



INSTITUT FÜR PHYSIK
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT I
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

BACHELORARBEIT

Renormierung eines Spielzeugmodells

eingereicht von: Christian Käding
geboren am: 06. Juni 1991 in Berlin

1. Betreuer: Prof. Dr. Dirk Kreimer
2. Betreuer: Prof. Dr. Oliver Schnetz

eingereicht am: 01. Juli 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Mathematische Grundlagen	4
2.1	Grundlegende Begriffe	4
2.1.1	Gruppe	4
2.1.2	Körper	5
2.1.3	Vektorraum	5
2.1.4	Algebra	7
2.1.5	Tensorprodukt	8
2.2	Hopf-Algebra	9
2.2.1	Koalgebra	9
2.2.2	Bialgebra	10
2.2.3	Faltungsprodukt	11
2.2.4	Antipode	12
2.2.5	Definition einer Hopf-Algebra	12
2.2.6	Graduierung	13
2.3	Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	13
2.3.1	Wurzelbaum	13
2.3.2	Multiplikation von Bäumen	15
2.3.3	Einselement und Koeins	16
2.3.4	Wald	16
2.3.5	Koprodukt	16
2.3.6	Antipode der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	18
2.3.7	Graduierung der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	18
2.3.8	Augmentation Ideal	19
2.3.9	Veredelungsoperator	19
3	Ein Spielzeugmodell	20
3.1	Feynman-Graphen	20
3.2	Dyson-Schwinger-Gleichungen	23
3.2.1	Kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen	23
3.2.2	Lineare Dyson-Schwinger-Gleichungen	24
3.3	Beispielrechnung einer Dyson-Schwinger-Gleichung	25
3.3.1	Berechnung der Störungsreihe	26
3.3.2	Spielzeug-Feynman-Regeln	26
3.3.3	Renormierung des Spielzeugmodells	29

3.4	System von Dyson-Schwinger-Gleichungen	33
3.4.1	Berechnung der Störungsreihen	34
3.4.2	Renormiertes System	35
3.5	Renormierungsgruppen-Gleichung	37
3.5.1	Herleitung	38
3.5.2	Überprüfung des DSG-Systems	40
4	Zusammenfassung	42

1 Einleitung

Während die relativistische Quantenmechanik teilweise lückenhaft ist und auf Paradoxa führt (z.B. Klein-Paradoxon, siehe [19]), finden Quantentheorie und spezielle Relativitätstheorie ihre Vereinigung in der Quantenfeldtheorie (QFT). Die Quantenmechanik behandelt kleine Systeme, wie Atome oder einzelne Elektronen. Dabei ist die Teilchenzahl stets erhalten und es finden keinerlei Umwandlungen von einer Teilchensorte in eine andere statt. In der Quantenfeldtheorie werden zusätzlich die Felder quantisiert, welche die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen beschreiben. Außerdem ist die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße und es können durch verschiedene Prozesse Umwandlungen zwischen Teilchen stattfinden. Wichtige Werkzeuge bei der Untersuchung von Umwandlungs- und Streuprozessen in der QFT sind sogenannte *Feynman-Graphen*. Aus Störungsreihen dieser Graphen lassen sich verschiedene physikalische Größen, wie beispielsweise Übergangsamplituden, ermitteln. Dabei treten häufig Divergenzen auf, die mithilfe einer *Renormierung* entfernt werden müssen. [7], [8]

Eine solche *Renormierung* kann unter Zuhilfenahme einer sogenannten *Hopf-Algebra* durchgeführt werden. Es hat sich gezeigt, dass zwischen der *Hopf-Algebra von Feynman-Graphen* und der *Hopf-Algebra* von speziellen Graphen, *Wurzelbäume* genannt, bestimmte Beziehungen herstellbar sind, so dass Rechnungen in der einen auf die andere *Hopf-Algebra* übertragbar sind. Ein Beispiel findet sich u.a. in [10], [11] oder in 3.2.2.

In dieser Arbeit werden die Begriffe *Hopf-Algebra* und *Wurzelbaum* im 2. Kapitel so weit wie nötig erklärt. Sie werden bei der *Renormierung* eines *Spielzeugmodells* einer Quantenfeldtheorie Anwendung finden. Dieses Modell wird im 3. Kapitel eingeführt, indem sogenannte *Spielzeug-Feynman-Regeln* definiert werden. Speziell werden in diesem Rahmen *kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen* untersucht, welche allgemein die Störungsreihen der *Feynman-Graphen*, hier jedoch Störungsreihen in *Wurzelbäumen* liefern. Mithilfe der *Hopf-Algebra von Wurzelbäumen* werden die *renormierten Spielzeug-Feynman-Regeln* gefunden und somit das *Spielzeugmodell renormiert*. Die Lösung eines Systems von *Dyson-Schwinger-Gleichungen* und die Herleitung einer dazugehörigen *Renormierungsgruppen-Gleichung* schließen diese Arbeit ab.

Der Großteil der zu diesem Themengebiet gehörigen Literatur ist in englischer Sprache verfasst. Da diese Arbeit auf Deutsch geschrieben wurde,

wurden einige Begriffe durch den Verfasser frei ins Deutsche übersetzt. Bei solchen Begriffen steht bei der ersten Nennung stets der korrekte englische Begriff in Klammern dahinter, wie z.B.: *Faltungsprodukt* (engl.: *Convolution Product*).

Ausführlichere Einführungen in die Quantenfeldtheorie finden sich z.B. in den folgenden verwendeten Quellen: [7], [8], [9] und [19]. Allerdings werden alle in dieser Arbeit benötigten Begriffe so weit wie zum Verstehen der Arbeit notwendig in den einzelnen Kapiteln betrachtet.

2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Begriffe betrachtet, die für diese Arbeit benötigt werden. Zu Beginn werden grundlegende Begrifflichkeiten geklärt. Diese dienen speziell dazu den in dieser Arbeit zentralen mathematischen Begriff einer *Hopf-Algebra* zu verstehen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird die *Hopf-Algebra von Wurzelbäumen* betrachtet, welche eine Grundlage für die Betrachtungen im 3. Kapitel bildet. Beweise zu den Aussagen in diesem Kapitel können im Allgemeinen den zitierten Quellen entnommen werden. Auf das explizite Führen dieser Beweise wird darum in dieser Arbeit verzichtet.

2.1 Grundlegende Begriffe

Zunächst werden einige elementare Begriffe wiederholt, die grundlegend für die späteren Definitionen und das weitere Vorgehen sind. Dazu gehören: *Gruppe*, *Körper*, *Vektorraum*, *Algebra* und *Tensorprodukt*. Sofern nicht anders gekennzeichnet, folgen die in diesem Abschnitt verwendeten Definitionen denen aus [4].

2.1.1 Gruppe

Die elementarste im Folgenden definierte algebraische Struktur ist die *Gruppe*. Dabei ist insbesondere der Spezialfall einer *abelschen Gruppe* für die darauffolgenden Definitionen relevant.

Definition 2.1.1: *Sei G eine Menge mit einer Verknüpfung $*$. Dann heißt*

$(G, *)$ eine Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(I): Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a * b) * c = a * (b * c)$. (Assoziativität)

(II): Es existiert ein $e \in G$, sodass für jedes $a \in G$ gilt: $e * a = a$.
Dabei heißt e das neutrale Element von G .

(III): Für jedes $a \in G$ existiert ein $a' \in G$, sodass gilt: $a' * a = e$.
Dabei heißt a' das inverse Element zu a .

Eine Gruppe heißt abelsch, wenn für jedes $a, b \in G$ gilt: $a * b = b * a$.

2.1.2 Körper

Mit Hilfe dieser Definition kann die algebraische Struktur *Körper* wie folgt definiert werden:

Definition 2.1.2: Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$+$: $K \times K \rightarrow K$, $(a, b) \mapsto a + b$ und \cdot : $K \times K \rightarrow K$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$.

Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein Körper, wenn Folgendes gilt:

(I): $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Dabei werden ihr neutrales Element mit 0 und das zu $a \in K$ inverse Element mit $-a$ bezeichnet.

(II): $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Dabei werden ihr neutrales Element mit 1 und das zu $a \in K \setminus \{0\}$ inverse Element mit $1/a$ oder a^{-1} bezeichnet.

(III): Für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

2.1.3 Vektorraum

Mithilfe der Definitionen von abelscher Gruppe und Körper kann die algebraische Struktur *Vektorraum* wie folgt definiert werden:

Definition 2.1.3: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Außerdem sei V eine Menge mit einer inneren Verknüpfung (Addition)

$$\dot{+} : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v \dot{+} w$$

und einer äußeren Verknüpfung (skalare Multiplikation)

$$\odot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \odot v .$$

Dann heißt $(V, \dot{+}, \odot)$ K -Vektorraum und die Elemente aus V Vektoren, wenn Folgendes gilt:

- (I): $(V, \dot{+})$ ist eine abelsche Gruppe.
- (II): Für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt: $(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \dot{+} \mu \odot v$,
 $\lambda \odot (v \dot{+} w) = \lambda \odot v \dot{+} \lambda \odot w$, $\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda \cdot \mu) \odot v$ und $1 \odot v = v$,
wobei 1 das neutrale Element von $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Von diesem Punkt an werden die einzelnen Strukturen abkürzend mit der Menge über die sie definiert sind (also z.B. G für eine Gruppe $(G, *)$) bezeichnet, sofern die Verknüpfungen aus dem jeweiligen Zusammenhang klar oder von untergeordnetem Interesse sind.

Wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Vektorräumen sind der eines *Untervektorraums* und der einer *direkten Summe*:

Definition 2.1.4: Seien V ein K -Vektorraum und $W \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt W *Untervektorraum von V* (oder kurz: *Unterraum*), wenn Folgendes gilt:

- (I): W ist nicht leer.
- (II): $v, w \in W \Rightarrow v \dot{+} w \in W$.
- (III): $v \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \odot v \in W$.

Definition 2.1.5: Sei V ein K -Vektorraum mit Unterräumen $W_1, \dots, W_r \subset V$. Dann heißt $W_1 + \dots + W_r := \{v \in V : \exists v_j \in W_j \text{ mit } v = v_1 + \dots + v_r\}$

Summe von W_1, \dots, W_r .

Definition 2.1.6: Ein Vektorraum $W_1 \oplus W_2$ heißt direkte Summe von zwei Untervektorräumen W_1 und W_2 , wenn Folgendes gilt:

(I): $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$.

(II): Es gilt: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Die Schnittmenge von W_1 und W_2 enthält also nur den Nullvektor.

2.1.4 Algebra

Mit den Definitionen von Körper und Vektorraum kann der für diese Arbeit besonders wichtige Begriff einer *Algebra* definiert werden:

Definition 2.1.7: Sei A ein K -Vektorraum. Dann heißt A Algebra über K oder einfach K -Algebra, wenn es zusätzlich eine Multiplikationsabbildung

$$m : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto m(a, b) =: a \cdot b$$

gibt, die bilinear ist. Also gilt für alle $u, v, w \in A$ und alle $\lambda \in K$:

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w, \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad \text{und}$$

$$\lambda \odot (u \cdot v) = (\lambda \odot u) \cdot v = u \cdot (\lambda \odot v).$$

Besitzt A sogar ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation m (Einselement genannt), dann ist A eine Algebra mit Einselement.

Das Einselement bezüglich der Multiplikation m von A ist dabei $\mathbb{I} := \Upsilon(1)$, wobei 1 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation des Körpers K und Υ eine lineare Abbildung $\Upsilon : K \rightarrow A, \lambda \mapsto \lambda \odot \mathbb{I}$ ist, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 K \otimes A & \xrightarrow{\Upsilon \otimes id} & A \otimes A & \xleftarrow{id \otimes \Upsilon} & A \otimes K \\
 & \searrow \sim & \downarrow m & \swarrow \sim & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

. [3]

Dabei bezeichnet id die *identische Abbildung*. Sie bildet auf ihr Argument ab. Das bedeutet, dass sie beispielsweise ein Element x einer Algebra A auf genau das gleiche Element $x \in A$ abbildet.

Eine Algebra mit Einselement wird auch mit (A, m, Υ) bezeichnet.

2.1.5 Tensorprodukt

Abschließend wird der Begriff *Tensorprodukt* definiert und dann das *Tensorprodukt von Algebren* erklärt:

Definition 2.1.8: *Seien V und W K -Vektorräume. Dann gibt es einen K -Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung*

$$\eta : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem K -Vektorraum U zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\xi_{\otimes} : V \otimes W \rightarrow U \quad \text{mit } \xi = \xi_{\otimes} \circ \eta .$$

$T := V \otimes W$ heißt *Tensorprodukt von V und W über K* .

Das Tensorprodukt T ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Das bedeutet, dass für jedes Tensorprodukt T' von V und W über K eine eindeutige, bijektive und homomorphe Abbildung (ein eindeutiger Isomorphismus)

$\psi : T \rightarrow T'$ existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\eta'} & T' \\
 \eta \searrow & & \nearrow \psi \\
 & T &
 \end{array}
 . [17]$$

Wenn V und W K -Algebren sind, dann ist $V \otimes W$ ein K -Vektorraum. Durch die Definition $(v \otimes w) \cdot (\dot{v} \otimes \dot{w}) = (v \cdot \dot{v}) \otimes (w \cdot \dot{w})$ für alle $v, \dot{v} \in V$ und alle $w, \dot{w} \in W$ wird $V \otimes W$ auf eindeutige Weise zu einer K -Algebra gemacht. Dabei steht \cdot hier für das auf $V \otimes W$ definierte Produkt $m_{V \otimes W}$. In diesem Fall bezeichnet man $V \otimes W$ als *Tensorprodukt von Algebren*. [4]

2.2 Hopf-Algebra

Nachdem im vorherigen Abschnitt grundlegende Begriffe wiederholt wurden, wird in diesem Unterkapitel über *Hopf-Algebra* mit dieser die für diese Arbeit entscheidende mathematische Struktur betrachtet. Eine *Hopf-Algebra* ist eine *Bialgebra* mit einer sogenannten *Antipode*. [3]

Um die Struktur *Hopf-Algebra* verstehen zu können, werden *Bialgebra* und *Antipode* im Folgenden betrachtet. Sofern nicht anders gekennzeichnet, folgen diese Betrachtungen und Definitionen denen aus [3].

2.2.1 Koalgebra

Zunächst wird der Begriff *Koalgebra* eingeführt, der notwendig für die Definition einer *Bialgebra* ist. Das Konzept einer Koalgebra ist *dual* zum Konzept einer Algebra. Dualität lässt sich in diesem Fall so vorstellen, dass es eine abstrakte Operation gibt, die sowohl aus einer Algebra A die zu ihr duale Koalgebra C , als auch aus der Koalgebra C die duale Algebra A macht. So gibt es in einer Koalgebra ein sogenanntes *Koprodukt* und eine *Koeins* anstelle von Produkt und Einselement der Algebra. Während das Produkt der Algebra zwei Elemente auf ein einziges abbildet, bildet das Koprodukt ein Element der Koalgebra auf alle möglichen Zerlegungen dieses Elements in zwei Elemente der Koalgebra ab. Des Weiteren bildet die Koeins das Einselement der Koalgebra zugrunde liegenden Vektorraumes auf das neutrale Element bezüglich der Multiplikation des zugrundeliegenden Körpers ab. Alle anderen Elemente des Vektorraums werden durch die Koeins auf das neutrale

Element bezüglich der Addition des zugrundeliegenden Körpers abgebildet. Im Vergleich dazu bildet das Einselement der Algebra aus dem zugrundeliegenden Körper in den Vektorraum ab.

Definition 2.2.1: Sei C ein K -Vektorraum mit zwei linearen Abbildungen $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ (Koprodukt) und $\epsilon : C \rightarrow K$ (Koeins). Dann heißt (C, Δ, ϵ) Koalgebra, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(I): (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \quad (\text{Koassoziativität})$$

$$(II): (\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta. \quad (\text{Koeins})$$

Das Koprodukt eines $x \in C$ ist allgemein der folgenden Form:

$$\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}, \quad \forall i : x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \in C.$$

Häufig wird stattdessen eine kürzere Schreibweise, *Sweedler's Notation*, verwendet:

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)}.$$

Hierbei handelt es sich um die Summe über alle möglichen Zerlegungen von x in Elemente von C .

2.2.2 Bialgebra

Die obige Definition der Koalgebra macht es möglich, den Begriff *Bialgebra* zu verstehen. Eine Bialgebra H ist ein Vektorraum, der sowohl mit einer Algebra- als auch mit einer Koalgebrastruktur ausgestattet ist. Dabei müssen die Algebra und die Koalgebra *kompatibel* sein. Das bedeutet hier, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(I): m und Υ sind Koalgebra-Morphismen.

(II): Δ und ϵ sind Algebra-Morphismen.

Die Gleichwertigkeit dieser beiden Aussagen kann durch die Kommutativität einiger Diagramme beschrieben werden. Es ergibt sich somit die folgende Definition:

Definition 2.2.2: Seien (H, m, Υ) eine K -Algebra und (H, Δ, ϵ) eine Koalgebra. Dann heißt das Quintupel $(H, m, \Upsilon, \Delta, \epsilon)$ Bialgebra, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{m} & H \\
 \Delta \otimes \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) & \xrightarrow{m \otimes m} & H \otimes H
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{m} & H \\
 \epsilon \otimes \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\
 K \otimes K & \xrightarrow{m_K} & K
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xleftarrow{\Delta} & H \\
 \Upsilon \otimes \Upsilon \uparrow & & \uparrow \Upsilon \\
 K \otimes K & \xleftarrow{\Delta} & K
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \Upsilon & H \\
 K & \nearrow & \downarrow \epsilon \\
 & id & K
 \end{array}
 \quad . [5]$$

Dabei bezeichnet m_K eine auf K definierte Multiplikation.

2.2.3 Faltungsprodukt

Für die Definition einer *Antipode* wird das sogenannte *Faltungsprodukt* (engl.: *Convolution Product*) benötigt.

