$ und $x \in \Omega$. Dann folgt nach Hilfssatz I $(1-t)x + ty \in \Omega$ für alle $t \in (0,1)$. Dies zeigt $y \in \overline{\Omega}$. Zusammen mit $\overline{\Omega} \subset K$ folgt $K = \overline{\Omega}$.
Sei $x_0 \in \Omega$. Wir setzen $\Omega_0 = \Omega - \{x_0\}$ und definieren

$$\boldsymbol{g}(x) \;=\; \boldsymbol{f}(x + x_0) - x_0, \quad x \in \Omega_0.$$

Dann ist Ω_0 offen, beschränkt und konvex mit $0 \in \Omega_0$ und $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}_0)$ mit $\boldsymbol{g}(\overline{\Omega}_0) \subset \overline{\Omega}_0$. Unter Verwendung von Hilfssatz I folgt

$$(5) \qquad tx \in \Omega_0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_0,\ \forall\, t \in [0,1).$$

Als nächstes definieren wir

$$\boldsymbol{H}(x,t) \;=\; x - t\boldsymbol{g}(x), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times [0,1].$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}_0 \times [0,1])$. Falls $\boldsymbol{H}(x,1) = x - \boldsymbol{g}(x) = 0$ für ein $x \in \partial\Omega$, so hätte $\boldsymbol{g}$ einen Fixpunkt und mithin auch $\boldsymbol{f}$ einen Fixpunkt. Wir können also annehmen, dass $0 \notin \boldsymbol{H}(\partial\Omega_0, 1)$. Angenommen $\boldsymbol{H}(x,t) = 0$ für ein $(x,t) \in \partial\Omega_0 \times (0,1)$, so wäre $\boldsymbol{g}(x) = \frac{x}{t} \in \overline{\Omega}_0$. Gemäß (**??**) hätte man $x = t\frac{x}{t} \in \Omega_0$, was aber $x \in \partial\Omega_0$ widerspricht. Wir haben also gezeigt, dass $0 \notin \boldsymbol{H}(\partial\Omega_0 \times [0,1])$. Nach Folgerung 6.23 und Satz 6.22 bekommt man

$$\begin{aligned} 1 = \deg(\mathrm{id}, \Omega_0, 0) &= \deg(\boldsymbol{H}(\cdot,0), \Omega_0, 0) \\ &= \deg(\boldsymbol{H}(\cdot,1), \Omega_0, 0) \;=\; \deg(\mathrm{id} - \boldsymbol{g}, \Omega_0, 0). \end{aligned}$$

Mithilfe von Bemerkung 6.21 folgt die Existenz eines $x_* \in \Omega_0$, so dass $x_* - \boldsymbol{g}(x_*) = 0$ was äquivalent ist zu $\boldsymbol{f}(x_* + x_0) = x_* + x_0$. Somit ist $x_* + x_0 \in \Omega$ Fixpunkt von $\boldsymbol{f}$.

2° Nun sei $\operatorname{int}(K) = \emptyset$ und $0 \in K$. Wir definieren $K^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n \,|\, (x,a) = 0\ \forall\, x \in K\}$.

$$M \;=\; \{x + a \,|\, a \in K^\perp \cap \overline{B_1(0)}, x \in K\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass M beschränkt , abgeschlossen und konvex ist. Aus 6.30 folgt $\operatorname{int}(M) \neq \emptyset$. Wir definieren

$$\boldsymbol{h}(x + a) = \boldsymbol{f}(x), \quad a \in K^\perp \cap \overline{B_1(0)}, x \in K.$$

Dann ist $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^0(M)$ mit $\boldsymbol{h}(M) \subset K \subset M$. Folglich hat $\boldsymbol{h}$ einen Fixpunkt $x_* \in M$. Wegen $\boldsymbol{h}(x_*) \in K$ folgt $x_* \in K$ und $\boldsymbol{h}(x_*) = \boldsymbol{f}(x_*) = x_*$.

■

Für $n \in \mathbb{N}\,(n \geq 2)$ bezeichne S^{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\}$.

6.31 Satz (Igelsatz von Poincaré-Brouwer) *Sei $n \geq 3$ ungerade. Dann gibt es auf S^{n-1} kein stetiges Einheitstangentialfeld, d.h. es gibt keine stetige Abbildung $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^0(S^{n-1})$ mit $|\boldsymbol{\varphi}(x)| = 1$ und $\boldsymbol{\varphi}(x) \cdot x = 0$ für alle $x \in S^{n-1}$.*

Beweis Angenommen es gibt solch eine Abbildung. Wir definieren

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{cases} |x|\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{für} \quad x \in \overline{B}_1 \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{B}_1(0))$. Wir definieren

$$\boldsymbol{H}^{\pm}(x,t) := \pm(1-t)x + t\boldsymbol{g}(x), \quad (x,t) \in \overline{B_1(0)} \times [0,1].$$

Angenommen $\boldsymbol{H}^{\pm}(x,t) = \pm(1-t)x + t\boldsymbol{g}(x) = 0$ für ein $(x,t) \in \partial B_1(0) \times [0,1]$. Dann folgt $\pm(1-t)x = -t\boldsymbol{\varphi}(x)$. Wegen $\boldsymbol{\varphi}(x) \cdot x = 0$ wäre dann $\pm(1-t) = 0$, was aber ein Widerspruch zu $\boldsymbol{\varphi}(x) \neq 0$ ist. Der Homotopiesatz und Satz 6.24 zeigen somit dass

$$\deg(\boldsymbol{g}, B_1(0), 0) = \deg(\pm\,\mathrm{id}, B_1(0), 0) = (\pm 1)^n.$$

Dies würde aber $(-1)^n = 1^n = 1$ implizieren, was für ungerades n einen Widerspruch darstellt. Folglich ist die Behauptung richtig. ■

6.32 Satz (Borsuk) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \Omega$ offen, beschränkt und punktsymmetrisch bezüglich 0. Dann gilt für jede ungerade Abbildung $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ mit $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) \quad \textit{ist eine ungerade Zahl.}$$

Als Vorbereitung beweisen wir den folgenden

6.33 Hilfssatz I *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \notin \Omega$. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$ eine ungerade Abbildung mit $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ definieren wir*

$$\Omega_i = \{x \in \Omega_i \,|\, x_i \neq 0\}.$$

Dann existiert für jedes $i \in \{0,\dots,n\}$ eine ungerade Abbildung $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$, so dass

(i) $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \frac{i+1}{n+1} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$,

(ii) $0 \in \mathrm{reg}(\boldsymbol{g}, \Omega_j) \quad \forall\, j = 1,\dots,i$.

Beweis Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über $i \in \{0,\dots,n\}$.

$i = 0$: Die Aussage ist trivial erfüllt.
$i-1 \Rightarrow i$: Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine ungerade Abbildung $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$, so dass

(i) $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}| < \frac{i}{n+1} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$,

(ii) $0 \in \operatorname{reg}(\boldsymbol{h}, \Omega_j) \quad \forall\, j = 1, \ldots, i-1$.

Wir definieren $\boldsymbol{\varphi}(x) = \frac{\boldsymbol{h}(x)}{x_i^3}$ $(x \in \Omega_i)$. Dann ist $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega_i)$. Nach dem Lemma von Sard existiert ein $y \in \operatorname{reg}(\boldsymbol{\varphi})$ mit $|y| < \dfrac{\min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|}{(n+1)(\operatorname{diam}(\Omega))^3}$. Wir setzen

$$\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{h}(x) - x_i^3 y = x_i^3(\boldsymbol{\varphi}(x) - y), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Offensichtlich ist $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$ ungerade. Da $\boldsymbol{h}$ der Bedingung (i) genügt, haben wir

$$\begin{aligned}\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| \leq \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}| \,+\, |x|^3|y| &< \frac{i}{n+1} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}| + \frac{1}{n+1} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|. \\ &= \frac{i+1}{n+1} \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|.\end{aligned}$$

Folglich genügt $\boldsymbol{g}$ ebnenfalls (i).

Sei $x \in \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_i$. Dann folgt mithilfe der Produktregel

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_k}(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_k}(\xi_i^3(\boldsymbol{\varphi} - y))(x) \;=\; x_i^3 \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_k}(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Wegen $\boldsymbol{\varphi}(x) = y$ und $y \in \operatorname{reg}(\boldsymbol{\varphi})$ folgt $\det(D\boldsymbol{g}(x)) = x_i^{3n} \det(D\boldsymbol{\varphi}(x)) \neq 0$. Falls $x \in \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\}) \cap (\Omega_j \setminus \Omega_i)$ $(j \in \{1, \ldots, i-1\})$, so ergibt sich wegen $x_i = 0$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_k}(x) \;=\; \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_k}(x), \quad k = 1, \ldots, n, \qquad \boldsymbol{h}(x) = 0.$$

Wegen $0 \in \operatorname{reg}(\boldsymbol{h})$ haben wir $\det(D\boldsymbol{g}(x)) = \det(D\boldsymbol{h}(x)) \neq 0$. Folglich genügt $\boldsymbol{g}$ auch (ii). ∎

6.34 Hilfssatz II *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und symmetrisch mit $0 \notin \Omega$. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$ eine ungerade Abbildung mit $0 \notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$. Dann gilt:*

$$\deg(\boldsymbol{f}, \Omega, 0) \quad \textit{ist eine gerade Zahl.}$$

Beweis Gemäß 6.33 mit $i = n$ existiert eine ungerade Abbildung $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^1(\Omega)$, so dass $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}| < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$ und $0 \in \operatorname{reg}(\boldsymbol{g})$. Da $\boldsymbol{g}$ ungerade ist und $0 \notin \Omega$ folgt mit $x \in \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\})$ auch $-x \in \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\})$ und $-x \neq x$. Folglich existiert nach 6.7 eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\})$, so dass $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \{-x_1, \ldots, -x_m\} = \emptyset$ und

$$\boldsymbol{g}^{-1}(\{0\}) \;=\; \{x_1, \ldots, x_m\} \cup \{-x_1, \ldots, -x_m\}.$$

Mithilfe von (d7) und der Indexformel 6.26 ergibt sich

$$\begin{aligned}\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0) &= \deg(\boldsymbol{g},\Omega,0) = \sum_{x\in \boldsymbol{g}^{-1}(\{0\})} \operatorname{ind}\boldsymbol{f}(x)\\ &= \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}\boldsymbol{f}(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}\boldsymbol{f}(-x_i) = 2\sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}\boldsymbol{f}(x_i). ^{1)}\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0)$ eine gerade ganze Zahl ist. ■

Beweis des Satzes von Borsuk Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ eine ungerade Abbildung. Gemäß Lemma 6.14 existiert ein $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega})$ mit $\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}| < \frac{1}{2}\min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, dass $\boldsymbol{g}$ eine ungerade Abbildung ist, sonst ersetze man $\boldsymbol{g}$ durch $\frac{1}{2}(\boldsymbol{g}(x)-\boldsymbol{g}(-x))$. Als nächstes wähle man $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\min_{\partial\Omega}|\boldsymbol{f}|$, so dass ε kein Eigenwert von $D\boldsymbol{g}(0)$ ist und setze $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} - \varepsilon\,\mathrm{id}$. Dann ist $\det(D\boldsymbol{h}(0)) \neq 0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}-\boldsymbol{h}| \leq \max_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}| + |y| < \min_{\partial\Omega} |\boldsymbol{f}|.$$

Aufgrund von (d7) ergibt sich

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0) = \deg(\boldsymbol{h},\Omega,0).$$

Da $\det(D\boldsymbol{h}(0)) \neq 0$ existiert nach dem Satz der lokalen Umkehrbarkeit ein $0 < R < \operatorname{dist}(0,\partial\Omega)$, so dass $\boldsymbol{h}|_{\overline{B_R(0)}}$ injektiv ist. Wegen (d2) haben wir

$$\begin{aligned}\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0) &= \deg(\boldsymbol{h},B_R(0),0) + \deg(\boldsymbol{h},\Omega\setminus\overline{B_R(0)},0)\\ &= \operatorname{sign}(D\boldsymbol{h}(0)) + \deg(\boldsymbol{h},\Omega\setminus\overline{B_R(0)},0)\end{aligned}$$

Nach 6.34 ist der zweite Summand eine gerade Zahl. Zusammen mit $\operatorname{ind}\boldsymbol{h}(0) = \operatorname{sign}(D\boldsymbol{h}(0)) \in \{-1,1\}$, folgt, dass $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,0)$ eine ungerade ganze Zahl ist. ■

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir den folgenden bedeutenden Satz

6.35 Satz (Satz vom offenem Bild) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^0(\Omega)$ und lokal injektiv. Dann ist $\boldsymbol{f}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist außerdem Ω ein Gebiet, so ist auch $\boldsymbol{f}(\Omega)$ ein Gebiet.*

Beweis Sei $y_0 \in \boldsymbol{f}(\Omega)$. Dann existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $\boldsymbol{f}(x_0) = y_0$. Nach Vorraussetzung existiert ein $0 < R < \operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$, so dass $\boldsymbol{f}|_{\overline{B_R(x_0)}}$ injektiv ist. Wir definieren

$$\boldsymbol{H}(x,t) = \boldsymbol{f}(x+x_0) - \boldsymbol{f}(-tx+x_0), \quad (x,t) \in \overline{B_R(0)} \times [0,1].$$

1) Man beachte: Unter Verwendung der Kettenregel folgt $D\boldsymbol{g}(x) = -D(\boldsymbol{g}(-x)) = D\boldsymbol{g}(-x)$, also $\operatorname{ind}\boldsymbol{g}(x) = \operatorname{ind}\boldsymbol{g}(-x)$ für alle $x \in \Omega$.