Definition 2.2.3: Seien (A, m, Υ) eine Algebra und (C, Δ, ϵ) eine Koalgebra. Das Faltungsprodukt zweier linearer Abbildungen $f, g \in \text{Hom}(C, A)$ ist die bilineare Abbildung $f \star g \in \text{Hom}(C, A)$, die durch die folgende Komposition gegeben ist:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A . [5]$$

Dabei ist $\text{Hom}(C, A) := \{F : C \rightarrow A : F \text{ ist linear in } K\}$ die Menge aller linearen Abbildungen, die C auf A abbilden. [4]

In Sweedler's Notation lässt sich das Faltungsprodukt wie folgt schreiben:

$$(f \star g)(x) = \sum_{(x)} f(x^{(1)})g(x^{(2)}) \text{ für jedes } x \in C.$$

Das Faltungsprodukt ist bilinear und außerdem gilt:

$$((\Upsilon \circ \epsilon) \star f)(x) = (f \star (\Upsilon \circ \epsilon))(x) = f(x). \quad [3]$$

2.2.4 Antipode

Mit dem Faltungsprodukt lässt sich eine *Antipode* wie folgt definieren:

Definition 2.2.4: Sei $(H, m, \Upsilon, \Delta, \epsilon)$ eine Bialgebra. Eine lineare Abbildung $S : H \rightarrow H$ heißt Antipode, wenn gilt:

$$S \star id = id \star S = \Upsilon \circ \epsilon. \quad [3]$$

Eine Antipode S erfüllt:

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} x^{(1)}S(x^{(2)}) = -x - \sum_{(x)} S(x^{(1)})x^{(2)}. \quad [5]$$

2.2.5 Definition einer Hopf-Algebra

Mit den vorangegangenen Vorbetrachtungen und Definitionen kann die zentrale mathematische Struktur dieser Arbeit wie folgt definiert werden:

Definition 2.2.5: Eine Bialgebra, die zusätzlich eine Antipode besitzt, wird Hopf-Algebra genannt und mit $(H, m, \Upsilon, \Delta, \epsilon, S)$ bezeichnet.

Nicht jede Bialgebra besitzt auch eine Antipode. Wenn eine Bialgebra jedoch eine Hopf-Algebra ist, dann besitzt sie höchstens eine Antipode. Dies lässt sich durch Widerspruch beweisen:

Beweis:

Sei H eine Bialgebra und es wird angenommen, dass diese zwei Antipoden S und S' mit $S \neq S'$ besitzt.

$$S = S \star (\Upsilon \circ \epsilon) = S \star (id \star S') = (S \star id) \star S' = (\Upsilon \circ \epsilon) \star S' = S'$$

Widerspruch zur Annahme!

$\Rightarrow H$ kann höchstens eine Antipode besitzen.

□ [3]

2.2.6 Graduierung

Zum Abschluss dieses Unterkapitels wird der Begriff einer *Graduierung* einer Hopf-Algebra eingeführt:

Definition 2.2.6: Sei H eine Hopf-Algebra. H ist graduert (besitzt also eine Graduierung), wenn Unterräume $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von H existieren, sodass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(I): H = \bigoplus_{i \geq 0} H_i.$$

$$(II): S(H_i) \subseteq H_i$$

$$(III): m(H_i \otimes H_j) \subseteq H_{i+j}$$

$$(IV): \Delta(H_i) \subseteq \bigoplus_{n=0}^i H_n \otimes H_{i-n} . [2]$$

2.3 Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

In diesem Unterkapitel wird ein physikalisch wichtiges Beispiel für eine Hopf-Algebra behandelt. Die *Hopf-Algebra von Wurzelbäumen* ist gut geeignet, um *kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen* zu untersuchen, die im anschließenden Kapitel 3 eingeführt werden. Zunächst jedoch werden *Wurzelbäume* und ihre Hopf-Algebra nur formal eingeführt.

2.3.1 Wurzelbaum

Ein *Wurzelbaum* (auch gewurzelter Baum genannt) ist ein spezielles graphentheoretisches Objekt. Ein *Graph* besteht aus einer Menge von *Vertices* (Einzahl: *Vertex*, auch Knoten genannt) V_G und einer Menge von zweielementigen Teilmengen von V_G , die mit E bezeichnet wird. E ist die Menge der *Kanten* eines Graphen. Dabei sind Kanten die Verbindungen zwischen

den Vertices. [18]

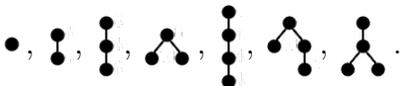
Der Spezialfall *Wurzelbaum* wird wie folgt definiert:

Definition 2.3.1: *Ein Wurzelbaum ist ein endlicher, verbundener und zyklensfreier Graph mit einem ausgezeichneten Vertex, der Wurzel genannt wird.* [16]

Dabei bedeutet *endlich*, dass ein Graph nur endlich viele Vertices und Kanten besitzt.

Verbunden bedeutet, dass für jedes beliebige Paar von Vertices x_1, x_n eines Graphen ein *Pfad* zwischen diesen beiden Vertices existiert. Dabei ist ein *Pfad* P zwischen x_1 und x_n innerhalb eines Graphen eine Teilmenge von E der folgenden Gestalt: $P = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n)\}$. [18]

Sei E_1 die Teilmenge von E , die nur Kanten zwischen x_1 und anderen Vertices des Graphen enthält. Dazu sei E_n die Teilmenge von E , die nur Kanten zwischen x_n und anderen Vertices des Graphen enthält. *Zyklensfrei* bedeutet, dass jeder Pfad von x_1 nach x_n innerhalb eines Graphen nur ein einziges Element aus E_1 und nur ein einziges Element aus E_n enthält. In einem zyklensfreien Graph ist es also nicht möglich "im Kreis zu laufen".

Beispiele für Wurzelbäume sind: 

In dieser Arbeit sind die Wurzelbäume stets so ausgerichtet, dass der oberste Vertex die Wurzel ist. Alle anderen Vertices eines Baumes liegen also unterhalb der Wurzel und werden als ihre *Nachfahren* bezeichnet. Dieser Begriff lässt sich allgemein für jeden Vertex eines Baumes anwenden. Jeder Vertex x_n , der unterhalb eines Vertex x_m liegt und über einen Pfad mit diesem verbunden ist, heißt *Nachfahre* des Vertex x_m , sofern der Pfad nicht über einen *Vorfahren* von x_m verläuft. Dabei wäre in diesem Fall x_m der Vorfahre von x_n . Direkte Nachfahren eines Vertex (Vertices, die nur über eine Kante mit ihrem Vorfahren verbunden sind) werden als *Kinder* bezeichnet. Kinder eines einzelnen Vertex sind *Geschwister*. Aus der Zyklensfreiheit eines Wurzelbaumes folgt, dass Geschwister nur über ihren direkten Vorfahren (*Muttervertex*)

miteinander verbunden sind.

Als Beispiel soll der folgende Baum dienen:  .

Der Vertex a ist die Wurzel. a hat zwei Kinder: b und c . Diese beiden Vertices sind Geschwister.

Die weiteren Betrachtungen dieses Abschnittes (2.3.1), sowie die der darauffolgenden Abschnitte im Kapitel 2, folgen [1], sofern sie nicht anderweitig gekennzeichnet sind.

Die *Kardinalität* eines Baumes t wird mit $|t|$ bezeichnet und entspricht der Anzahl seiner Vertices. Es gibt einen Baum ohne Vertex. Dieser wird mit \mathbb{I} und als *leerer Baum* bezeichnet. Seine Kardinalität ist folglich $|\mathbb{I}| = 0$.

Bäume lassen sich nach ihrer Kardinalität sortieren. Sei $T_{[n]}$ die Menge aller Bäume mit der Kardinalität n . So ergeben sich beispielsweise:

$$T_{[0]} = \{\mathbb{I}\}, \quad T_{[1]} = \{\bullet\}, \quad T_{[2]} = \{\bullet\bullet\}, \quad T_{[3]} = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\} .$$

Des Weiteren sind alle hier verwendeten Bäume *nicht-planar*. Das bedeutet unter anderem, dass ein solcher Graph gleich seiner horizontalen Spiegelung ist, also beispielsweise gilt:



Näheres zur Nicht-Planarität der hier verwendeten Wurzelbäume findet sich in 2.3.9.

2.3.2 Multiplikation von Bäumen

Die auf der Hopf-Algebra der Wurzelbäume definierte Multiplikation

$$m : H \otimes H \rightarrow H, (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2$$

bildet zwei Bäume t_1 und t_2 auf eine *Juxtaposition* der beiden Bäume ab. Das bedeutet schlicht, dass die beiden Bäume ohne ein zusätzliches Symbol nebeneinander geschrieben werden.

Beispiel: $m(\bullet, \bullet) = \bullet$

Dabei ist die Multiplikation kommutativ. Das neutrale Element dieser Multiplikation ist der leere Baum \mathbb{I} .

2.3.3 Einselement und Koeins

Als neutrales Element bezüglich der Multiplikation von Bäumen ist der leere Baum das Einselement der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen. Es muss also auch eine lineare Abbildung Υ geben, die aus dem Grundkörper der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen in eben diese Hopf-Algebra abbildet. Der hier zugrundeliegende Körper ist der Körper der rationalen Zahlen \mathbb{Q} . [5]
Die entsprechende Abbildung ergibt sich durch $\Upsilon : \mathbb{Q} \rightarrow H, \lambda \mapsto \lambda \mathbb{I}$.

Für die Koeins ϵ gilt entsprechend: $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{Q}, \lambda \mathbb{I} \mapsto \lambda$ und $(H \setminus U) \ni t \mapsto 0$, wobei $U := \{t : t = \lambda \mathbb{I}, \lambda \in \mathbb{Q}\}$. Vielfache des leeren Baumes sind also die einzigen Argumente von ϵ , deren Bild unter ϵ nicht verschwindet.