Aus $\boldsymbol{H}(x,t) = 0$ folgt $\boldsymbol{f}(x + x_0) = \boldsymbol{f}(-tx + x_0)$ und wegen der Injektivität $x = -tx$, also $x = 0$. Dies zeigt, dass $0 \notin \boldsymbol{H}(\partial B_R(0) \times [0,1])$. Aus der Homotopieinvarianz und (d1) und dem Satz von Borsuk ergibt sich

$$\deg(\boldsymbol{f}(\cdot + x_0), B_R(0), y_0) = \deg(\boldsymbol{H}(\cdot, 1), B_R(0), 0) \neq 0.$$

Zusammen mit der Folgerung 6.23 sehen wir, dass $\deg(\boldsymbol{f}(\cdot + x_0), B_R(0), y) = \deg(\boldsymbol{f}(\cdot + x_0), B_R(0), y_0) \neq 0$ auf eine Umgebung von y_0. Das heißt, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $y \in B_\varepsilon(y_0)$ ein $x \in B_R(0)$ mit $\boldsymbol{f}(x+x_0) = y$, was bedeutet, dass $B_\varepsilon(y_0) \subset \boldsymbol{f}(\Omega)$. Somit ist $\boldsymbol{f}(\Omega)$ eine offene Menge.

Ist Ω ein Gebiet, so ist $\boldsymbol{f}(\Omega)$ ebenfalls ein Gebiet. Außerdem ist $\boldsymbol{f}(\Omega)$ zusammenhängend, da jede stetige Abbidung stets zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbildet.

■

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir den

6.36 Satz (**Invarianz der Dimension**) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\boldsymbol{f} \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^m)$ $m \leq n$ lokal injektiv. Dann ist gilt $n = m$.*

Beweis Angenommen $m < n$. Wir definieren

$$\boldsymbol{F} \; = \; (f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Dann ist $\boldsymbol{F} \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ebenfalls lokal injektiv und hat kein offenes Bild in $\mathbb{R}^n$, denn $\boldsymbol{F}(\Omega) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}_{m-n}$ enthält keine n-dimensionale Kugel. Dies steht aber im Widerspruch zu Satz 6.35. Folglich muss $m = n$ sein. ■

Mehrdeutige Abbildungen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten mehrdeutige Abbildungen $\boldsymbol{f} : M \to 2^{\mathbb{R}^n}$ [2]. Das heißt für $x \in M$ ist $\boldsymbol{f}(x) \subset \mathbb{R}^n$.

6.37 Definition Eine Abbildung $\boldsymbol{f} : M \to 2^{\mathbb{R}^n}$ heißt stetig, falls

(i) $\boldsymbol{f}$ ist beschränkt, d.h. $\exists 0 < R < +\infty$, so dass $\boldsymbol{f}(x) \subset B_R(0)$ für alle $x \in M$

(ii) Aus $x_k \to x$ in M und $y_k \in \boldsymbol{f}(x_k) \to y$ in $\mathbb{R}^n$ für $k \to +\infty$ folgt $y \in \boldsymbol{f}(x)$.

6.38 Satz *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Sei $\boldsymbol{f} : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ stetig mit $\boldsymbol{f}(x) \subset K$ und konvex für alle $x \in K$. Dann existiert ein $x_* \in K$ mit $x_* \in \boldsymbol{f}(x_*)$.*

Beweis Auf $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Maximumnorm $\|x\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $A_\varepsilon = \{a = \varepsilon z \,|\, z \in \mathbb{Z}^n, d(a, K) \leq \varepsilon\}$. Insbesondere gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$(*) \qquad \#\{a \in A_\varepsilon \,|\, \|x - a\| \leq 2\varepsilon\} \leq 4^n.$$

[2] Für eine beliebige Menge X bezeichne 2^X die Potenzmenge der Menge X.

Sei $\eta \in C(\mathbb{R})$ mit $0 \le \eta \le 1$ in $\mathbb{R}$, $\eta = 1$ in $(-\infty, 1)$ und $\eta = 0$ in $(2, +\infty)$. Wir setzen

$$\eta_\varepsilon(t) = \eta\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\eta = 0$ auf $[2\varepsilon, +\infty)$. Wir definieren

$$\lambda_a^\varepsilon(x) = \frac{\eta_\varepsilon(\|x-a\|)}{\sum\limits_{b \in A_\varepsilon} \eta_\varepsilon(\|x-b\|)}, \quad a \in A_\varepsilon, x \in K.^{3)}$$

Ferner haben wir

$$\lambda_a^\varepsilon(x) \in [0,1] \quad \forall\, a \in A_\varepsilon, \quad \sum_{a \in A_\varepsilon} \lambda_a^\varepsilon(x) = 1.$$

Für jedes $a \in A_\varepsilon$ existiert ein $x_a^\varepsilon \in K$ mit $\|a - x_a^\varepsilon\| \le \varepsilon$. Wir wählen $y_a^\varepsilon \in \boldsymbol{f}(x_a^\varepsilon)$ und setzen

$$\boldsymbol{f}_\varepsilon(x) = \sum_{a \in A_\varepsilon} \lambda_a^\varepsilon(x) y_a^\varepsilon, \quad x \in K.$$

Somit ist $\boldsymbol{f}_\varepsilon : K \to K$ stetig. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein $x_\varepsilon \in K$ mit $\boldsymbol{f}(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

Da K kompakt ist, existiert eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ und ein $x \in K$, so dass $x_{\varepsilon_k} \to x$ in K. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es gemäß $(*)$ eine Teilmenge $\{a_1^k, \dots, a_{4^n}^k\} \subset A_{\varepsilon_k}$, so dass

$$x_{\varepsilon_k} = \sum_{j=1}^{4^n} \lambda_{a_j^k}^{\varepsilon_k}(x_k) y_{a_j^k}^{\varepsilon_k}.$$

Indem man ggf. zu einer Teilfolge übergeht kann man annehmen, dass

$$y_{a_j^k}^{\varepsilon_k} \to y_j \in K, \quad \lambda_{a_j^k}^{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) \to \lambda_j \quad \text{für} \quad k \to +\infty \quad (j = 1, \dots, 4^n).$$

Falls $\lambda_j \neq 0$, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_{\varepsilon_k} - a_j^k\| \le 2\varepsilon_k$ für alle $k \ge k_0$, was impliziert, dass $x_{\varepsilon_k} - a_j^k \to 0$, also $a_j^k \to x$ für $k \to +\infty$. Beachtet man außerdem $\|x_{a_j^k}^{\varepsilon_k} - a_j^k\| \le \varepsilon_k$, so ergibt sich und auch $x_{a_j^k}^{\varepsilon_k} \to x$ für $k \to +\infty$. Aus der der Stetigkeit von $\boldsymbol{f}$ folgt $y_j \in \boldsymbol{f}(x)$. Somit erhalten wir

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{\varepsilon_k} = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{4^n} \lambda_{a_j^k}^{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) y_{a_j^k}^{\varepsilon_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{4^n} \lambda_j y_j.$$

Da auf der rechten Seite eine Konvexkombination von Elementen aus $\boldsymbol{f}(x)$ steht und $\boldsymbol{f}(x)$ konvex ist, folgt $x \in \boldsymbol{f}(x)$. ■

---

3) Man beachte, dass die Summe im Nenner über höchstens 4^n Summanden erstreckt wird und größer als 1 ist. Außerdem ist $\lambda_a^\varepsilon(x) \neq 0$ für höchstens 4^n viele $a \in A_\varepsilon$.

7. Der Schaudersche Fixpunktsatz

In den folgenden Betrachtungen sei stets X ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|$.

Wir beginnen mit dem folgenden

7.1 Lemma *Sei $\{a_1,\dots,a_N\}\subset X$ und $M=\operatorname{conv}(\{a_1,\dots,a_N\})$. Ferner sei $F: M\to 2^X$ stetig, d.h. aus $x_k\to x$ in M und $y_k\in F(x_k)\to y$ in M folgt $y\in F(x)$. Ferner sei $F(x)\subset M$ konvex für alle $x\in M$. Dann existiert ein $x_*\in M$ mit $x_*\in F(x_*)$.*

Beweis Wir setzen $K:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^N\,\middle|\,0\le\xi_i\le 1,\sum_{i=1}^N\xi_i=1\right\}$ und definieren eine lineare Abbildung $\Phi:\mathbb{R}^N\to X$ gemäß

$$\Phi(\xi)=\sum_{i=1}^N\xi_i a_i,\quad \xi\in\mathbb{R}^N.$$

Wir definieren $\boldsymbol{f}: K\to 2^K$ durch

$$\boldsymbol{f}(\xi)=\left\{w\in K\,\middle|\,\Phi(w)\in F(\Phi(\xi))\right\},\quad \xi\in K.$$

1) *Die Menge $\boldsymbol{f}(\xi)$ is nichtleer* Denn aus $\xi\in K$ folgt $\Phi(\xi)\in M$. Sei $y\in F(\Phi(\xi))$. Nach Voraussetzung ist $y\in M$ Also existiert $w\in\mathbb{R}^N$, so dass $y=\Phi(w)$, also $w\in\boldsymbol{f}(\xi)$.

2) *Die Menge $\boldsymbol{f}(\xi)$ ist konvex.* Seien $w,w'\in\boldsymbol{f}(\xi)$, also $\Phi(w),\Phi(w')\in F(\Phi(\xi))$. Sei $t\in[0,1]$. Da Φ linear und $F(\Phi(\xi))$ konvex ist haben wir

$$\Phi((1-t)w+tw')\;=\;(1-t)\Phi(w)+t\Phi(w')\in F(\Phi(\xi)).$$

Folglich gilt $(1-t)w+tw'\in\boldsymbol{f}(\xi)$.

3) *$\boldsymbol{f}$ ist stetig.* Sei $\xi^k\to\xi$ in K und $w^k\in\boldsymbol{f}(\xi^k)\to w$ in K. Dann folgt $\Phi(\xi^k)\to\Phi(\xi)$ und $\Phi(w^k)\in F(\Phi(\xi^k))\to\Phi(w)$ in M. Aus der Stetigkeit von F folgt $\Phi(w)\in F(\Phi(\xi))$, also $w\in\boldsymbol{f}(\xi)$. Somit ist $\boldsymbol{f}$ stetig.

Gemäß 6.38 existiert ein $\xi_*\in K$ mit $\xi^*\in\boldsymbol{f}(\xi^*)$, was äquivalent ist zu $\Phi(\xi^*)\in F(\Phi(x_*))$. Somit ist $x^*=\Phi(\xi^*)\in M$ der gesuchte Fixpunkt. ∎

7.2 Satz *Sei $M\subset X$ abgeschlossen und konvex. Ferner sei $F: M\to 2^X$ mit*

(i) F ist stetig, d.h. aus $x_k\to x$ in M und $y_k\in F(x_k)\to y$ folgt $y\in F(x)$;

(ii) $F(M)=\{y\,|\,y\in F(x),x\in M\}$ ist relativ kompakt;

(iii) $F(x)\subset M$ ist konvex für alle $x\in M$.

Dann hat F einen Fixpunkt in M.

Beweis 1° Sei $x_0 \in M$. Wir zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt:

$$\forall\, y \in F(x) \quad \exists y_0 \in F(x_0): \quad \|y - y_0\| \leq \varepsilon.$$

Wir nehmen an, die Aussage ist falsch. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{1/n}(x_0)$ existiert, so dass

$$\exists y_n \in F(x_n): \quad \|y_n - y_0\| \geq \varepsilon \quad \forall\, y_0 \in F(x_0).$$

Da $F(M)$ relativ kompakt ist, existiert eine Teilfolge (y_{n_k}) und ein $y_0 \in M$, so dass

$$y_{n_k} \to y_0 \quad \text{in} \quad M \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

Wegen $x_{n_k} \to x_0$ und der Stetigkeit von F wäre $y_0 \in F(x_0)$. Außerdem folgt aus der Konvergenz $\|y_{n_k} - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, was aber der Annahme widerspricht.