2.3.4 Wald

Ein Produkt von Bäumen wird als *Wald* bezeichnet. Dabei kann ein Wald einen bestimmten Baum mehr als einmal beinhalten. Genauso kann ein Wald aus einem einzigen Baum bestehen. Ein solcher Wald ist formal das Produkt aus einem Baum und dem leeren Baum \mathbb{I} .

Der leere Baum \mathbb{I} ist auch zugleich der *leere Wald*.

Aus der Abgeschlossenheit der Multiplikation m und der Definition des Begriffes Wald folgt automatisch, dass Wälder die Elemente des Vektorraumes H sind, welcher der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen zugrunde liegt.

2.3.5 Koproduct

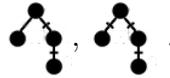
Das Koproduct der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen wird mithilfe von sogenannten *zulässigen Schnitten* definiert. Ein *Schnitt* eines Baumes ist eine Teilmenge c der Menge seiner Kanten. Ihre Elemente werden als *geschnittene Kanten* bezeichnet. Durch Entfernen der Kanten dieser Teilmenge, wird ein Baum sozusagen in kleinere Bäume "zerschnitten". Diese kleineren Bäume

bilden einen Wald. Dabei gibt es in jedem auf diese Weise entstandenen Wald genau einen Baum, dessen Wurzel die Wurzel des ursprünglichen Baumes ist. Dieser Baum wird mit $R^c(t)$ bezeichnet. Die übrigen Bäume bilden einen Wald, der mit $P^c(t)$ bezeichnet wird. Ein Schnitt ist ein *zulässiger Schnitt* des Baumes t , wenn innerhalb von t jeder Pfad zwischen Wurzel und einem beliebigen anderen Vertex höchstens eine geschnittene Kante beinhaltet.

Als Beispiele dienen die zulässigen Schnitte des Baumes  :



Nicht zulässig sind die folgenden Schnitte:



Wird der Schnitt  betrachtet, so gilt: $R^c(t) = \bullet$ und $P^c(t) = \bullet \text{---} \bullet$.

Sei $\mathfrak{C}(t)$ die Menge aller zulässigen Schnitte eines Baumes t . Dann gilt für das Koprodukt von t :

$$\Delta(t) = t \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes t + \sum_{c \in \mathfrak{C}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Für den leeren Baum wird definiert: $\Delta(\mathbb{I}) := \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$.

Weiterhin wird ein sogenanntes *reduziertes Koprodukt* definiert:

$$\Delta'(t) := \sum_{c \in \mathfrak{C}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Für bestimmte Elemente der Hopf-Algebra ist das reduzierte Koprodukt identisch Null. Diese werden als *primitive Elemente* bezeichnet.

Beispiele für Koprodukte von Wurzelbäumen sind:

$$\begin{aligned} \Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet, \quad \Delta(\bullet \text{---} \bullet) = \bullet \text{---} \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet \text{---} \bullet + \bullet \otimes \bullet, \\ \Delta(\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet) &= \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \bullet \otimes \bullet \text{---} \bullet. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass \bullet ein primitives Element der Hopf-Algebra ist.

In Sweedlers Notation schreibt sich das Koproduct in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen:

$$\Delta(t) = t \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes t + \sum_{(t)} t^{(1)} \otimes t^{(2)} .$$

2.3.6 Antipode der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

Auch die Antipode der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen ist mithilfe von zulässigen Schnitten definiert. Für sie gilt:

$$S(t) = -t - \sum_{(t)} S(t^{(1)})t^{(2)} \text{ und } S(\mathbb{I}) = \mathbb{I} .$$

Beispielsweise ergibt sich:

$$S(\bullet) = -\bullet, \quad S(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}) = -\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} - S(\bullet)\bullet = -\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet\bullet .$$

2.3.7 Graduierung der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

Seien F die Menge aller Wälder und F_n die Mengen aller Wälder, die n Vertices beinhalten. So ergeben sich beispielsweise:

$$F_0 = \{\mathbb{I}\}, \quad F_1 = \{\bullet\}, \quad F_2 = \{\bullet\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\}, \quad F_3 = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ / \ \backslash \\ \bullet \ \bullet \end{array}\},$$

$$F_4 = \{\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \bullet\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ / \ \backslash \\ \bullet \ \bullet \end{array}\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\begin{array}{c} \bullet \\ / \ \backslash \\ \bullet \ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ / \ \backslash \\ \bullet \ \bullet \end{array}\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\} .$$

Sei für jedes F_n ein $H_n := \text{span}_{\mathbb{Q}}(F_n)$ als die *lineare Hülle* von F_n definiert. Die lineare Hülle von F_n ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus F_n mit Elementen aus \mathbb{Q} als Skalaren. Alle H_n sind Unterräume von H . Das ist offensichtlich, da alle F_n Teilmengen der Menge H sind und der Vergleich mit Definition 2.1.4 zeigt, dass die lineare Hülle eines jeden F_n ein Unterraum ist.

Unter Beachtung von Definition 2.2.6 lässt sich somit eine Graduierung $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$ auf der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen einführen.

2.3.8 Augmentation Ideal

In 2.3.3 trat der Unterraum $H \setminus U$ auf. Dieser enthält alle Elemente aus H bis auf Vielfache des leeren Baumes. Dieser Unterraum wird als *Augmentation Ideal* (symbolisch: Aug) bezeichnet und ergibt sich als direkte Summe aller Unterräume H_n ohne den Unterraum H_0 : $Aug := \bigoplus_{n>0} H_n$.

2.3.9 Veredelungsoperator

Abschließend wird der *Veredelungsoperator* (engl.: *Grafting operator*) eingeführt. Genauso wie im Garten manche Obstbäume veredelt werden, indem ihnen eine Wurzel aufgefropft wird, fügt der Veredelungsoperator

$$B_+ : H \rightarrow H$$

einem Wurzelbaum einen zusätzlichen Vertex hinzu. Dieser zusätzliche Vertex wird stets über der alten Wurzel hinzugefügt, mit dieser durch eine Kante verbunden und bildet somit die Wurzel des auf diese Weise neu entstandenen Baumes. Des Weiteren wird unter dem Veredelungsoperator ein Wald aus zwei oder mehr Bäumen zu einem einzigen Baum zusammengefügt, indem die Wurzeln der einzelnen Bäume durch jeweils eine Kante mit dem neuen Vertex verbunden werden.

Anschaulich ist der Veredelungsoperator also wie folgt definiert:

$$B_+(t_1 t_2 \dots t_n) := \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n \end{array} .$$

Genauer betrachtet bildet der Veredelungsoperator nicht in die gesamte Hopf-Algebra der Wurzelbäume ab. Da es nicht möglich ist unter Anwendung von B_+ den leeren Baum zu erhalten, reicht es aus seine Zielmenge auf das Augmentation Ideal einzuschränken.

Beispiele für die Anwendungen des Veredelungsoperators sind:

$$B_+(\mathbb{I}) = \bullet, \quad B_+(\bullet) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \quad B_+(\bullet \bullet) = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} .$$

Durch mehrfache Anwendung von B_+ werden einem Baum entsprechend viele neue Vertices hinzugefügt. Dementsprechend lässt sich jeder Baum, der

Element des Augmentation Ideals ist, mithilfe des Veredelungsoperators aus leeren Bäumen gewinnen.

So gilt Beispielweise für $\bullet \swarrow \bullet$: $\bullet \swarrow \bullet = B_+[B_+(\mathbb{I})B_+(\mathbb{I})]$.

Dies erklärt auch zusammen mit der Kommutativität der Multiplikation weshalb nicht-planare Graphen verwendet werden müssen, wenn die Hopf-Algebra der Wurzelbäume betrachtet wird. Es ist also nicht relevant in welcher Reihenfolge die Kinder eines Vertex mit ihrem Muttervertex verbunden werden.

Mit dem Veredelungsoperator gilt für das Koproduct:

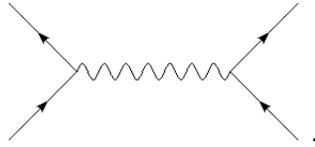
$$\Delta(B_+(t)) = B_+(t) \otimes \mathbb{I} + (id \otimes B_+)\Delta(t), \quad (\text{Beweis siehe [10]}).$$

3 Ein Spielzeugmodell

In diesem Kapitel wird ein *Spielzeugmodell* einer Quantenfeldtheorie mithilfe der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen *renormiert*. Ein *Spielzeugmodell* ist ein vereinfachtes Modell einer physikalischen Theorie. Es beinhaltet die wesentlichen Bestandteile einer Theorie, stellt diese aber vereinfacht dar und eignet sich deshalb nur dafür einzelne Merkmale der Theorie zu beschreiben. In dem hier verwendeten Spielzeugmodell werden sogenannte *Spielzeug-Feynman-Regeln* verwendet, um die *renormierten* Lösungen von *kombinatorischen Dyson-Schwinger-Gleichungen* (abkürzend: *kDSG*) zu bestimmen. Dafür werden diese Gleichungen zunächst eingeführt und anschließend exemplarisch berechnet. Im Zuge dessen wird auch der Begriff der *Renormierung* erläutert. Weiterhin wird ein System von kombinatorischen Dyson-Schwinger-Gleichungen untersucht und gelöst. Den Abschluss bilden die Bestimmung und die Überprüfung einer *Renormierungsgruppen-Gleichung* (kurz: *RGG*) für die Gleichungen des untersuchten kDSG-Systems.