2°. Sei $\varepsilon > 0$. Da $F(M)$ relativ kompakt ist, existiert ein endliches ε-Netz $\{a_1^\varepsilon, \ldots, a_{m_\varepsilon}^\varepsilon\} \subset F(M)$, so dass für jedes $y \in F(M)$ ein $i \in \{1, \ldots, m_\varepsilon\}$ existiert, mit $\|y - a_i^\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$ in $\mathbb{R}$, $\eta \equiv 1$ in $(-\infty, 1)$ und $\eta = 0$ in $(2, +\infty)$. Wir setzen $\eta_\varepsilon(t) := \eta\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)$ $(t \in \mathbb{R})$. Offensichtlich ist $\eta_\varepsilon = 0$ in $(2\varepsilon, +\infty)$. Wir definieren

$$\lambda_i^\varepsilon(x, y) := \frac{\eta_\varepsilon(\|y - a_i^\varepsilon\|)}{\sum\limits_{j=1}^{m_\varepsilon} \eta_\varepsilon(\|y - a_j^\varepsilon\|)}, \quad x \in M, y \in F(x) \quad (i = 1, \ldots, m_\varepsilon).$$

Wir zeigen: Sei $x_0 \in M$. Für alle $\tau > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in B_\delta(x_0)$ gilt:

$$\forall\, y \in F(x) \quad \exists y_0 \in F(x_0): \quad \Big|\lambda_i^\varepsilon(x, y) - \lambda_i^\varepsilon(x_0, y_0)\Big| \leq \frac{\tau}{m_\varepsilon(1 + \|a_i^\varepsilon\|)}.$$

Hierzu betrachte man die Abbildung $G : \overline{F(M)} \to \mathbb{R}_+$

$$G(y) = \frac{\eta_\varepsilon(\|y - a_i^\varepsilon\|)}{\sum\limits_{j=1}^{m_\varepsilon} \eta_\varepsilon(\|y - a_j^\varepsilon\|)}, \quad y \in \overline{F(M)}.$$

Da $\overline{F(M)}$ kompakt ist, ist diese Abbildung gleichmäßig stetig. Das heißt, es existiert ein $\varepsilon_i > 0$, so dass

$$|G(y_1) - G(y_2)| \leq \frac{\tau}{m_\varepsilon(1 + \|a_i^\varepsilon\|)} \quad \forall\, y_1, y_2 \in \overline{F(M)} \text{ mit } \quad \|y_1 - y_2\| \leq \varepsilon_i.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus 1° mit $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \varepsilon_i$.

3° Wir setzen $M_\varepsilon := \operatorname{conv}(\{a_1^\varepsilon, \ldots, a_{m_\varepsilon}^\varepsilon\})$ und definieren

$$F_\varepsilon(x) := \overline{\operatorname{conv}\bigg(\bigg\{\sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i^\varepsilon(x, y) a_i^\varepsilon \,\bigg|\, y \in F(x)\bigg\}\bigg)}, \quad x \in M_\varepsilon.$$

Wir zeigen $F_\varepsilon : M_\varepsilon \to 2^{M_\varepsilon}$ ist eine stetige Abbildung. Sei $x_k \to x_0$ in M_ε und $y_k \in F_\varepsilon(x_k) \to y_0$ in M_ε. Sei $\tau > 0$ beliebig. Man wähle $\delta > 0$ gemäß 2°. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_0 - x_k\| < \delta$ für alle $k \geq k_0$. Sei $k \geq k_0$. Es existieren $\mu_j^k \in [0,1]\,(j = 1, \ldots, N_k)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{N_k} \mu_j = 1$ und $y_j^k \in F(x_k)\,(j = 1, \ldots, N_k)$, so dass

$$\Big\| y_k - \sum_{j=1}^{N_k} \mu_j^k \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i^\varepsilon(x_k, y_j^k) a_i^\varepsilon \Big\| \leq \tau.$$

Gemäß 2° existieren $y_{j,0} \in F(x_0)$, so dass

$$\|\lambda_i^\varepsilon(x_k, y_j^k) - \lambda_i^\varepsilon(x_0, y_{j,0})\| \leq \frac{\tau}{m_\varepsilon(1 + \|a_i^\varepsilon\|)} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_k.$$

Wir setzen

$$u_k := \sum_{j=1}^{N_k} \mu_j^k \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i^\varepsilon(x_0, y_{0,j}) a_i^\varepsilon.$$

Gemäß Definition ist $u_k \in F_\varepsilon(x_0)$. Mithilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|y_k - u_k\| &\leq \tau + \Big\| \sum_{j=1}^{N_k} \mu_j^k \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i^\varepsilon(x_k, y_j^k) - \lambda_i^\varepsilon(x_0, y_{0,j}) a_i^\varepsilon \Big\| \\
&\leq \tau + \sum_{j=1}^{N_k} \mu_j^k \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \Big| \lambda_i^\varepsilon(x_k, y_j^k) - \lambda_i^\varepsilon(x_0, y_{0,j}) \Big| \|a_i^\varepsilon\| \\
&\leq 2\tau.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $d(y, F_\varepsilon(x_0)) = 0$, also $y \in F_\varepsilon(x_0)$.

4° Nach 7.1 existiert ein $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$ mit $x_\varepsilon \in F_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Dann gibt es $\mu_j^\varepsilon \in [0,1]$ $(j = 1, \ldots, N_\varepsilon)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j = 1$ und $y_j^\varepsilon \in F(x_\varepsilon)$, so dass

$$\Big\| x_\varepsilon - \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) a_i^\varepsilon \Big\| \leq \varepsilon.$$

Wir definieren

$$y^\varepsilon := \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon y_j^\varepsilon = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) y_j^\varepsilon.$$

Da $F(x_\varepsilon)$ konvex ist, gilt $y^\varepsilon \in F(x_\varepsilon)$. Ist $\lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) \neq 0$, so folgt $\|a_i^\varepsilon - y_j^\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$. Hiermit bekommt man

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) a_i^\varepsilon - y^\varepsilon \Big\| &\leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) \|a_i^\varepsilon - y_j^\varepsilon\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mu_j^\varepsilon \sum_{i=1}^{m_\varepsilon} \lambda_i(x_\varepsilon, y_j^\varepsilon) 2\varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mithilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| \le 3\varepsilon.$$

Da $\overline{F(M)} \subset M$ kompakt ist, existiert eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ und ein $y \in M$, so dass $y_{\varepsilon_k} \to y$ in M. Aus der obigen Abschätzung folgt andererseits, dass $x_{\varepsilon_k} \to y$ in M. Aufgrund der Stetigkeit von F ergibt sich $y \in F(y)$. ■

7.3 Satz (Leray-Schauder) *Sei $T : X \to X$ stetig und kompakt, so dass $\{x \in X \mid x = \lambda T(x)$ für ein $\lambda \in [0,1]\}$ beschränkt ist. Dann hat T einen Fixpunkt.*

Beweis Nach Voraussetzung existiert ein $0 < R < +\infty$, so dass

$$\{x \in X \mid x = \lambda T(x) \text{ für ein } \lambda \in [0,1]\} \subset B_R(0).$$

Wir definieren

$$L(x) = \begin{cases} x & \text{falls} \quad \|x\| \le R \\ R\frac{x}{\|x\|} & \text{falls} \quad \|x\| > R. \end{cases}$$

Dann ist $L : X \to X$ stetig. Wir setzen $F = L \circ T|_{\overline{B_R(0)}}$. Dann ist $F : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$ stetig und kompakt. Gemäß 7.1 existiert ein $x_* \in \overline{B_R(0)}$ mit $F(x_*) = x_*$. Falls $\|T(x_*)\| \le R$, so ist x_* Fixpunkt von T. Anderenfalls wäre

$$F(x_*) = R\frac{T(x_*)}{\|T(x_*)\|} = x_*.$$

Wegen $\|T(x_*)\| > R$ ist $\lambda = \frac{R}{\|T(x_*)\|} \in [0,1]$ und $x_* = \lambda T(x_*) \in B_R(0)$. Dies widerspicht aber $\|x_*\| = \|F(x_*)\| = R$. Folglich hat T einen Fixpunkt. ■

7.4 Folgerung *Sei $T : X \to X$ stetig und kompakt und $T(X)$ beschränkt. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis Folgt sofort aus 7.2., denn aus $x = \lambda T(x)$ für $\lambda \in [0,1]$ folgt $\|x\| \le \|T(x)\| \le C$. Somit auch die Menge $\{x \in X \mid x = \lambda T(x)$ für ein $\lambda \in [0,1]\}$ in X beschränkt. ■

ÜA. Satz von Peano

7.5 Beispiel Nichlineares Randwertproblem 2. Ordnung in 1d.

$$(*) \qquad \begin{cases} -u'' = f(x,u,u') & \text{in} \quad I = [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Voraussetzungen an $f : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) f ist stetig

(ii) $f(x,\cdot,\cdot)$ ist Lipschitz-stetig,

$$|f(x,u_1,p_1)-f(x,u_2,p_2)| \le L(|u_1-u_2|+|p_1-p_2|) \quad \forall\,(u_1,p_1),(u_2,p_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

wobei die Konstante $L > 0$ nicht von $x \in I$ abhängt.

(iii) $u \mapsto f(x,u,p)$ ist monoton fallend für alle $(x,p) \in I \times \mathbb{R}$.

Beispiele 1) linearer Fall

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = g(x), \quad b,c,g \in C^0(I), c \geq 0.$$

Hier ist $f(x,u,p) = -b(x)p - c(x)u + g(x)$.

2) nichtlinearer Fall

$$-a(u)u'' + b(x,u)u' + c(x,u)u = g(x), \quad a \geq a_0 > 0.$$

Hier ist $f(x,u,p) = -\frac{b(x,u)}{a(u)}p - \frac{c(x,u)}{a(u)}u + \frac{g(x)}{a(u)}$.

Definiere $F : C^1(I) \to C^1(I)$

$$F(v)(x) := -\int_0^x \int_0^t f(s,v(s),v'(s))dsdt + x\int_0^1 \int_0^t f(s,v(s),v'(s))dsdt,$$

$v \in C^1(I), x \in I$. Wegen $s \mapsto f(s,v(s),v'(s)) \in C^0(I)$ ist $w := F(v) \in C^2(I)$ und erfüllt

$$w'' = f(x,v,v') \quad \text{in} \quad I, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

Ferner gilt u löst $(*)$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ u ist Fixpunkt von F.

Eigenschaften von F:

a) F ist stetig.

b) F ist kompakt: Setzen $w = F(u)$. Sei $0 < R < +\infty$. Dann existiert eine Konstante $C_R > 0$, so dass

$$\max_{x \in I} |f(x, u(x), u'(x))| \leq C_R \quad \forall\, u \in C^1(I), \quad \|u\|_{C^1(I)} \leq R.$$

Sei $u \in C^1(I)$ mit $\|u\|_{C^1(I)} \leq R$. Setzen $w = F(u)$. Dann

$$\begin{aligned} \max |w| &\leq 2 \max_{x \in I} |f(x, u(x), u'(x))| \leq 2C_R, \\ \max |w'| &\leq 2 \max_{x \in I} |f(x, u(x), u'(x))| \leq 2C_R, \\ \max |w''| &\leq \max_{x \in I} |f(x, u(x), u'(x))| \leq C_R. \end{aligned}$$

Folglich ist $F(B_R(0))$ in $C^2(I)$ beschränkt. Da aber die Einbettung $C^1(I) \hookrightarrow C^2(I)$ kompakt ist, ist $F(B_R(0))$ in $C^1(I)$ relativ kompakt.

Begründung: Sei $M \subset C^2(I)$ beschränkt. Es existiert ein $c > 0$, so dass

$$\|u\|_{C^2(I)} \leq c.$$

Insbesondere ist $M \subset C^1(I)$ beschränkt. Für $u \in M$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|, \quad |u'(x) - u'(y)| \leq c|x - y| \quad \forall\, x, y \in I.$$

Dann ist M und $\{u' | u \in M\}$ gleichgradig stetig. Mithilfe des Satzes von Arcela-Ascoli zeigt man, dass $M \subset C^1(I)$ relativ kompakt ist.

c) Die Menge $\{u \in C^1(I) \,|\, u = \lambda F(u) \text{ für ein } \lambda \in [0,1)\}$ ist in $C^1(I)$ beschränkt.

Dazu das folgende

Lemma (Maximumprinzip) *Sei $\lambda \in [0,1]$. Sei $v \in C^1(I)$ mit $v \geq 0$ (bzw. $v \leq 0$) $-v'' > \lambda f(x, v, v')$ (bzw. $-v'' < \lambda f(x, v, v')$). Dann gilt:*

$$u \leq v \quad (\textit{bzw. } u \geq v) \quad \forall\, u \in C^1(I) \quad \textit{mit} \quad u = \lambda F(u).$$

Beweis Aus $u = \lambda F(u)$ folgt

$$-u'' = \lambda f(x, u, u'), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Wir nehmen an, dass $u(x_0) - v(x_0) = \max_I (u - v) > 0$. Dann ist $x_0 \in (0,1)$ und es gilt:

$$u'(x_0) - v'(x_0) = 0, \quad u''(x_0) - v''(x_0) \leq 0.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lambda f(x_0, v(x_0), v'(x_0)) &< -v''(x_0) \le -u''(x_0) \\ &= \lambda f(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \;=\; \lambda f(x_0, u(x_0), v'(x_0)) \\ &\le \lambda f(x_0, v(x_0), v'(x_0)),\end{aligned}$$

was aber ein Widerspruch ist. Folglich gilt $u \le v$.
Analog zeigt man die zweite Aussage. ■

Wir machen den Ansatz: $v(x) = e^\alpha - e^{\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda f(x, v, v') &= \lambda f(x, e^\alpha - e^{\alpha x}, -\alpha e^{\alpha x}) \\ &= \lambda f(x, e^\alpha - e^{\alpha x}, -\alpha e^{\alpha x}) - \lambda f(x, e^\alpha - e^{\alpha x}, 0) \\ &\qquad\qquad + \lambda f(x, e^\alpha - e^{\alpha x}, 0) \\ &\le L\alpha e^{\alpha x} \,+\, \max_I |f(x, 0, 0)|.\end{aligned}$$

Wählt man $\alpha = 2\max\{L, \sqrt{\max_I |f(x,0,0)|}\}$, so ergibt sich

$$\lambda f(x, v, v') < \frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha x} + \frac{\alpha^2}{2} \le -v''.$$

Folglich gilt für $u = \lambda F(u)$,

$$u \le v \,\le\, e^\alpha, \quad \alpha = 2\max\{L, \sqrt{\max_I |f(x,0,0)|}\}.$$

Analog zeigt man $u \ge -e^\alpha$, vermöge $v = e^{\alpha x} - e^\alpha$

$$\begin{aligned}\lambda f(x, v, v') &= \lambda f(x, -e^\alpha + e^{\alpha x}, \alpha e^{\alpha x}) \\ &= \lambda f(x, -e^\alpha + e^{\alpha x}, \alpha e^{\alpha x}) - \lambda f(x, -e^\alpha + e^{\alpha x}, 0) \\ &\qquad\qquad + \lambda f(x, -e^\alpha + e^{\alpha x}, 0) \\ &\ge -L\alpha e^{\alpha x} \,+\, \max_I |f(x, 0, 0)| > -v''.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\max_I |u| \,\le\, e^\alpha$.