3.1 Feynman-Graphen

Feynman-Graphen dienen dazu jegliche Prozesse in einer Quantenfeldtheorie anschaulich zu beschreiben. Beispielweise wäre der folgende Graph ein möglicher Graph für eine Elektron-Elektron-Streuung:



Dabei sind Zeitachse (hier: Ordinate) und Ortsachse (hier: Abszisse) nicht eingezeichnet. Die geraden Linien mit den Pfeilen symbolisieren die Elektronen und die gewellte Linie symbolisiert das virtuelle Photon, das während des Streuprozesses ausgetauscht wird. Allgemein steht eine gerade Linie mit Pfeil für ein fermionisches Teilchen. Eine Wellenlinie steht jedoch stets für ein Photon. Andere bosonische Teilchen, wie Gluonen, werden jeweils mit einer anderen Linienart gekennzeichnet. Die Richtung des Pfeils auf einer Fermion-Linie zeigt an, in welche Zeitrichtung sich das Teilchen bewegt. Ein Elektron, das sich rückwärts in der Zeit bewegt, entspricht seinem Antiteilchen (Positron), das sich vorwärts in der Zeit bewegt. Umgedreht ist ein Elektron, das sich vorwärts in der Zeit bewegt, ein Positron, das zeitlich rückwärts läuft. [13]

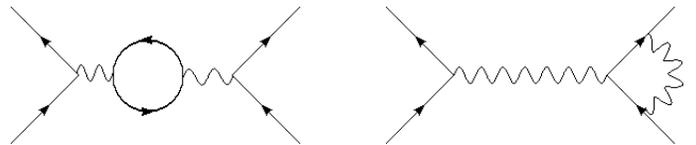
Auch für Feynman-Graphen gelten die üblichen graphentheoretischen Begriffe. Teilchenlinien sind Kanten, wobei die Kanten je nach Teilchenart unterschiedlich gekennzeichnet werden. In einem Feynman-Graphen tauchen häufig also verschiedene Typen von Kanten auf. Punkte, an denen zwei Teilchenlinien miteinander verbunden sind, heißen Vertices.

Aus Feynman-Graphen lassen sich verschiedene physikalische Größen, beispielsweise die Übergangsamplitude für eine Streuung, bestimmen. Je nach Quantenfeldtheorie werden bestimmte Regeln (sogenannte *Feynman-Regeln*) aufgestellt, mit denen Feynman-Graphen ausgewertet und so die gesuchten Größen erhalten werden können. [8]

Zu beachten ist jedoch, dass der obige Feynman-Graph für eine Elektron-Elektron-Streuung nicht die einzige Möglichkeit für eine solche Streuung darstellt. Das Austauscheteilchen (Photon) ist virtuell, lässt sich also nicht experimentell messen. Es ist demnach nur möglich den Zustand des Systems vor und nach der Streuung zu messen. Was genau während der Streuung passiert ist nicht beobachtbar. Folglich muss nicht zwangsläufig nur ein einzelnes Photon ausgetauscht werden. Beispielsweise könnte das virtuelle Photon ein Elektron-Positron-Paar erzeugen, welches dann wieder zu einem Photon

annihiliert. Es gibt unendlich viele mögliche Prozesse, die während einer solchen Streuung ablaufen könnten. Dies bedeutet, dass es zur Berechnung der Übergangsamplitude einer Streuung notwendig ist die Summe aller möglichen Graphen zu betrachten, die diese Streuung darstellen können. Dabei wird jeder Graph mit einer Kopplungskonstante gewichtet, deren Ordnung der Anzahl der Vertices des Graphen entspricht. Ist die Kopplungskonstante kleiner als 1, so kann die Übergangsamplitude in eine Störungsreihe in der Kopplungskonstante entwickelt werden. Die Quantenfeldtheorie, welche die Elektron-Elektron-Streuung beschreibt, ist die Quantenelektrodynamik (QED). Beispielsweise ist die dortige Kopplungskonstante die Feinstrukturkonstante, deren Wert bei nicht zu großen Energien bei rund $\frac{1}{137}$ liegt. [13]

Wenn z.B. ein virtuelles Elektron-Positron-Paar aus einem Photon entsteht oder ein Elektron während der Streuung mit sich selbst wechselwirkt, so ergibt das eine Schleife im Feynman-Graphen:



Es kann ebenso mehr als nur eine Schleife pro Graph geben. Mit der Anzahl der Schleifen erhöht sich auch die Ordnung in der Kopplungskonstante des Graphen. Das bedeutet, dass für die Berechnung von Störungsreihen nur Terme bis zu einer bestimmten Ordnung von Bedeutung sind. Umso genauer das Ergebnis jedoch sein soll, desto mehr Ordnungen müssen berücksichtigt werden. Mit jeder weiteren Ordnung erhöht sich allerdings auch der Rechenaufwand deutlich. Üblicherweise liefern Schleifen nämlich divergente Integrale. Diese müssen durch *Renormierung* endlich gemacht werden, was umso aufwändiger wird, je mehr Schleifen berechnet werden müssen. [7]

Prinzipiell ist *Renormierung* ein Verfahren, um aus Divergenzen endliche Ausdrücke zu gewinnen. Dafür gibt es verschiedenste Methoden. Stets müssen dabei jedoch zusätzliche Konstanten eingeführt werden. Eine Theorie ist *renormierbar*, wenn die Anzahl der einzuführenden Konstanten endlich ist. Im Allgemeinen entspricht die Anzahl der einzuführenden Konstanten in einer renormierbaren Theorie der Anzahl der freien Parameter der Theorie. Entsprechend ist eine Theorie *nicht renormierbar*, wenn unendlich viele zusätzliche Konstanten eingeführt werden müssen, um die Divergenzen zu eliminie-

ren. Renormierung funktioniert unter anderem deshalb, weil die auftretenden Divergenzen keine physikalische Realität wiedergeben, sondern dem zur Beschreibung der Theorien verwendeten mathematischen Formalismus entspringen. [6], [7], [10]

Bei der exemplarischen Berechnung einer *Dyson-Schwinger-Gleichung* in 3.3 wird eine Renormierung durchgeführt und die Bedeutung der dabei auftretenden Konstante wird deutlicher werden.

3.2 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Dyson-Schwinger-Gleichungen liefern Störungsreihen der Feynman-Graphen. Daraus können dann mithilfe von Auswertungsfunktionen (häufig als ϕ bezeichnet) sogenannte *Greensche Funktionen* bestimmt werden. Diese charakterisieren die betrachtete Quantenfeldtheorie und dienen beispielsweise zur Konstruktion von Übergangsamplituden. [1], [9]

3.2.1 Kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen

Die in dieser Arbeit behandelten Dyson-Schwinger-Gleichungen sind allesamt *kombinatorisch*. Das bedeutet, dass sie Fixpunktgleichungen im Raum der Störungsreihen in einer Kopplungskonstante α (bezeichnet als $\mathcal{H}[[\alpha]]$) sind. Die Berechnung einer kDSG liefert also eine im Allgemeinen unendliche Potenzreihe in α . [1]

Mit Ausnahme der linearen kDSG, die im nachfolgenden Abschnitt behandelt wird, sind die kDSGn in dieser Arbeit der folgenden Gestalt:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n w_n B_+^{(d_n)}(X^{n+1}) . [12]$$

Dabei sind die $w_n \in \mathbb{Q}$ Skalare, welche die einzelnen Summanden gewichten. In dieser Arbeit sind die einzelnen w_n stets entweder 1 oder 0. Die d_n kennzeichnen verschiedene Veredelungsoperatoren. Welche Bedeutung dies hat, wird in 3.3 bei der Berechnung einer kDSG deutlich werden.

Lösungen einer kDSG sind im Allgemeinen der folgenden Form:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n a_n, a_n \in H .$$

Abkürzend wird jede kDSG im Folgenden nur als Dyson-Schwinger-Gleichung (DSG) bezeichnet.

3.2.2 Lineare Dyson-Schwinger-Gleichungen

Im Allgemeinen wird zwischen *linearen* und *nicht-linearen Dyson-Schwinger-Gleichungen* unterschieden. In diesem Unterkapitel werden lineare DSGn eingeführt. Eine nicht-lineare DSG wird in 3.3 untersucht.

Eine *lineare Dyson-Schwinger-Gleichung* ist der simpelste Typ einer kombinatorischen Dyson-Schwinger-Gleichung. Sie ist der folgenden Gestalt:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+(X(\alpha)) .$$

Die einzelnen Faktoren der Störungsreihe, die sich aus der Berechnung dieser Gleichung ergeben, sind allesamt *Leiterbäume*. Dies sind all jene Bäume, die sich jeweils mittels $B_+ \circ B_+ \circ \dots \circ B_+(\mathbb{I})$ aus einem einzigen leeren Baum gewinnen lassen. [1]

Die vollständige Lösung dieser Gleichung lautet somit: $X(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \alpha^n (B_+)^n(\mathbb{I})$.

Anschaulich ist diese Reihe der folgenden Gestalt:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha \bullet + \alpha^2 \bullet \bullet + \alpha^3 \bullet \bullet \bullet + \alpha^4 \bullet \bullet \bullet \bullet + \mathcal{O}(\alpha^5) .$$

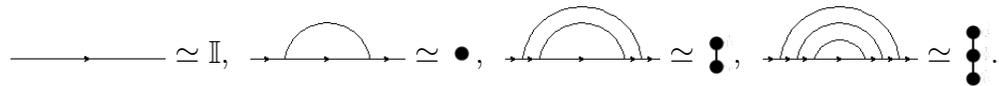
Wie auch in [10] und [11] wird an dieser Stelle ein Beispiel aus der masselosen Yukawa-Theorie betrachtet. Dieses wird einen Zusammenhang zwischen den dabei verwendeten Feynman-Graphen und den Wurzelbäumen aus einer linearen DSG aufzeigen.

In diesem Beispiel gibt es genau eine Sorte Fermionen und eine Sorte Bosonen. Es werden Graphen betrachtet, die aus einer Fermionlinie und einer beliebigen Zahl an Bosonenlinien bestehen. Genauer werden die Graphen betrachtet bei denen das Fermion ein oder mehrere Bosonen emittiert und diese wieder absorbiert. Die zugehörige Kopplungskonstante wird mit g bezeichnet. Da in diesem Beispiel nur gerade Ordnungen in g vorkommen können, wird festgelegt: $g^2 =: \alpha$. Die Störungsreihe in α lautet damit:

$$\longrightarrow + \alpha \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \alpha^2 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \alpha^3 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \mathcal{O}(\alpha^4) .$$

Diese Störungsreihe hat auf den ersten Blick schon gewisse Ähnlichkeiten mit der Reihe, die sich aus der linearen DSG ergibt. Tatsächlich lässt sich jeder Graph aus dieser Störungsreihe eindeutig einem Leiterbaum zuordnen, indem jeder Vertex eines Wurzelbaumes eine Bosonschleife des zugeordneten Feynman-Graphens repräsentiert. Dabei gehen keinerlei Informationen verloren.

Beispielsweise gelten folgende Zuordnungen:



Solche Zuordnungen ermöglichen es Berechnungen für Feynman-Graphen in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen auszuführen. Werden Bäume mit verschiedenen Vertices (*dekorierte Vertices*, siehe 3.3) betrachtet, so lassen sich auch kompliziertere bzw. komplexere Feynman-Graphen mithilfe solcher Zuordnungen durch Wurzelbäume darstellen.

3.3 Beispielrechnung einer Dyson-Schwinger-Gleichung

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel einer nicht-linearen DSG ausführlich berechnet und renormiert. Es wird die folgende Gleichung betrachtet:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+^{(1)}[(X(\alpha))^2] + \alpha^2 B_+^{(2)}[(X(\alpha))^3] .$$

Im Gegensatz zur in 3.2.2 betrachteten DSG, gibt es in diesem Beispiel zwei verschiedene Veredelungsoperatoren $B_+^{(1)}$ und $B_+^{(2)}$. Sie unterscheiden sich nur in den Vertices, die sie einem Baum hinzufügen. So erzeugt $B_+^{(1)}(\mathbb{I}) = \bullet$ einen Vertex, der mit einer 1 *dekoriert* wird. Passend dazu erzeugt $B_+^{(2)}(\mathbb{I}) = \bullet^2$ einen mit einer 2 dekorierten Vertex. Es gibt hier also zwei verschiedene Typen von Vertices. Für jeden Typ von Vertex wird eine andere Feynman-Regel verwendet, um ihn auszuwerten. Dies ist formal der einzige Unterschied zwischen diesen beiden Typen. In die Sprache von Feynman-Graphen übersetzt, würde jeder diesen beiden Vertextypen für eine andere Art von *Sub-Feynman-Graph* stehen, der in einen anderen Graphen eingesetzt wird.

Die Dekorierungen 1 und 2 sind nicht willkürlich gewählt. Tatsächlich entsprechen sie jeweils der Ordnung in α , die vor dem jeweiligen Veredelungsoperator steht. Welcher Zusammenhang deshalb zwischen der Summe der

Dekorierungen eines Baumes und seiner Ordnung in α besteht, wird bei der Berechnung der Störungsreihe deutlich werden.

3.3.1 Berechnung der Störungsreihe

Durch iteratives Berechnen, kann die Störungsreihe berechnet werden. Die so berechneten Koeffizienten bis zur 4. Ordnung in α werden im Folgenden aufgeführt:

0. Ordnung: \mathbb{I}

1. Ordnung: \bullet^1

2. Ordnung: $\bullet^2 + 2 \bullet_1^1$

3. Ordnung: $2 \bullet_2^1 + 3 \bullet_1^2 + \bullet_1^1 \bullet_1^1 + 4 \bullet_1^1$

4. Ordnung: $3 \bullet_2^2 + 3 \bullet_1^2 \bullet_1^1 + 2 \bullet_1^1 \bullet_2^1 + 6 \bullet_1^1 \bullet_2^1 + 6 \bullet_1^2 \bullet_1^1 + 4 \bullet_1^1 \bullet_2^1 + 2 \bullet_1^1 \bullet_1^1 \bullet_1^1 + 4 \bullet_1^1 \bullet_1^1 \bullet_1^1 + 8 \bullet_1^1 \bullet_1^1 \bullet_1^1$.

Es ist offensichtlich, dass die Dekorierung der Vertices die Ordnung in α berücksichtigt. Werden die Dekorierungen der einzelnen Vertices eines Baumes zusammenaddiert, so ergibt sich stets die Ordnung in α zu welcher der Baum gehört. Dies ist einsichtig, wenn beachtet wird, dass bei Anwendung von $\alpha B_+^{(1)}$ auf einen Baum sowohl ein Vertex \bullet^1 hinzugefügt, als auch die Ordnung in α des Baumes um 1 erhöht wird. Ähnliches passiert dementsprechend bei Anwendung von $\alpha^2 B_+^{(2)}$ auf einen Baum, nur dass dabei ein Vertex \bullet^2 hinzugefügt und die Ordnung in α um 2 erhöht wird.

3.3.2 Spielzeug-Feynman-Regeln

Das Herzstück des hier betrachteten Spielzeugmodells sind die *Spielzeug-Feynman-Regeln*. Damit aus der ermittelten Störungsreihe eine Greensche Funktion bestimmt werden kann, müssen die Feynman-Regeln an dieser Stelle definiert werden. Da in der betrachteten DSG zwei verschiedene Veredelungsoperatoren auftreten, werden auch zwei verschiedene Feynman-Regeln definiert:

$${}_z\phi_s \circ B_+^{(1)}(t) := \int_0^\infty \frac{dx x^{-z}}{x+s} {}_z\phi_x(t), \quad {}_z\phi_s \circ B_+^{(2)}(t) := \int_0^\infty \frac{dx x^{1-z}}{x^2+s^2} {}_z\phi_x(t), \quad t \in H.$$

Die einzelnen Spielzeug-Feynman-Regeln haben strukturelle Ähnlichkeiten mit bestimmten Feynman-Regeln aus physikalischen Quantenfeldtheorien, was erklärt wieso die gewählten Regeln dieser Gestalt sind. Dabei bildet die Auswertungsfunktion ${}_z\phi_s : H \rightarrow \mathbb{C}[z^{-1}, z] =: \Omega$ aus der Hopf-Algebra der Wurzelbäume in die \mathbb{C} -Algebra der meromorphen Funktionen in z , die durch ihre Laurentreihe um $z = 0$ dargestellt werden können, ab. Die einzelne eckige Klammer in der Definition von Ω bedeutet, dass der Hauptteil einer Laurentreihe aus Ω abbricht, also nur Pole endlicher Ordnung auftreten. Die doppelte eckige Klammer bedeutet, dass der Nebenteil einer Laurentreihe aus Ω nicht abbricht, es also Terme unendlicher nichtnegativer Ordnung in z geben kann ([10]). Es gilt: ${}_z\phi_s(\mathbb{I}) = 1$ und ${}_z\phi_s(t_1 t_2) = {}_z\phi_s(t_1) {}_z\phi_s(t_2)$. z ist ein nicht physikalischer Parameter für dessen Realteil gelten muss: $0 < \operatorname{Re}(z) \ll 1$. Physikalische Lösungen der betrachteten Integrale ergeben sich im Grenzfall $z \rightarrow 0$. Des Weiteren ist $s > 0$ ein Parameter, wie er für von Feynman-Graphen abhängige Funktionen in der Quantenfeldtheorie typisch ist. Beispielsweise könnte es sich bei s um den Impuls eines bestimmten Teilchens aus einem Feynman-Graphen handeln. [2]

Um die Graphen der Störungsreihe mithilfe der Feynman-Regeln auswerten zu können, muss zunächst betrachtet werden, wie die dazugehörigen Integrale für den Fall $t = \mathbb{I}$ gelöst werden können. Alle anderen Fälle lassen sich einfach daraus ableiten, da sie die Integrale strukturell nur leicht verändern.

$$\begin{aligned} {}_z\phi_s \circ B_+^{(1)}(\mathbb{I}) &= \int_0^\infty \frac{dx x^{-z}}{x+s} \\ &= \int_0^\infty dx s^{-z-1} \frac{(x/s)^{-z}}{(x/s)+1} \\ &= s^{-z} \int_0^\infty dy \frac{y^{-z}}{y+1}, \quad \text{Substitution: } (x/s) =: y \\ &= s^{-z} B(1-z, z) \end{aligned}$$

Dabei ist $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ die *Eulersche Betafunktion*. Speziell gilt:

$$B(1-z, z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \csc(\pi z) .$$

Abkürzend wird die folgende Bezeichnung eingeführt: $F(z) := B(1-z, z)$.