Abschätzung von $|u'|$. Sei $x \in [0,1]$. Dann gibt es die drei Fälle $u'(x) = 0$, $u'(x) < 0$ oder $u'(x) > 0$. Wir betrachten den Fall $u(x) > 0$ und bemerken, dass man für $u'(x) < 0$ analog argumentiert. Da $u(0) = u(1) = 0$, hat nach dem Satz von Rolle u' in $[0,1]$ mindestens eine Nullstelle x_0. O.B.d.A. können wir $x_0 > x$ annehmen. Nun sei $x_1 \in (x, x_0]$ die kleinste Nullstelle von u'. Dann haben wir $u' > 0$ in (x, x_1). Unter

Verwendung partieller Integration folgt

$$
\begin{aligned}
u'(x) = -\int_x^{x_1} u''(t)dt \;&=\; \lambda \int_x^{x_1} f(t, u(t), u'(t))dt \\
&\leq \lambda L \int_x^{x_1} u'(t)dt + \lambda \int_x^{x_1} f(t, u(t), 0)dt \\
&\leq \lambda L(u(x_1) - u(x)) + \lambda \int_x^{x_1} f(t, u(t), 0)dt \\
&\leq 2Le^{\alpha} + \int_0^1 |f(t, -e^{\alpha}, 0)|dt.
\end{aligned}
$$

Folglich

$$
\max_I |u'| \leq 2Le^{\alpha} + \int_0^1 |f(t, -e^{\alpha}, 0)|dt.
$$

Gemäß 7.2 existiert ein $u \in C^1(I)$ mit $F(u) = u$, also eine Lösung von $(*)$.

III. Monotone Opperatoren, Verzweigungstheorie

8. Monotone Operatoren

Motivation: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht fallend nicht nach oben und unten beschränkt, so ist f surjektiv. Diese Aussage lässt sich auf Operatoren $F : X \to X$ verallgemeinern.

Im folgenden sei X ein reeller Banachraum. Für $x \in X, x' \in X'$ schreiben wir: $\langle x', x\rangle = x'(x)$.

8.1 Definition Sei $F : X \to X'$ ein Operator.

(a) F heißt *monoton*, genau dann wenn

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

(b) F heißt *koerziv*, genau dann wenn

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle F(x), x\rangle}{\|x\|} \to +\infty.$$

(c) F heißt *hemistetig*, genau dann wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ die Abbildung $t \mapsto \langle F(x_1 + tx_2), x_3\rangle$ von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ stetig ist.

(d) F heißt *demistetig*, genau dann wenn, aus $x_k \to x$ in X für $k \to +\infty$ folgt

$$F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} F(x) \quad \text{für} \quad k \to +\infty.$$

8.2 Beispiel Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $0 \leq f'(s) \leq L$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir setzen $X := W_0^{1,2}(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|v\|_X = \Big(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}, \quad v \in X.$$

Poincaré-Ungleichung: Es existiert eine Konstante $c_0 > 0$, so dass

$$\|v\|_{L^2} \leq c_0\|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall\, v \in X.$$

Dies impliziert

$$\|v\|_X \leq \sqrt{1 + c_0^2}\|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall\, v \in X.$$

Betrachte Abbildung $F : X \to X'$ gegeben durch

$$\langle F(u), v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega f(u)v dx, \quad u, v \in X.$$

(i) F ist wohldefiniert: HS der DIR liefert $f(s) = f(0) + \int\limits_0^1 f'(\tau s) s d\tau$. Hiermit ergibt sich

$$|f(s)| \leq |f(0)| + L|s| \quad \forall s \in R.$$

Seien $u, v \in X$. Mithilfe der obigen Ungleichung und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung findet man

$$\begin{aligned}
|\langle F(u), v\rangle| &\leq \int\limits_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx \int\limits_\Omega |f(u)||v| dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \int\limits_\Omega (|f(0)| + L|u|)|v| dx \\
&\leq \|u\|_X \|v\|_X + \left(\int\limits_\Omega 1 dx\right)^{1/2} \|v\|_{L^2} + L\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq (|\Omega|^{1/2} + (1+L)\|u\|_X)\|v\|_X.
\end{aligned}$$

Die liefert die Abschätzung

$$\|F(u)\|_{X'} \leq |\Omega|^{1/2} + (1+L)\|u\|_X.$$

(ii) F ist monoton. Seien $u_1, u_2 \in X$. Dann

$$\begin{aligned}
\langle F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2\rangle &= \int\limits_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx \\
&\quad + \int\limits_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) dx \\
&\geq \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2}^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

(iii) F ist koerziv. Sei $u \in X$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\langle F(u), u\rangle &= \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Omega f(u) u dx \\
&= \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int\limits_\Omega (f(u) - f(0))(u - 0) dx + \int\limits_\Omega f(0) u dx \\
&\geq \|\nabla u\|_{L^2}^2 - |\Omega|^{1/2}|f(0)|\|u\|_X \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2}}\|u\|_X^2 - |\Omega|^{1/2}|f(0)|\|u\|_X.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\langle F(u), u\rangle}{\|u\|_X} \geq \frac{1}{\sqrt{1+c_0^2}}\|u\|_X - |\Omega|^{1/2}|f(0)| \to +\infty \quad \text{für} \quad \|u\|_X \to +\infty.$$

(iv) F ist hemistetig. Seien $u_1, u_2, u_3 \in X$.

$$\begin{aligned}\Phi(t) \;&=\; \langle F(u_1 + tu_2), u_3\rangle \;=\; \int_\Omega (\nabla u_1 + t\nabla u_2)\cdot \nabla u_3 dx \;+\; \int_\Omega f(u_1+tu_2)u_3 dx \\ &=\; \Phi_1(t) + \Phi_2(t).\end{aligned}$$

1) $\Phi_1(t) \;=\; \int\limits_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_3 dx + t\int\limits_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_3 dx$ ist stetig.

2) Seien $t_0, t \in [0,1]$. Dann

$$|\Phi_2(t_0) - \Phi_2(t)| \le \int_\Omega |f(u_1+tu_2) - f(u_1+t_0u_2)||u_3|dx \;\le\; L|t-t_0||\Omega|^{1/2}\|u_2\|_X\|u_3\|_X.$$

Dies zeigt, dass Φ stetig ist.

8.3 Lemma *Sei $F : X \to X'$ monoton. Dann ist F lokal beschränkt, d. h. zu jedem $x_0 \in X$ existiert ein $r > 0$, so dass $F(B_r(x_0))$ in X' beschränkt ist.*

Beweis. Annahme F ist nicht lokal beschränkt in x_0. Dann existiert eine Folge $x_k \to x_0$ und $\|F(x_k)\|_{X'} \to +\infty$ für $k \to +\infty$. Sei $y \in X$ beliebig gewählt. Da F monoton ist haben wir

$$\begin{aligned} &0 \le \langle F(x_k) - F(x_0 + y), x_k - x_0 - y\rangle \\ \iff \quad &\langle F(x_k), y\rangle \le \langle F(x_k), x_k - x_0\rangle - \langle F(x_0+y), x_k - x_0 - y\rangle.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\langle F(x_k), y\rangle \le \|F(x_k)\|_{X'}\|x_k - x_0\|_X + \|F(x_0+y)\|_{X'}(\|x_k - x_0\|_X + \|y\|).$$

Wir definieren $f_k \in X'$ durch

$$f_k = \frac{F(x_k)}{1 + \|F(x_k)\|_{X'}\|x_k - x_0\|_X}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aus der obigen Ungleichung schließt man

$$\langle f_k, y\rangle \le 1 + \|F(x_0+y)\|_{X'} + \|y\|_{X'} \quad \forall\, y \in X. \text{ [4]}$$

Nach dem Satz von Banach/Steinhaus (6.2 lineare FA ?) ist (f_k) in X' beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$, so dass $\|f_k\|_{X'} \le M$, woraus folgt dass

$$\|F(x_k)\|_{X'} \le M(1 + \|F(x_k)\|_{X'}\|x_k - x_0\|_X) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - x_0\|_X \le \frac{1}{2M}$ für alle $k \ge k_0$. Folglich wäre

$$\frac{1}{2}\|F(x_k)\|_{X'} \;\le\; M \quad \forall\, k \ge k_0,$$

was aber der Annahme widerspricht. Also ist F lokal beschränkt. ∎

8.4 Lemma von Minty *Sei $F : X \to X'$ monoton und hemistetig. Dann gilt:*

[4] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\|x_k - x_0\| \le 1$ annehmen.

(a) Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit*

$$\begin{aligned} &x_k \rightharpoonup x \quad \textit{in} \quad X, \quad F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} f, \\ &\langle F(x_k), x_k\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{für} \quad k \to +\infty, \end{aligned}$$

so folgt $f = F(x)$.

(b) F *ist demistetig.*

Beweis (a) Sei $\widetilde{x} \in X$, F monoton

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle F(x_k) - F(\widetilde{x}), x_k - \widetilde{x}\rangle \\ &= \langle F(x_k), x_k\rangle - \langle F(x_k), \widetilde{x}\rangle - \langle F(\widetilde{x}), x_k\rangle + \langle F(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle \\ &\underset{k\to\infty}{\to} \langle f, x\rangle - \langle f, \widetilde{x}\rangle - \langle F(\widetilde{x}), x\rangle + \langle F(\widetilde{x}), \widetilde{x}\rangle \\ &= \langle f - F(\widetilde{x}), x - \widetilde{x}\rangle. \end{aligned}$$

Setzt man für $\widetilde{x} = x + ty$ mit $y \in X$ und $t \in (0,1]$, so folgt

$$0 \le \langle f - F(x+ty), -ty\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle f - F(x+ty), y\rangle \le 0.$$

Da F hemistetig ist, folgt mit $t \to 0$,

$$\langle f - F(x), y\rangle \le 0 \quad \forall\, y \in X.$$

Dies impliziert $f = F(x)$.

(b) Sei $(x_k)_{k\in N}$ eine Folge mit $x_k \to x$ in X für $k \to +\infty$. Gemäß 8.3 ist F lokal beschränkt. Folglich existiert ein $M > 0$, so dass

$$\|F(x_k)\|_{X'} \;\le\; M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund der schwach $*$ Kompaktheit existiert eine Teilfolge (x_{k_j}) und ein $f \in X'$, so dass

$$F(x_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wie man leicht sieht, gilt $\langle F(x_{k_j}), x_{k_j}\rangle \to \langle f, x\rangle$ für $j \to +\infty$. In der Tat,

$$\begin{aligned} |\langle F(x_{k_j}), x_{k_j}\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle F(x_{k_j}), x_{k_j} - x\rangle| + |\langle F(x_{k_j}) - f, x\rangle| \\ &\le M\|x_{k_j} - x\|_X \;+\; |\langle F(x_{k_j}) - f, x\rangle| \\ &\to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \end{aligned}$$

Nach (a) ergibt sich $f = F(x)$ und somit $F(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} F(x)$.

8.5 Satz (**Brower, Minty**) *Sei* X *reflexiv und separabel. Sei* $F : X \to X'$ *monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann ist* F *surjektiv, d.h. für jedes* $f \in X'$ *existiert ein* $x \in X$*, so dass* $F(x) = f$.

Beweis. Da X separabel ist, existiert eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren, so dass

$$\overline{\operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}} = X.$$

Wir definieren

$$X_n := \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt: $X_n \subset X_{n+1}$.

Galerkin-Verfahren: Wir definieren die Isomorphismen $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to X_n$, durch

$$\Phi_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner sei $P_n : X' \to X_n'$ die kanonische Projektion,

$$\langle P_n(g), x\rangle \;=\; \langle g, x\rangle, \quad g \in X', x \in X_n$$

und $R_n : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$ bezeichne den Rieszschen Darstellungsoperator. Wir definieren $G_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, durch

$$G_n(\xi) := R_n \circ \Phi_n^* \circ P_n \circ (F(\Phi_n(\xi)) - f), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Da F koerziv ist, existiert ein $R > 0$, so dass

$$\langle F(x), x\rangle \geq \|f\|_{X'}\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X, \|x\|_X \geq R.$$

Da Φ_n Isomorphismus ist existieret $c_1 > 0$, so dass

$$c_1^{-1}|\xi| \leq \|\Phi_n(\xi)\|_X \leq c_1|\xi| \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Folglich

$$\|\Phi_n(\xi)\|_X \geq R \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \geq c_1 R$$

Hiermit bekommt man für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = c_1 R$

$$\begin{aligned}(G_n(\xi), \xi) &= \langle F(\Phi_n(\xi)) - f, \Phi_n(\xi)\rangle \\ &\geq \|f\|_{X'}\|\Phi_n(\xi)\|_X - \|f\|_{X'}\Phi_n(\xi)\|_X \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz, existiert ein $\xi_n \in \mathbb{R}^n$, so dass $G_n(\xi_n) = 0$, was equivalent ist zu

$$P_n \circ F(\Phi_n(\xi_n)) = P_n \circ f.$$

Setzt man $x_n := \Phi_n(\xi_n)$, so ergibt sich

$$\langle F(x_n), w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in X_n.$$

(i) Wir zeigen nun, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt ist. Wir nehmen an, $\|x_n\|_X \to +\infty$. Aus der obigen Identität und der Koerzivität von F folgt

$$\left\langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|_X} \right\rangle = \frac{\langle F(x_n), x_n\rangle}{\|x_n\|_X} \to +\infty \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\langle f, \frac{x_n}{\|x_n\|_X}\rangle \le \|f\|_{X'}$. Somit ist (x_n) in X beschränkt. Gemäß 8.3 ist F lokal beschränkt. Folglich existiert ein $r > 0$ und ein $M > 0$, so dass

$$\|F(x)\|_{X'} \le M \quad \forall\, x \in \overline{B_r(0)}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{B_r(0)}$. Dann folgt aus der Monotonie und $P_n \circ F(x_n) = P_n \circ f$

$$\begin{aligned}\langle F(x_n), x\rangle &= \langle F(x_n), x - x_n\rangle + \langle F(x_n), x_n\rangle \\ &= \langle F(x_n) - F(x), x - x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle + \langle F(x), x - x_n\rangle \\ &\le \|f\|_{X'}\|x_n\|_X + M(\|x\|_X + \|x_n\|_X) \le C_0\end{aligned}$$

Hieraus schließt man $\|F(x_n)\|_{X'} \le C_0 r^{-1}$. Aufgrund der Reflexivität von X und der schwach-$*$ Kompaktheit beschränkter Mengen in X' findet man eine Teilfolge (x_{n_j}) und Elemente $x \in X$ sowie $g \in X'$, so dass

$$\begin{aligned} x_{n_j} &\rightharpoonup x \quad \text{in} \quad X, \\ F(x_{n_j}) &\overset{*}{\rightharpoonup} g \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \end{aligned}$$

Sei $w \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}$, d.h $w \in X_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_j \ge m$ für alle $j \ge j_0$. Dann

$$\langle g, w\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), w\rangle = \langle f, w\rangle.$$

Da $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \ldots\}$ dicht in X ist, erhält man $g = f$. Auf der anderen Seite haben wir

$$\lim_{j\to\infty} \langle F(x_{n_j}), x_{n_j}\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f, x_{n_j}\rangle = \langle f, x\rangle$$

Nach 8.4 (a) ergibt sich $f = F(x)$. ■

8.6 Bemerkung Ist F zusätzlich strikt monoton, d. h.

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \text{mit} \quad x_1 \ne x_2,$$

dann existiert für jedes $f \in X'$ genau eine Lösung $x \in X$ von $F(x) = f$.
Angenommen es gibt $\widetilde{x} \in X$ mit $\widetilde{x} \ne x$ und $F(\widetilde{x}) = f$, so wäre

$$0 = \langle F(x) - F(\widetilde{x}), x - \widetilde{x}\rangle > 0,$$

was aber ein Widerspruch ist. ■

Anwendung Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq f'(s) \leq L$ für alle $s \in \mathbb{R}$

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

8.7 Satz *Es existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von $(*)$, d. h.*

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int\limits_\Omega f(u) v dx = 0 \quad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Beweis Wir setzen $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ und definieren $F : X \to X'$ durch

$$\langle F(u), v\rangle = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int\limits_\Omega f(u) v dx, \quad u, v \in X.$$

Bekanntlich ist X ein separabler, reflexiver Banachraum. Außerdem haben wir in 8.2 gezeigt, dass F monoton, koerziv und hemistetig ist. Gemäß 8.5 existiert ein $u \in X$ mit $F(u) = 0$. Somit ist u schwache Lösung von $(*)$. Diese Lösung ist eindeutig, da F strikt monoton ist. Denn seien $u_1, u_2 \in X$ mit

$$\langle F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0,$$

so folgt $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2} = 0$, also $u_1 = u_2$ fast überall in Ω. ∎

Pseudomonotone Operatoren

Im folgenden werden wir den Begriff der Monotonie erweitern, um eine größere relavante Klasse nichtlinearer Gleichungen lösen zu können. Hierzu die folgende

8.8 Definition Ein Operator heißt *pseudomonoton*, falls aus

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{für} \quad n \to +\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$

folgt, dass

$$\langle F(x), x - y\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle F(x_n), x_n - y\rangle \quad \forall\, y \in X.$$

8.9 Lemma *Sei $F : X \to X'$ ein Operator. Dann*

(i) Ist F monoton und hemistetig, so ist F pseudomonoton

(ii) Ist F pseudomonoton und lokal beschränkt, so ist F demistetig.

Beweis (i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to +\infty$ und $\limsup_{n\to\infty}\langle F(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$. Da F monoton ist haben wir

$$\langle F(x_n), x_n - x\rangle \geq \langle F(x), x_n - x\rangle.$$

Hieraus ergibt sich

$$\liminf_{n\to\infty}\langle F(x_n), x_n - x\rangle \geq \lim_{n\to\infty}\langle F(x), x_n - x\rangle \;=\; 0 \geq \limsup_{n\to\infty}\langle F(x_n), x_n - x\rangle.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\langle F(x_n), x_n - x\rangle \;=\; 0.$$

Sei $y \in X$ beliebig. Da F monoton ist, haben wir

$$\langle F(x + t(y - x)) - F(x_n), x + t(y - x) - x_n\rangle \geq 0.$$

Nach Umformung folgt

$$t\langle F(x+t(y-x))-F(x_n), x-y\rangle \leq -\langle F(x_n), x+t(y-x)-x_n\rangle+\langle F(x+t(y-x)), x-x_n\rangle.$$

Also

$$\begin{aligned} &t\langle F(x + t(y - x)), x - y\rangle \\ &\qquad \leq\; (1 - t)\langle F(x_n), x_n - x\rangle + t\langle F(x_n), x_n - y\rangle \;+\; \langle F(x + t(y - x)), x - x_n\rangle. \end{aligned}$$

Mithilfe der obigen Konvergenzeigenschaft schließt man

$$t\langle F(x + t(y - x)), x - y\rangle \leq t\liminf_{n\to\infty}\langle F(x_n), x_n - y\rangle.$$

Dividiert man beide Seiten durch t, so folgt die Behauptung nach $t \to 0$, da F hemistetig ist.

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x$ in X für $n \to +\infty$. Da F lokal beschränkt ist, ist die Folge $(F(x_n))$ in X' beschränkt. Wegen der schwach-$*$ Kompaktheit, existiert eine Teilfolge (x_{n_j}) und ein $f \in X'$, so dass

$$F(x_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Sei $y \in X$ beliebig, dann folgt aus der Pseudomonotinie von F, dass

$$\langle F(x), x - y\rangle \leq \liminf_{j\to\infty}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle = \langle f, x - y\rangle.$$

Dies impliziert mit $z = x - y$

$$\langle F(x), z\rangle \leq \langle f, z\rangle \quad \forall\, z \in X.$$

Folglich ist $f = F(x)$, also F auch demistetig. ∎

8.10 Satz *Sei X separabel und reflexiv. Sei $F : X \to X'$ pseudomonoton, beschränkt ($F(M)$ in X' beschränkt, falls M in X beschränkt) und koerziv. Dann ist F surjektiv, das heißt, für alle $f \in X'$ ist $F(x) = f$ lösbar.*

Beweis Sei $f \in X'$ gegeben. Sei $\{a_1, a_2, \ldots\}$ und X_n wie im Beweis von 8.5. Aus Lemma 8.9 folgt, dass F demistetig und koerziv ist. Wie im Beweis von 9.5 zeigt man die Existenz eines $x_n \in X_n$, so dass

$$\langle F(x_n), w\rangle = \langle f, w\rangle \qquad \forall\, w \in X_n.$$

Da F koerziv ist, sieht man, dass (x_n) in X und $F(x_{n_j})$ in X' beschränkt sind. Wegen der Reflexivität von X der schwach-$*$ Kompaktheit, gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) und $x \in X$ sowie $g \in X'$, so dass

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad \text{in} \quad X, \quad F(x_{n_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} g \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wie im Beweis von 8.5 zeigt man, dass $g = f$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F(x) = f$. Denn

$$\begin{aligned}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - x\rangle &= \langle F(x_{n_j}), x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), x\rangle \\ &= \langle f, x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), x\rangle \\ &\to 0 \quad \text{für} \quad j \to +\infty.\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir $\limsup_{j\to\infty}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - x\rangle \le 0$. Da F pseudomonoton ist haben wir

$$\langle F(x), x - y\rangle \le \liminf_{j\to\infty}\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle \quad \forall\, y \in X.$$

Auf der anderen Seite bekommt man

$$\langle F(x_{n_j}), x_{n_j} - y\rangle = \langle f, x_{n_j}\rangle - \langle F(x_{n_j}), y\rangle \to \langle f, x - y\rangle \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Setzt man $y = x - z$, so folgt $\langle F(x), z\rangle \le \langle f, z\rangle$, für alle $z \in X$, was impliziert, dass $F(x) = f$. ∎

Anwendung auf die stationäre Navier-Stokes Gleichungen Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Gesucht ist:

$$\begin{aligned} u = (u^1, u^2, u^3) :&\Omega \to \mathbb{R}^3 \qquad && \text{Geschwindigkeit,} \\ p :&\Omega \to \mathbb{R} && \text{Druck,}\end{aligned}$$

so dass

$$(*) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $\nu > 0$ eine Konstante (Viskosität) ist und

$$\Delta u \;=\; (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3), \quad \Delta u^i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1,2,3,$$

$$(u \cdot \nabla)u \;=\; ((u \cdot \nabla)u^1, (u \cdot \nabla)u^2, (u \cdot \nabla)u^3), \quad (u \cdot \nabla)u^i \;=\; \sum_{j=1}^{n} u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3.$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung von $(*)$ mit einer Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und integrieren über Ω. Dies liefert

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)u \cdot v dx - \nu \int_\Omega \Delta u \cdot v dx + \int_\Omega \nabla p \cdot v dx = \int_\Omega f \cdot v dx.$$

Nach Anwendung partieller Integration erhält man

$$-\nu \int_\Omega \Delta u \cdot v dx \;=\; -\nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial^2 u^i}{\partial x_j^2} v^i dx \;=\; \nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u^i}{\partial x_j}\frac{\partial u^i}{\partial x_j} dx,$$

$$\int_\Omega \nabla p \cdot v dx \;=\; \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v^i dx \;=\; -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega p \frac{\partial v^i}{\partial x_i} dx \;=\; -\int_\Omega p \operatorname{div} u dx.$$

Schwache Lösung von $(*)$: Wir setzen

$$X := \{v \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ f. ü. in } \Omega\},$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_X := \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}, \quad v \in X.$$

1) X ist Banachraum: Da $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ mit der obigen Norm ein Banachraum ist genügt es zu zeigen, dass X ein abgeschlossener Teilraum von $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ ist. Sei $v_n \to v$ in X. Dann

$$\|\operatorname{div} v\|_{L^2} \;=\; \|\operatorname{div} v_n - \operatorname{div} v\|_{L^2} \;\leq \sqrt{3}\|v_n - v\|_X \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Folglich ist $v \in X$.

2) X ist separabel, da $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ separabel ist.

3) X ist reflexiv, da $W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ reflexiv und X abgeschlossen.
4) X ist stetig eingebettet in $L^6(\Omega)$. Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^{3/2} dx \;\leq\; c \int_\Omega |\nabla \varphi| dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^{0,1}(\mathbb{R}^3).$$

Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. Wir setzen $\varphi = |u|^4$. Dann ist $\varphi \in C_0^{0,1}(\mathbb{R}^3)$. Unter Verwendung der Gagliardo Ungleichung und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |u|^6 dx &= \int\limits_\Omega |u|^{4\frac{3}{2}} dx = \int\limits_\Omega |\varphi|^{3/2} dx \\ &\leq c \int\limits_\Omega |\nabla\varphi| dx = 4c \int\limits_\Omega |u|^3 |\nabla u| dx \leq c \Big(\int\limits_\Omega |u|^6 dx \Big)^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|u\|_{L^6} \leq c \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall\, u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Wir definieren $A, B : X \to X'$ durch

$$\begin{aligned}\langle A(u), v\rangle &= \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla v dx, \\ \langle B(u), v\rangle &= -\int\limits_\Omega (u \otimes u) : \nabla v dx, \quad u, v \in X.\end{aligned}$$

Der Operator $A + B$ ist pseudomonoton, koerziv, demistetig und beschränkt. Nach 8.10 ist $A + B$ surjektiv. Sei $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Wir setzen

$$G(v) := \int\limits_\Omega f \cdot v dx, \quad v \in X.$$

Dann ist $G \in X'$. Denn

$$G(v) := \int\limits_\Omega f \cdot v dx \;\leq\; \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \;\leq\; c \|f\|_{L^2} \|v\|_X.$$

Somit existiert ein $u \in X$ mit $A(u) + B(u) = G$, was äquivalent dazu ist, dass u eine schwache Lösung von $(*)$ ist.