Auch das zweite Integral liefert eine Lösung, in der die Beta-Funktion auftritt:

$$\begin{aligned} {}_z\phi_s \circ B_+^{(2)}(\mathbb{I}) &= \int_0^\infty \frac{dx x^{1-z}}{x^2 + s^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \left(\frac{x^{-z}}{x + is} + \frac{x^{-z}}{x - is} \right) , \quad \text{Partialbruchzerlegung} \\ &= \frac{1}{2} ((is)^{-z} + (-is)^{-z}) F(z) . \end{aligned}$$

Damit lassen sich die einzelnen Graphen mit den Feynman-Regeln auswerten:

1. Ordnung: ${}_z\phi_s(\bullet^1) = s^{-z} F(z)$

2. Ordnung: ${}_z\phi_s(\bullet^2) = \frac{1}{2} ((is)^{-z} + (-is)^{-z}) F(z)$

$${}_z\phi_s(\bullet_1^1) = s^{-2z} F(z) F(2z)$$

3. Ordnung: ${}_z\phi_s(\bullet_2^1) = \frac{1}{2} ((is^2)^{-z} + (is^2)^{-z}) F(z) F(2z)$

$${}_z\phi_s(\bullet_{\bullet_1}^1) = s^{-3z} F^2(z) F(3z)$$

$${}_z\phi_s(\bullet_1^2) = \frac{1}{2} ((is)^{-2z} + (-is)^{-2z}) F(z) F(2z)$$

$${}_z\phi_s(\bullet_{\bullet_1}^1) = s^{-3z} F(z) F(2z) F(3z)$$

4. Ordnung: $z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{4}(i^{-z} + (-i)^{-z})((is)^{-2z} + (-is)^{-2z})F(z)F(2z)$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{2}((is^3)^{-z} + (-is^3)^{-z})F^2(z)F(3z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{2}((is)^{-3z} + (-is)^{-3z})F^2(z)F(3z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{2}((is^{3/2})^{-2z} + (is^{3/2})^{-2z})F(z)F(2z)F(3z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{2}((is)^{-3z} + (-is)^{-3z})F(z)F(2z)F(3z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = \frac{1}{2}((is^3)^{-z} + (-is^3)^{-z})F(z)F(2z)F(3z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = s^{-4z}F^2(z)F(2z)F(4z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = s^{-4z}F^2(z)F(3z)F(4z)$$

$$z\phi_s(\text{diagram}) = s^{-4z}F(z)F(2z)F(3z)F(4z) .$$

3.3.3 Renormierung des Spielzeugmodells

Das Auftreten der Eulerschen Beta-Funktion in obigen Ergebnissen ist zunächst problematisch, wenn der Grenzwert $z \rightarrow 0$ betrachtet werden soll. Schließlich divergiert $F(z)$ in diesem Fall. Um dennoch Informationen aus der DSG gewinnen zu können, müssen die obigen Ergebnisse renormiert werden. Dabei handelt es sich um die Renormierung des Spielzeugmodells, da dafür die *renormierten Feynman-Regeln* gefunden werden müssen.

Der erste Schritt zur renormierten DSG ist die Entwicklung der einzelnen aus den Bäumen gewonnenen Funktionen in eine Laurentreihe. Dabei hat $F(z)$ einen Pol 1. Ordnung bei $z = 0$ und somit haben alle obigen Ergebnisse Pole endlicher Ordnung an dieser Stelle. Da ein Wurzelbaum per Definition endlich viele Vertices besitzt, kann es bei der Auswertung eines Baumes aufgrund der hier gewählten Spielzeug-Feynman-Regeln auch nur Pole endlicher Ordnung geben.

Somit lassen sich die einzelnen Ergebnisse in eine Laurentreihe entwickeln. Dafür werden $F(z)$ und s^{-z} in Reihen um $z = 0$ entwickelt und anschließend multipliziert. Für diese beiden Funktionen ergeben sich die folgenden Entwicklungen:

$$s^{-z} = 1 - z \ln(s) + \frac{1}{2}z^2 \ln^2(s) - \frac{1}{6}z^3 \ln^3(s) + \frac{1}{24}z^4 \ln^4(s) + \mathcal{O}(z^5)$$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{\pi^2 z}{6} + \frac{7\pi^4 z^3}{360} + \mathcal{O}(z^5) .$$

Um Terme wie zum Beispiel $(is)^{-z}$ zu entwickeln, müssen in den obigen Entwicklungen einfach Ersetzungen wie $s \rightarrow is$ durchgeführt werden. Dabei gilt: $\ln(\pm is) = \ln(s) \pm i\frac{\pi}{2}$.

Als Beispiele für derartige Reihenentwicklungen werden die folgenden betrachtet:

$$\begin{aligned} {}_z\phi_s(\bullet^1) &= \frac{1}{z} - \ln(s) + \mathcal{O}(z) \\ {}_z\phi_s(\bullet_1^1 \bullet_2^1) &= \frac{1}{3z^3} - \frac{\ln(s)}{z^2} + \frac{1}{z} \left(\frac{41\pi^2}{72} + \frac{3}{2} \ln^2(s) \right) - \left(\frac{3}{2} \ln^3(s) + \frac{41}{24} \pi^2 \ln(s) \right) + \mathcal{O}(z) . \end{aligned}$$

Wie erwartet, sind die Entwicklungen umso rechenaufwändiger, je mehr Vertices der ausgewertete Baum besitzt.

Im ersten Beispiel lässt sich der divergente Term entfernen, indem neben ${}_z\phi_s(\bullet^1)$ auch ${}_z\phi_u(\bullet^1)$ betrachtet wird und der eine von dem anderen Term abgezogen wird. Anschaulich lässt sich dies so vorstellen als würde eine physikalische Größe $A(s) := {}_z\phi_s(t)$ an einer Stelle $s = u$ gemessen und durch die

Subtraktion alle bezüglich s konstanten Terme entfernt. [6]

Für dieses Beispiel wäre die renormierte Feynman-Regel demnach:

$${}_z\phi_R(\bullet^1) := {}_z\phi_s(\bullet^1) - {}_z\phi_u(\bullet^1) = \ln\left(\frac{u}{s}\right) + \mathcal{O}(z).$$

Dieses Vorgehen ist für das zweite Beispiel so jedoch nicht praktikabel. Zwar würde bei der Subtraktion von ${}_z\phi_u(\bullet^1_2)$ der Term mit dem Pol der höchsten Ordnung verschwinden, aber dennoch würden die Terme mit Polen niedrigerer Ordnung überleben, da sie abhängig von s sind. Dieses Problem tritt für alle Bäume auf, die mehr als nur einen Vertex haben. Folglich muss ein anderes Renormierungsschema gefunden werden bzw. ein Schema dessen Spezialfall für Bäume mit nur einem Vertex eben genau die obige renormierte Feynman-Regel liefert.

Das gesuchte Renormierungsschema wird erhalten, indem die ursprünglichen Feynman-Regeln durch eine sogenannte *Algebraische Birkhoff-Zerlegung* (siehe z.B. [2] oder [5]) gewissermaßen in zwei einzelne Regeln zerlegt werden, die durch das Faltungsprodukt verknüpft werden:

$${}_z\phi_s = {}_z\phi_-^{\star^{-1}} \star {}_z\phi_+ . [2]$$

Dabei ist ${}_z\phi_-^{\star^{-1}}$ das Inverse zu ${}_z\phi_-$ bezüglich des Faltungsproduktes.

Weiterhin muss für diese Zerlegung die Algebra Ω in eine direkte Summe zerlegt werden: $\Omega = \Omega_+ \oplus \Omega_-$, mit $\Omega_+ := \mathbb{C}[[z]]$ und $\Omega_- := \mathbb{C}[z^{-1}]$. [5]

Dann gilt:

$${}_z\phi_+ : H \rightarrow \Omega_+ \quad \text{und} \quad {}_z\phi_- : H \rightarrow \Omega_- . [2]$$

Offensichtlich kann ${}_z\phi_+$ als renormierte Feynman-Regel verwendet werden, da es nur auf Reihen abbildet, die polfrei sind. Unter Verwendung dieser Feynman-Regel treten also keine Divergenzen mehr auf.

${}_z\phi_- =: Z$ wird als *Gegenterm* (engl.: *Counterterm*) bezeichnet und ergibt sich als: $Z = {}_z\phi_u \circ S$ mit der Antipode S . [2]

Somit ergibt sich letztendlich für die renormierten Feynman-Regeln:

$$\begin{aligned} {}_z\phi_R &:= {}_z\phi_+ = ({}_z\phi_u \circ S) \star {}_z\phi_s \\ &= m[({}_z\phi_u \circ S) \otimes {}_z\phi_s] \Delta . \end{aligned}$$

Zu prüfen bleibt, ob diese Regeln als Spezialfall auch die bereits gefundene Regel ${}_z\phi_R(\bullet^1) := {}_z\phi_s(\bullet^1) - {}_z\phi_u(\bullet^1)$ beinhalten.