Existenz des Drucks. Wir setzen $H := L^2(\Omega)$ und $H_0 = \Big\{ f \in L^2(\Omega) \,\Big|\, \int\limits_\Omega f dx = 0 \Big\}$.

8.11 Hilfssatz *Für alle $f \in H_0$ existiert ein $u \in X$, so dass* $\operatorname{div} u = f$.

Der Operator $\operatorname{div} : W_0^{1,2}(\Omega) \to H$ ist linear, stetig und hat abgeschlossenes Bild. Denn $\operatorname{div} u \in H_0$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und nach Hilfssatz $H_0 \subseteq \operatorname{im}(\operatorname{div})$. Somit $\operatorname{im}(\operatorname{div}) = H_0$, also abgeschlossen. Dann ist $-\nabla : H \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ der duale Operator und hat ebenfalls abgeschlossenes Bild.

8.12 Lemma *Sei $G \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ mit $\langle G, v\rangle = 0$ für alle $v \in X$. Dann existiert genau ein $p \in H_0$, so dass*

$$G = -\nabla p$$

Außerdem gilt die Abschätzung

$$\|p\|_{L^2} \le c\|G\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}.$$

Beweis Nach dem Satz vom abgeschlossen Bild bekommt man

$$\mathrm{im}(-\nabla) = (\ker(\mathrm{div}))^\circ = X^\circ.$$

wobei $X^\circ = \{f \in W_0^{1,2}(\Omega)' \,|\, \langle f, u\rangle = 0 \;\; \forall\, u \in X\}$. Da $G \in X^\circ$ folgt die Behauptung.

Mit $\mathrm{div} : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ hat auch der Operator $-\nabla : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ ein abgeschlossenes Bild. Folglich existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|p\|_{L^2} \;\le\; c\|\nabla p\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'} \quad \forall\, p \in H_0.$$

Wegen $-\nabla p = G$ bekommt man

$$\|p\|_{L^2} \le c\|G\|_{W_0^{1,2}(\Omega)'}.$$

■

9. Verzweigungstheorie

Seien X, Y Banachräume, $F : \mathbb{R} \times X \to Y, F \in C^1(\mathbb{R} \times X, Y)$. Wir nehmen an, dass $F(\lambda, 0) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$S \;=\; \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X \,|\, F(\lambda, x) = 0\}.$$

Nach Voraussetzung haben wir $(\lambda, 0) \in S \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Bsp.: $X, Y = R, F(\lambda, x) = x^3 - \lambda x$.

9.1 Definition λ_0 heißt *Verzweigungspunkt* (von der trivialen Lösung) von F, falls es eine Folge $((\lambda_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, mit

$$x_n \neq 0, \quad F(\lambda_n, x_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda_n, x_n) \to (\lambda_0, 0), \quad n \to +\infty.$$

9.2 Proposition *Sei λ_0 ein Verzweigungspunkt von F. Dann ist $D_xF(\lambda_0, 0)$ nicht bijektiv.*

Beweis Wäre $D_xF(\lambda_0, 0)$ bijektiv so folgt aus dem Beweis des Satzes für implizite Funktionen die Existenz von konvexen Umgebungen $\Lambda_0 \subset \mathbb{R}$ von λ_0 und $U \subset X$ von 0, so dass

$$D_xF(\lambda, x) \in ISO(X, Y) \quad \forall\, (\lambda, x) \in \Lambda_0 \times U.$$

Da λ_0 ein Verzweigungspunkt ist, existiert eine Folge $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda_0, 0)$ mit $x_n \neq 0$ und $F(\lambda_n, x_n) = 0$. Dann existiert ein $n \in N$, so dass $\lambda_n \in \Lambda_0$ und $x_n \in U$. Da außerdem $F(\lambda_n, 0) = 0$ folgt mithilfe des Satzes von Taylor

$$\begin{aligned} 0 = F(\lambda_n, x_n) - F(\lambda_n, 0) &= \int_0^1 D_x F(\lambda_n, t x_n) \cdot x_n dt \\ &= D_x F(\lambda_n, t_0 x_n) \cdot x_n \end{aligned}$$

für ein $t_0 \in [0, 1]$, was aber ein Widerspruch zu $D_x F(\lambda_n, t_0 x_n) \in ISO(X, Y)$ ist.

Beispiele 1) $X = Y = \mathbb{R}^n, A \in M(n \times n), F(\lambda, x) = \lambda x - Ax$

Beh. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist Verzwiegungspunkt von $F \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0$ ist Eigenwert von A.

Begrd.: $\Rightarrow$: Nach 9.2 ist $D_x F = \lambda_0 I - A$ nicht bijektiv, also λ_0 EW von A.

$\Leftarrow$: Es existiert $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass $Ax = \lambda_0 x$. Dann haben wir mit $(\lambda_n, x_n) = \left(\lambda_0, \frac{x}{n}\right)$

$$F(\lambda_n, x_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda_n, x_n) \to (\lambda_0, 0).$$

Also ist λ_0 Verzweigungspunkt von F.

2) X Banachraum, $A \in \mathscr{L}(X)$, $F(\lambda, x) = \lambda x - Ax$

Beh.: $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist Verzweigungspunkt von $F \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 \in \overline{\sigma_p(A)}$

Begrd.: $\Rightarrow$ Sei (λ_n, x_n) wie in 9.1. Aus $F(\lambda_n, x_n) = 0$ folgt $Ax_n = \lambda_n x_n$ und wegen $x_n \neq 0$ ist $\lambda_n \in \sigma_p(A)$. Da $\lambda_n \to \lambda_0$ folgt $\lambda_0 \in \overline{\sigma_p(A)}$.

$\Leftarrow$: Es existiert eine Folge $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ mit $\lambda_n \to \lambda_0$. Dann existieren $x_n \in X \setminus \{0\}$ mit $\|x_n\| = \frac{1}{n}$ und $Ax_n = \lambda_n x_n$. Dann folgt $F(\lambda_n, x_n) = 0$ und $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda_0, 0)$. Somit ist λ_0 ein Verzweigungspunkt von F.

3) X Banachraum, $G \in C^1(X, X), F(\lambda, x) = \lambda x - G(x)$ und $G(0) = 0$.

Beh.: λ_0 ist Verzweigungspunkt von $F \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \in \sigma(DG(0))$

Begrd.: Aus 9.2 folgt $\lambda_0 I - DG(0)$ ist kein Isomophismus. Also $\sigma \in \sigma(DG(0))$.

9.3 Bemerkung Die Umkehrung von 3) gilt i.A. nicht.

Beispiel (kein Verzweigungspunkt) $X = \mathbb{R}^2, F(\lambda, x) = \lambda x - G(x)$, wobei

$$G(x) \;=\; G(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2^3 \\ x_2 - x_1^3 \end{pmatrix}, \quad G(0) = 0.$$
$$DG(x) \;=\; DG(x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3x_2^2 \\ -3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad DG(0) = I.$$

Gemäß 9.2 hat G keine Verzweigungspunkte.

Die Ljapunov-Schmidt Reduktion

Sei $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y), F(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda^* \in \mathbb{R}$

$$L := D_x F(\lambda^*, 0) \in \mathscr{L}(X, Y)$$
$$X_0 := N(L) \neq \{0\}, \quad Y_1 := R(L)$$

Wir nehmen an, L ist Fredholmoperator

$$\dim X_0 < +\infty, \quad \mathrm{codim} Y_1 < +\infty \quad Y_1 \text{ abgeschlossen.}$$

Wie in LinFA bewiesen wurde existieren $X_1 \subset X$ und $Y_0 \subset Y$, so dass

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad Y = Y_0 \oplus Y_1.$$

Sei $Q \in \mathscr{L}(Y, Y)$ eine stetige Projektion auf Y_1. Dann gilt:

$$(*) \qquad F(\lambda, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} QF(\lambda, x_0 + x_1) = 0 \\ (I - Q)F(\lambda, x_0 + x_1) = 0 \end{cases}, \quad x = x_0 + x_1.$$

9.3 Satz Unter den obigen Voraussetzungen an F existieren offene Umgebungen Λ von $\lambda^*, U \subset X_0$ von 0 und $V \subset X_1$ von 0 und eine Abbildung $\gamma \in C^2(\Lambda \times U, X_1)$ derart, dass für $(\lambda, x_0, x_1) \in \Lambda \times U \times V$ gilt

$$QF(\lambda, x_0 + x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \gamma(\lambda, x_0).$$

Ferner gilt $D_2\gamma(\lambda^*, 0) = 0$.

9.4 Bemerkung Sei $(\lambda, x_0, x_1) \in \Lambda \times U \times V$. Aus $(*)$ folgt

$$F(\lambda, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (I - Q)F(\lambda, x_0 + \gamma(\lambda, x_0)) = 0, \quad x_1 = \gamma(\lambda, x_0).$$

Unter unseren Annahmen ist die Verzweigungsgleichung ein System aus $\dim Y_0$ Gleichungen und $\dim X_0$ Unbekannten.

Beweis von Satz 9.3 Sei $\Phi(\lambda, x_0, x_1) := QF(\lambda, x_0 + x_1)$. Dann ist $\Phi(\lambda^*, 0, 0) = 0$. Es ist klar, dass $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times X_0 \times X_1; Y_1)$ Es gilt

$$D_3\Phi(\lambda, x_0, x_1)w \;=\; QD_xF(\lambda, x_0 + x_1)w, \quad w \in X_1,$$
$$D_3\Phi(\lambda, x_0, x_1) \in \mathscr{L}(X_1, Y_1),$$
$$D_3\Phi(\lambda^*, 0, 0) \;=\; QD_\lambda F(\lambda^*)|_{X_1} \;=\; QL|_{X_1} = L|_{X_1}$$

Da $L|_{X_1}$ bijektiv ist folgt $D_3\Phi(\lambda^*,0,0) \in ISO(X_1,Y_1)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert offene Umgebung $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}\times X_0$ von $(\lambda^*,0)$ und $V \subset X_1$ von 0 sowie $\gamma \in C^2(\widetilde{U};X_1)$ so dass für $(\lambda,x_0,x_1) \in \widetilde{U} \times V$ gilt:

$$\Phi(\lambda,x_0,x_1) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \gamma(\lambda,x_0).$$

Wähle offene Umgebung Λ von λ^* und $U \subset X_0$ von 0, so dass

$$\Lambda \times U \subset \widetilde{U},$$

was die erste Aussage beweist.
Aus (?) folgt

$$D_2\gamma(\lambda^*,0) \;=\; -[D_3\Phi(\lambda^*,0,0)]^{-1} \cdot D_2\Phi(\lambda^*,0,0).$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$D_2\Phi(\lambda,x_0,x_1)v = QD_xF(\lambda,x_0+x_1)\cdot v, \quad v \in X_0$$

Also $D_2\Phi(\lambda^*,0,0)v = QLv = 0$ für alle $v \in X_0 = N(L)$. Folglich ist $D_2\Phi(\lambda^*,0,0) = 0$.
■

9.5 Satz *Sei* $F \in C^2(\mathbb{R}\times X;Y), F(\lambda,0) = 0\;\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$. *Für* $\lambda^* \in \mathbb{R}$ *sei* $L := D_xF(\lambda^*,0)$ *ein Fredholmoperator mit Index* 0 $(\dim X_0 = \dim Y_0)$ *sowie* $N(L) = \operatorname{span}\{\bar{x}\}$ *für ein* $\bar{x} \neq 0$. *Ferner gelte für* $M = D_xD_\lambda F(\lambda^*,0) \in \mathscr{L}(X,Y)$, *so dass* $M\bar{x} \notin R(L)$ *(Transversalität). Dann ist* $(\lambda^*,0)$ *ein Verzweigungspunkt von* F.

Beweis Sei $Q \in \mathscr{L}(Y,Y)$ Projektion auf Y_1 und $L = D_xF(\lambda^*,0)$. Sei $\gamma : \mathbb{R}\times X_0 \to X_1$ wie in 9.3. Dann gilt:

$$F(\lambda,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \gamma(\lambda,x_0), \quad (I-Q)F(\lambda,x_0+\gamma(\lambda,x_0)) = 0.$$

Da $1 = \dim N(L) = \operatorname{codim} R(L) = \dim Y_0$ existiert ein $\bar{y} \in Y \setminus \{0\}$, mit $Y_0 = \operatorname{span}\{\bar{y}\}$.
Es existiert ein $\psi \in Y'$

$$\psi(\bar{y}) = 1, \quad \psi|_{Y_1} = 0.$$

Dann

$$(I-Q)y = \psi(y)\bar{y}, \quad y \in Y.$$

Denn $(I-Q)y = \alpha\bar{y}$ und $y = Qy + \alpha\bar{y}$. Somit $\psi(y) = \alpha$.
Schreibe,

$$\lambda = \lambda^* + \mu, x_0 = t\bar{x}, \quad |\mu| < \varepsilon, \quad |t| < \varepsilon.$$

Wir definieren

$$\beta(\mu,t) := \psi(F(\lambda^* + \mu, t\bar{x} + \gamma(\lambda^*,\mu,t\bar{x}))), \quad |\mu| < \varepsilon, \quad |t| < \varepsilon.$$

Es gilt

$$F(\lambda, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(\mu, t) = 0.$$

Wir definieren $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch

$$h(\mu, t) := \begin{cases} \dfrac{\beta(\mu, t)}{t}, & t \neq 0, \\ \beta_t(\mu, 0), & t = 0. \end{cases}$$

Wir haben

$$0 = F(\lambda^* + \mu, 0) = QF(\lambda^* + \mu, 0 + 0) \quad \Rightarrow \quad \gamma(\lambda^* + \mu, 0) = 0.$$

Dies liefert

$$\beta(\mu, 0) \;=\; \psi(F(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0))) \;=\; \psi(F(\lambda^* + \mu, 0)) = \psi(0) = 0.$$

Insbesondere haben wir

$$\beta_\mu(\mu, 0) = \beta_{\mu\mu}(\mu, 0) = 0 \quad \forall\, |\mu| < \varepsilon.$$

Aus der Taylorentwicklung folgt

$$\beta(\mu, t) \;=\; \beta(\mu, 0) + \beta_t(\mu, 0)t + \frac{1}{2}\beta_{tt}(\mu, \xi)t^2 \;=\; \beta_t(\mu, 0)t + \frac{1}{2}\beta_{tt}(\mu, \xi)t^2.$$

Also ist $h \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ mit

$$h_\mu(\mu, t) := \begin{cases} \dfrac{\beta_\mu(\mu, t)}{t}, & t \neq 0, \\ \beta_{t,\mu}(\mu, 0), & t = 0. \end{cases}$$

Wir berechnen

$$\beta_t(\mu, t) \;=\; \psi(D_x F(\lambda^* + \mu, t\bar{x} + \gamma(\lambda^* + \mu, t\bar{x})) \cdot (\bar{x} + D_2\gamma(\lambda^* + \mu, t\bar{x}) \cdot \bar{x}))$$

Für $t = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \beta_t(\mu, 0) \;&=\; \psi(D_x F(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0)) \cdot (\bar{x} + D_2\gamma(\lambda^* + \mu, 0) \cdot \bar{x})) \\ &=\; \psi(D_x F(\lambda^* + \mu, 0) \cdot (\bar{x} + D_2\gamma(\lambda^* + \mu, 0) \cdot \bar{x})) \end{aligned}$$

und für $\mu = 0$ findet man

$$\beta_t(0, 0) \;=\; \psi(D_x F(\lambda^*, 0) \cdot (\bar{x} + D_2\gamma(\lambda^*, 0) \cdot \bar{x})) \;=\; \psi(L\bar{x}) \;=\; 0$$

Man beachte $D_2\gamma(\lambda^*, 0) = 0$ gemäß 9.3.

Ableiten nach μ liefert

$$\begin{aligned} \beta_{t,\mu}(\mu, 0) \;=\; &\psi(D_\mu D_x F(\lambda^* + \mu, 0) \cdot (\bar{x} + D_2\gamma(\lambda^* + \mu, 0) \cdot \bar{x})) \\ &+\; \psi(D_x F(\lambda^* + \mu, 0) \cdot D_1 D_2\gamma(\lambda^* + \mu, 0) \cdot \bar{x}) \end{aligned}$$

Für $\mu = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \beta_{t,\mu}(0,0) &= \psi(D_\mu D_x F(\lambda^*,0)\cdot\bar{x}) + \psi(D_x F(\lambda^*,0)\cdot D_1 D_2\gamma(\lambda^*,0)\cdot\bar{x}) \\ &= \psi(M\bar{x}) + \psi(L(D_1 D_2\gamma(\lambda^*,0)\cdot\bar{x})) \\ &= \psi(M\bar{x}) \neq 0, \end{aligned}$$

Da $M\bar{x} \notin R(L)$. Dies impliziert

$$h_\mu(0,0) \neq 0, \quad h(0,0) = \beta_t(0,0) = 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert ein $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, und eine Funktion $\rho \in C^1(-\varepsilon',\varepsilon')$, so dass

$$h(\mu,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \rho(t).$$

Wir haben für $|t| < \varepsilon', t \neq 0$

$$\begin{aligned} & h(\rho(t),t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \beta(\rho(t),t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \psi(F(\lambda^*+\rho(t)), t\bar{x} + \gamma(\lambda^*+\rho(t),t\bar{x})) = 0 \\ \Rightarrow \quad & F(\lambda^*+\rho(t)), t\bar{x} + \gamma(\lambda^*+\rho(t),t\bar{x}) \in Y_1 \\ \Rightarrow \quad & F(\lambda^*+\rho(t)), t\bar{x} + \gamma(\lambda^*+\rho(t),t\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda_n = \lambda^* + \rho(\frac{1}{n})$ und $x_n = \frac{1}{n}\bar{x} + \gamma(\lambda_n, \frac{1}{n}\bar{x})$ für $n > \frac{1}{\varepsilon'}$, so ergibt sich

$$(\lambda_n, x_n) \to (\lambda^*, 0), \quad x_n \neq 0, \quad F(\lambda_n, x_n) = 0 \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Also ist $(\lambda^*, 0)$ ein Verzeigungspunkt von F. ∎

9.6 Folgerung *Sei $G \in C^2(X,X), G(0) = 0, DG(0)$ kompakt. Für $\lambda' \neq 0$ sei*

$$\dim N(\lambda^* I - DG(0)) = 1, \quad N(\lambda^* I - DG(0)) \cap R(\lambda^* I - DG(0)) = \{0\}$$

Dann ist λ^* ein Verzweigungspunkt für $F(\lambda, x) = \lambda x - G(x)$.
Zuvor der folgende Hilfssatz aus der linearen FA:

Hilfssatz *Sei $K : X \to X$ kompakt. Wir setzen $T = I - K$. Wir nehmen an, dass $\dim(N(T)) = 1$ und $N(T) \cap R(T) = \{0\}$, dann gilt:*

$$\operatorname{codim}(R(T)) = 1, \quad X = N(T) \oplus R(T).$$

Beweis Nach dem Satz von Riesz (vgl. lin. FA) existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} N(T) \subsetneq N(T^2) \subsetneq \ldots \subsetneq N(T^m) = N(T^{m+1}), \\ R(T) \supsetneq R(T^2) \supsetneq \ldots \supsetneq R(T^m) = R(T^{m+1}), \\ X = N(T^m) \otimes R(T^m). \end{aligned}$$

Gemäß der Vorraussetzung existiert ein $x_1 \in X \setminus \{0\}$ mit $N(L) = \operatorname{span}\{x_1\}$. Induktiv zeigt man, dass

$$N(T^i) \;=\; \operatorname{span}(\{x_1, x_2, \dots, x_i\}) \quad \forall\, i = 1, \dots, m,$$

wobei $x_i \in N(T^i) \setminus N(T^{i-1})$. Für $i = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Wir nehmen an, wir haben $x_1, \dots, x_k\,(k < m)$ gefunden. Nach Voraussetzung existiert ein $x_{k+1} \in N(T^{k+1}) \setminus N(T^k)$. Dann ist $Tx_{k+1} \in N(T^k)$. Wir haben $T(T^k x_{x+1}) = 0$, also $T^k x_{k+1} = \beta x_1$ für ein $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ist nun $y \in N(T^{k+1}) \setminus N(T^k)$ beliebig, so folgt wie oben $T^k y = \beta' x_1$ für ein $\beta' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setzt man $\widetilde{y} = \frac{\beta}{\beta'} y$, so folgt $T^k(\widetilde{y} - x_{k+1}) = 0$, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\widetilde{y} - x_{k+1} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad\iff\quad y = \frac{\beta'}{\beta} x_{n+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta'}{\beta} \alpha_i x_i,$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir erhalten somit $\dim(N(T^m)) = m$, was aber $\operatorname{codim}(R(T^m)) = m$ nach sich zieht. Auf der anderen Seite gilt

$$m = \operatorname{codim}(R(T^m)) \geq \operatorname{codim}(R(T)) + m - 1,$$

also $\operatorname{codim}(R(T)) \leq 1$. Wegen $N(T) \cap R(T) = \{0\}$ ergibt sich $\operatorname{codim}(R(T)) = 1$ und $X = N(T) \oplus R(T)$. ■

Beweis von 9.6 Offensichtlich ist $F(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$L := D_x F(\lambda^*, 0) = \lambda^* I - DG(0).$$

Nach Voraussetzung ist L Fredholm mit $\dim N(L) = 1$ und $N(L) \cap R(L) = \{0\}$. Aus dem Hilfssatz folgt nun $\operatorname{codim}(R(L)) = 1$ und $X = N(L) \oplus R(L)$. Insbesondere ist $\operatorname{Index}(L) = 0$. Sei $\bar{x} \in N(L), \bar{x} \neq 0$. Ferner sei $M = D_\lambda D_x F(\lambda^*, 0) = I$. Es gilt $M\bar{x} = \bar{x} \notin R(L)$, da sonst $\bar{x} \in N(L) \cap R(L) = \{0\}$ wäre. Nach 9.5 folgt die Aussage. ■

9.7 Bemerkung Auf die Transversalitätsbedingung kann nicht verzichtet werden.

Beispiel: Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(\lambda, x, y) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda x - y - y^3 \\ \lambda y + x^3 \end{pmatrix}, \quad F(\lambda, 0, 0) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Man berechnet

$$D_{x,y} F(\lambda, x, y) \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & -1 - 3y^2 \\ 3x^2 & \lambda \end{pmatrix}$$

Setzen $\lambda^* = 0$. Dann ist

$$L = D_{x,y} F(0, 0, 0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = D_\lambda D_{x,y} F(0, 0, 0) = I.$$

Wir erhalten $N(L) = \text{span}\{e_1\} = R(L)$. Folglich ist $Me_1 \in R(L)$.
Wir sehen, dass F keine Verzweigungspunkte besitzt, denn aus $F(\lambda, x, y) = 0$ folgt

$$\lambda x - y - y^3 = 0, \quad \lambda y + x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + y^4 + x^4 = 0.$$

Dies impliziert $x = y = 0$.

Anwendung (**Euler-Bernoulli-Stab**)

Wir betrachten einen elastischen Stab der Länge L. Wirkt eine Kraft horizontal auf dem Stab so wird dieser ausgelenkt und gestaucht um $\lambda > 0$. Die Projektion auf die x-Achse ist das Intervall $[0, L - \lambda]$. Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine Paramerisierung des Stabs wobei s die Bogenlänge des Stabs bezeichne. Sei $\Phi(s)$ der Winkel zwischen $\gamma'(s)$ und $(1, 0)$. Dann ist Φ die Lösung des Randwertproblems

$$(*) \qquad \begin{cases} \Phi''(s) + \lambda \sin \Phi \; = \; 0 \quad s \in [0, L], \\ \Phi'(s) \; = \; \Phi'(L) \; = \; 0. \end{cases}$$

Problem: Für welche $\lambda > 0$ hat $(*)$ nichttriviale Lösungen ?

Wir setzen

$$\begin{aligned}
& X \; = \; \{\Phi \in C^2([0, L]) \,|\, \Phi'(0) = \Phi'(L) = 0\}, \quad Y = C^0([0, L]), \\
& F : R \times X \to Y, \quad F(\lambda, \Phi) = \Phi'' + \lambda \sin \Phi, \\
& F(\lambda, 0) \; = \; 0 \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} \\
& D_x F(\lambda, \Phi) \cdot \Psi \; = \; \Psi'' + \lambda(\cos \Phi)\Psi \\
& L_\lambda \Psi := D_x F(\lambda, 0) \cdot \Psi \; = \; \Psi'' + \lambda \Psi
\end{aligned}$$

Wir haben $L_\lambda \in \mathscr{L}(X, Y)$. Die Abbildung L_λ ist nicht bijektiv, falls $\lambda = \lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}$ $(m \in \mathbb{N})$. Dann gilt $N(L_{\lambda_m}) = \text{span}\{\Phi_m\}$, wobei $\Phi_m(s) = \cos\left(\frac{m\pi}{L} s\right)$.

Wir zeigen:

$$R(L_{\lambda_m}) = \left\{ g \in Y \;\middle|\; \int_0^L g(s)\Phi_m(s) ds = 0 \right\}.$$

1) $'' \subseteq''$: Aus $g \in R(L_{\lambda_m})$ folgt $g = \Phi'' + \lambda_m \Phi$ für ein $\Phi \in X$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\int_0^L g(s)\Phi_m(s) ds \; &= \; (g, \Phi_m)_{L^2} \\
&= \; (\Phi'' + \lambda_m \Phi, \Phi_m) \\
&= \; (\Phi_m'' + \lambda_m \Phi_m, \Phi) \; = \; 0.
\end{aligned}$$

2) $'' \supseteq''$: Sei $g \in Y$ mit $\int\limits_0^L g(s)\Phi_m(s)ds = 0$. Wir setzen

$$\psi(s) := \frac{L}{m\pi}\sin(\frac{m\pi}{L}s)\int\limits_0^s g(t)\cos(\frac{m\pi}{L}t)dt - \frac{L}{m\pi}\cos(\frac{m\pi}{L}s)\int\limits_0^s g(t)\sin(\frac{m\pi}{L}t)dt$$

$$\psi'(s) = \cos(\frac{m\pi}{L}s)\int\limits_0^s g(t)\cos(\frac{m\pi}{L}t)dt + \sin(\frac{m\pi}{L}s)\int\limits_0^s g(t)\sin(\frac{m\pi}{L}t)dt$$

Dann ist $\psi'(0) = \psi'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \in X$ und

$$\psi''(s) + \lambda_m\psi(s) = g(s), \quad s \in [0, L] \quad \Rightarrow \quad g = L_{\lambda_m}\psi$$

Also $g \in R(L_{\lambda_m})$. Hieraus folgt $R(L_{\lambda_m})$ ist abgeschlossen und es gilt $Y = \text{span}\{\Phi_m\} \oplus R(L_{\lambda_m}) = N(L_{\lambda_m}) \oplus R(L_{\lambda_m})$. Insbesondere ist

$$\text{codim} R(L_{\lambda_m}) = 1, \quad \text{Index}(L) = 0.$$

Aus $D_2F(\lambda, \Phi)\Psi = \Psi'' + \lambda(\cos\Phi)\Psi$ folgt

$$D_\lambda D_2F(\lambda, \Phi)\Psi = (\cos\Phi)\Psi.$$

Dann ist $M = D_\lambda D_2F(\lambda, 0)\Psi = \Psi\,(\Psi \in X)$. Also $M \in \mathscr{L}(X, Y)$. Wäre $M\Phi_m = \Phi_m \in R(L_{\lambda_m})$, so hätte man

$$0 = \int\limits_0^L \Phi_m^2(s)ds,$$

was aber ein Widerspruch zu $\Phi_m \neq 0$ ist. Gemäß 9.6 sich also λ_m Verzweigungspunkte für F.

A Anhang

Sei X ein normierter Raum. Für $A \subset X$ und $x \in X$ definieren wir

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

A.1 Lemma *Sei X ein normierter Raum. Seien $U \subsetneq V$ zwei abgeschlosse Teilräume von X. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $v_\varepsilon \in V$, mit*

$$\|v_\varepsilon\| = 1, \quad d(v_\varepsilon, U) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis Sei $v_0 \in V \setminus U$. Wir setzen $\alpha = d(v_0, U)$. Wir haben $\alpha > 0$. In der Tat, falls $\alpha = 0$, so wäre $v_0 \in \overline{A} = A$ ein Widerspruch. Dann existiert ein $u_0 \in A$, so dass $\|v_0 - u_0\| \leq \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$. Wir setzen

$$v_\varepsilon := \frac{v_0 - u_0}{\|v_0 - u_0\|}.$$

Dann bekommt man für ein beliebiges $u \in U$

$$\|v_\varepsilon - u\| \;=\; \frac{1}{\|v_0 - u_0\|}\Big\|v_0 - \|v_0 - u_0\|u\Big\| \geq \frac{\alpha}{\|v_0 - u_0\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

Bildet man auf beiden Seiten der obigen Ungeichung das Infimum über $u \in U$, so folgt die Behauptung.

■

A.2 Lemma *Sei X ein normierter Raum und $U_k \subset X$ abgeschlossene Unterräume mit $U_k \subsetneq U_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Folge eine Folge $\{u_k\}$ in X mit*

$$u_k \in U_k, \quad \|u_k\| = 1, \quad d(u_{k+1}, U_k) \geq \frac{1}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Beweis Diese Aussage folgt sofort aus Lemma A.1 mit $U = U_k, V = U_{k+1}$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
■

A.3 Lemma *Sei X ein normierter Raum mit* $\dim X = +\infty$. *Dann existiert eine Folge $\{u_k\}$ in X mit*

$$\|u_k\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|u_k - u_l\| \geq \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}.$$

Beweis Wegen $\dim X = +\infty$ existiert eine Folge $\{x_k\}$ linear unabhängiger Elemente. Wir setzen $U_k := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$. Dann gilt $U_k \subsetneq U_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Aussage folgt nun unmittelbar aus Lemma 2. ■

A.4 Folgerung *Sei X ein normierter Raum mit $\dim X = +\infty$. Dann ist $\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt.*

Beweis Gemäß Lemma A.2 existiert eine Folge $\{u_k\}$ in $\overline{B_1(0)}$ mit

$$\|u_k\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|u_k - u_l\| \geq \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}.$$

Diese enthält offensichtlich keine konvergente Teilfolge. Folglich ist $\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt. ■

In den folgenden Betrachtungen sei X stets ein Banachraum.

Lemma A.5 *Sei $A \in \mathscr{K}(X, X)$. Wir setzen $T = I - A$. Dann existiert keine Folge von abgeschlossenen Unterräumen $\{U_k\}$ von X mit*

$$U_k \subsetneq U_{k+1}, \quad T(U_{k+1}) \subset U_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Beweis Wir nehmen an es gibt eine solche Folge. Gemäß Lemma 2 existiert eine Folge $\{u_k\}$ in X mit

$$u_k \in U_k, \quad \|u_k\| = 1, \quad d(u_{k+1}, U_k) \geq \frac{1}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Sei $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l < k$. Wegen $T(u_k) \in U_{k-1}$ folgt $u_l + Tu_k - Tu_l \in U_{k-1}$. Beachtet man außerdem $Au_k - Au_l = u_k - (u_l + Tu_k - Tu_l)$, so folgt

$$\|Au_k - A_l\| = \|u_k - (u_l + Tu_k - Tu_l)\| \geq d(u_k, U_{k-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Dies würde bedeuten, dass $\{Au_k\}$ keine konvergente Teilfolge besitzt, was aber der Kompaktheit von A widerspricht. ■

Lemma A.6 *Sei $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ injektiv. Dann ist $R(T)$ abgeschlossens, genau dann wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\|Tx\| \geq \delta \|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Beweis (i) Ist $R(T)$ abgeschlossen, so ist $i \circ T : X \to R(T)$ bijektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung folgt, $(i \circ T)^{-1} : R(T) \to X$ ist stetig. Folglich existiert ein $c > 0$, so dass

$$\|x\| \leq c\|Tx\| \quad \forall\, x \in X.$$

Die Aussage folgt nunmehr für $\delta = c^{-1}$.

(ii) Wir beweisen nun die Umkehrung. Sei $\{x_k\}$ eine Folge in X so dass $Tx_k \to y$ in Y für $k \to +\infty$. Aus der Voraussetzung ergibt sich

$$\delta \|x_k - x_l\| \ \leq \ \|T(x_k - x_l)\| \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt, dass $\{x_k\}$ eine Cauchyfolge in X ist, welche in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von T folgt $Tx = y$, also ist $R(T)$ abgeschlossen. ■

Lemma A.7 *Sei $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Das Bild $R(T)$ ist abgeschlossen, genau dann wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\|Tx\| \geq \delta \inf_{u \in N(T)} \|x + u\| \quad \forall\, x \in X.$$

Beweis Wir definieren $S : X/N(T) \to Y$ gemäß

$$S[x] = Tx, \quad x \in X.$$

Aus $S[x] = 0$ folgt $x \in N(T)$, also $[x] = [0]$. Also ist S injektiv mit $R(S) = R(T)$. Außerdem ist S beschränkt. In der Tat, sei $x \in X$. Dann existiert ein $u \in N(T)$ so dass $\|x + u\| \ \leq \ 2\|[x]\|$. Hiermit bekommt man

$$\|S[x]\| \ = \ \|T(x+u)\| \ \leq \ \|T\|\|x + u\| \ \leq \ 2\|T\|\|[x]\|.$$

Gemäß Lemma A.4 ist $R(T)$ abgeschlossen, genau dann wenn eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|S[x]\| = \|Tx\| \geq \delta \|[x]\| = \inf_{u \in N(T)} \|x + u\|,$$

was zu beweisen war. ■

A.8 Definition Ein Operator $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ heißt Fredholmoperator, falls $R(T)$ abgeschlossen ist und

$$\dim(N(T)) < +\infty, \quad \operatorname{codim}(R(T)) < +\infty.$$

A.9 Satz *Sei X ein Banachraum. Sei $A \in \mathscr{K}(X,X)$. Wir setzen $T := I - A$. Dann ist T ein Fredholmoperator. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\begin{aligned}
\{0\} &= N(T^0) \subsetneq N(T) \subsetneq \ldots \subsetneq N(T^m) = N(T^{m+1}) \\
X &= R(T^0) \supsetneq R(T) \supsetneq \ldots \supsetneq R(T^m) = R(T^{m+1}), \\
X &= N(T^m) \oplus R(T^m).
\end{aligned}$$

Beweis *1.* $\dim N(T) < +\infty$. Angenommen $\dim N(T) = +\infty$. Gemäß Lemma A.2 existiert eine Folge $\{x_k\}$ in $N(T)$ mit

$$\|w_k\| = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|w_k - w_l\| \geq \delta_{ij} \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N},$$

welche keine konvergente Teilfolge enthält. Dies widerspricht jedoch der Kompaktheit von A, da $\{x_k\} = \{Ax_k\}$.

2. $R(T)$ ist abgeschlossen. Wir nehmen an für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_k \in X$ mit $\inf_{u \in N(T)} \|x_k + u\| = 1$ und

$$\|Tx_k\| \leq \frac{1}{k}.$$

Dann haben wir $\|Ax_k\| \leq \|Tx_k\| + \|x_k\| \leq 1 + \frac{1}{k} \leq 2$. Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{x_{k_j}\}$ und ein $y \in X$, so dass

$$Ax_{k_j} \to y \quad \text{in} \quad X \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Dies impliziert $x_{k_j} = Tx_{k_j} + Ax_{k_j} \to y$ in X für $j \to +\infty$. Folglich ist $Ty = 0$. Also ist $[y] = [0] \in X/N(T)$, was bedeutet, dass $[x_k] \to [0]$ in $X/N(T)$ für $k \to 0$. Dies widerspricht aber $\|[x_k]\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich existiert eine Konstante $\delta > 0$, so dass

$$\|Tx\| \geq \delta \inf_{u \in N(T)} \|x + u\| \quad \forall\, x \in X.$$

Nach Lemma A.5 ist $R(T)$ abgeschlossen.

3. $\operatorname{codim}(R(T)) < +\infty$. Wir nehmen an, $\operatorname{codim}(R(T)) = +\infty$. Dann existiert eine unendliche Folge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ linear unabhängiger Elemente in $X \setminus R(T)$. Wir setzen $U_m = R(T) \oplus \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Nach Annahme haben wir $U_m \subsetneq U_{m+1}$. Außerdem gilt $T(U_{m+1}) \subset R(T) \subset U_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, was aber nach Lemma A.5 ein Widerspruch ist.

4. $N(T^m) = N(T^{m+1})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $N(T^k) \subsetneq N(T^{k+1})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $T(N(T^{k+1})) \subset N(T)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist aber gemäß Lemma A.5. ein Widerspruch.

5. $R(T^n) = R(T^{n+1})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Gemäß 4. existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $N((T^*)^n) = N((T^*)^{n+1})$. Dann folgt

$$R(T^n)^\circ \; = \; N((T^*)^n) \; = \; N((T^*)^{n+1}) \; = \; R(T^{n+1})^\circ$$

Angenommen, es existiert ein $x \in R(T^n) \setminus R(T^{n+1})$, dann gibt es ein Funktional $f \in X^*$, so dass $f|_{R(T^{n+1})} = 0$ und $f(x) = 1$. Dann wäre aber $f \in R(T^{n+1})^\circ \setminus R(T^{n+1})^\circ \neq 0$, was ein Widerspruch ist.

6. $n = m$. Sei $N(T^m) = N(T^{m+1})$. Sei $x = T^m y \in R(T^m)$. Wir nehmen an, $n \geq m$. Dann existiert ein $z \in X$, so dass

$$T^n y \; = \; T^{n+1} z \quad \Longleftrightarrow \quad y - Tz \in N(T^n) = N(T^m).$$

Dies zeigt, dass $T^m y \; = \; T^{m+1} z$, also $x \in R(T^{m+1})$, was zeigt, dass $R(T^m) = R(T^{m+1})$, also kann nur $n \leq m$, gelten.

Nun sei $x \in N(T^{n+1})$. Wegen $R(T^n) = R(T^m)$ existiert ein $y \in X$ mit $T^m y = T^n x$. Hiermit folgt $y \in N(T^{m+1}) = N(T^m)$, also $x \in N(T^n)$. Folglich $N(T^{n+1}) = N(T^n)$, also $m \leq n$. Wir haben also $n = m$.

7. $X = R(T^m) \oplus N(T^m)$. Sei $x \in R(T^m) \cap N(T^m)$. Dann existiert ein $y \in X$, mit $x = T^m y, T^{2m} y = 0$. Also $y \in N(T^{2m}) = N(T^m)$, was impliziert, dass $x = T^m y = 0$.

Sei $x \in X$. Dann ist $T^m x \in R(T^m) = R(T^{2m})$. Also existiert ein $y \in X$ mit $T^m x = T^{2m} y$, was äquivalent ist zu $x - T^m y \in N(T^m)$. Hieraus folgt

$$x = T^m x + (x - T^m x) \in R(T^m) + N(T^m).$$

■