Dies lässt sich durch Nachrechnen leicht bestätigen:

$$\begin{aligned} m[({}_z\phi_u \circ S) \otimes {}_z\phi_s] \Delta(\bullet^1) &= m[({}_z\phi_u \circ S) \otimes {}_z\phi_s](\bullet^1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet^1) \\ &= m[{}_z\phi_u(-\bullet^1) \otimes {}_z\phi_s(\mathbb{I}) + {}_z\phi_u(\mathbb{I}) \otimes {}_z\phi_s(\bullet^1)] \\ &= {}_z\phi_s(\bullet^1) - {}_z\phi_u(\bullet^1) \quad . \end{aligned}$$

Der für \bullet^1 gefundene Spezialfall ist also in den ermittelten renormierten Feynman-Regeln enthalten.

Bei Anwendung der renormierten Feynman-Regeln ist der Grenzwert $z \rightarrow 0$ unproblematisch und so können alle Graphen der Störungsreihe ausgewertet werden. Mit $\lim_{z \rightarrow 0} {}_z\phi_R = {}_0\phi_R =: {}_0\phi$ und $L := \ln(\frac{u}{s})$ ergibt sich für die einzelnen Graphen:

1. Ordnung: ${}_0\phi(\bullet^1) = L$

2. Ordnung: ${}_0\phi(\bullet^2) = L$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet^1 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{2}L^2$

3. Ordnung: ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet^2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{2}L^2$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet_1 \bullet_1 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{3}(L^3 + \pi^2 L)$

${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^2 \\ \bullet^1 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{2}L^2$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet_1 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{6}(L^3 + \pi^2 L)$

4. Ordnung: ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^2 \\ \bullet^2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{2}L^2$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet_1 \bullet_2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{3}(L^3 + \pi^2 L)$

${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^2 \\ \bullet_1 \bullet_1 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{3}(L^3 + \frac{\pi^2}{4}L)$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet_1^2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{6}(L^3 + \pi^2 L)$

${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^2 \\ \bullet_1^2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{6}(L^3 + \frac{\pi^2}{4}L)$ ${}_0\phi(\begin{smallmatrix} \bullet^1 \\ \bullet_2 \end{smallmatrix}) = \frac{1}{6}(L^3 + \pi^2 L)$

$${}_0\phi(\text{diagram 1}) = \frac{1}{8}(L^4 + 2\pi^2 L^2) \quad {}_0\phi(\text{diagram 2}) = \frac{1}{12}(L^4 + 4\pi^2 L^2)$$

$${}_0\phi(\text{diagram 3}) = \frac{1}{24}(L^4 + 4\pi^2 L^2) .$$

Im Allgemeinen ist es so, dass die einzelnen Bäume alle Ordnungen in L liefern, die kleiner oder gleich der Anzahl ihrer Vertices sind. Bei obigen Graphen fällt jedoch auf, dass teilweise einige Ordnungen in L verschwinden. So gibt es z.B. unter den obigen Bäumen keinen einzigen Baum mit drei Vertices, der einen Term $\propto L^2$ liefert. Dies liegt an den speziellen, hier gewählten Spielzeug-Feynman-Regeln.

Insgesamt ergibt sich somit für die renormierte Dyson-Schwinger-Gleichung:

$$\begin{aligned} {}_0\phi(X(\alpha)) = & 1 + \alpha L + \alpha^2(L^2 + L) + \alpha^3(L^3 + \frac{5}{2}L^2 + \pi^2 L) \\ & + \alpha^4(L^4 + \frac{13}{3}L^3 + (3\pi^2 + \frac{3}{2})L^2 + \frac{17}{6}\pi^2 L) + \mathcal{O}(\alpha^5) . \end{aligned}$$

3.4 System von Dyson-Schwinger-Gleichungen

Nachdem im vorherigen Unterkapitel untersucht wurde wie Dyson-Schwinger-Gleichungen berechnet und renormiert werden können, wird in diesem Abschnitt ein System von DSGn betrachtet. Dabei handelt es sich um das folgende System, welches [12] entnommen wurde:

$$X_1(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha[B_+^a(X_3 X_1) + B_+^b(X_2^2)]$$

$$X_2(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+^c(X_2^2)$$

$$X_3(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+^d(X_3^2) .$$

Die in diesen Störungsreihen vorkommenden Bäume sind Elemente der Hopf-Algebra der mit a, b, c oder d dekorierten Bäume, die mit H_D bezeichnet wird. [1]

Als Spielzeug-Feynman-Regeln werden gewissermaßen die gleichen Regeln verwendet wie in 3.3.2:

$${}_z\phi_s \circ B_+^{(a)}(t) := \int_0^\infty \frac{dx x^{-z}}{x+s} {}_z\phi_x(t), \quad {}_z\phi_s \circ B_+^{(b)}(t) := \int_0^\infty \frac{dx x^{1-z}}{x^2+s^2} {}_z\phi_x(t) \quad .$$

Um das Problem möglichst einfach zu halten, wird außerdem gewählt:

$${}_z\phi_s \circ B_+^{(c)} := 2 \cdot {}_z\phi_s \circ B_+^{(a)} \quad .$$

Die Feynman-Regel für B_+^d ist hingegen unbekannt, weshalb eine andere Möglichkeit für die Auswertung von X_3 gefunden werden muss.

3.4.1 Berechnung der Störungsreihen

Die einzelnen Gleichungen werden bis zur 3. Ordnung in α berechnet.

Die Störungsreihen von $X_2(\alpha)$ und $X_3(\alpha)$ lassen sich durch iteratives Einsetzen berechnen:

$$\begin{aligned} X_2(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha a_2^1 + \alpha^2 a_2^2 + \alpha^3 a_2^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \\ &= \mathbb{I} + \alpha \bullet^c + 2\alpha^2 \begin{array}{c} \bullet^c \\ \bullet^c \\ \bullet^c \end{array} + \alpha^3 (4 \begin{array}{c} \bullet^c \\ \bullet^c \\ \bullet^c \\ \bullet^c \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^c \\ \bullet^c \\ \bullet^c \end{array}) + \mathcal{O}(\alpha^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha a_3^1 + \alpha^2 a_3^2 + \alpha^3 a_3^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \\ &= \mathbb{I} + \alpha \bullet^d + 2\alpha^2 \begin{array}{c} \bullet^d \\ \bullet^d \\ \bullet^d \end{array} + \alpha^3 (4 \begin{array}{c} \bullet^d \\ \bullet^d \\ \bullet^d \\ \bullet^d \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^d \\ \bullet^d \\ \bullet^d \end{array}) + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist a_i^j der zur j. Ordnung gehörende Koeffizient der i. Gleichung.

Die Berechnung von $X_1(\alpha)$ gestaltet sich etwas schwieriger. Zunächst werden das Produkt aus X_1 und X_3 , sowie $(X_2)^2$ bis zur 2. Ordnung betrachtet:

$$\begin{aligned} X_3 X_1 &= \mathbb{I} + \alpha(a_1^1 + a_3^1) + \alpha^2(a_1^2 + a_3^2 + a_3^1 a_1^1) + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ (X_2)^2 &= \mathbb{I} + 2\alpha a_2^1 + \alpha^2(2a_2^2 + (a_2^1)^2) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad . \end{aligned}$$

Damit können die einzelnen Koeffizienten iterativ berechnet werden:

$$a_1^1 = B_+^a(\mathbb{I}) + B_+^b(\mathbb{I}) \\ = \bullet^a + \bullet^b$$

$$a_1^2 = B_+^a(a_1^1 + a_3^1) + B_+^b(2a_2^1) \\ = \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_a \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_b \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_d \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet^b \\ \bullet_c \end{array}$$

$$a_1^3 = B_+^a(a_1^2 + a_3^2 + a_3^1 a_1^1) + B_+^b(2a_2^2 + (a_2^1)^2) \\ = \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_a \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_b \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_d \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_c \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_d \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_a \bullet_d \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^a \\ \bullet_b \bullet_d \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet^b \\ \bullet_c \end{array} + \begin{array}{c} \bullet^b \\ \bullet_c \bullet_c \end{array} .$$

3.4.2 Renormiertes System

Die Auswertung von $X_2(\alpha)$ ist ohne weitere Betrachtungen möglich. Dabei wird wie in 3.3 vorgegangen. Es ergibt sich:

$${}_0\phi(X_2(\alpha)) = c_2^0 + \alpha c_2^1 + \alpha^2 c_2^2 + \alpha^3 c_2^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \\ = 1 + 2\alpha L + 4\alpha^2 L^2 + \alpha^3(8L^3 + 8\pi^2 L) + \mathcal{O}(\alpha^4), \\ \text{mit } c_i^j := {}_0\phi(a_i^j) .$$

Für die Auswertung der beiden anderen DSGn sind allerdings einige Vorüberlegungen notwendig:

Laut [14] bilden die Koeffizienten a_n einer DSG der Form, wie sie in 3.2.1 gegeben ist, eine *Sub-Hopf-Algebra*. Eine *Sub-Hopf-Algebra* ist ein Unterraum einer Hopf-Algebra, der eine Hopf-Algebra-Struktur aufweist und insbesondere unter Produkt, Koprodukt und Antipode abgeschlossen ist. Ist also J eine Sub-Hopf-Algebra von H_D , so muss für das Koprodukt gelten: $\Delta(J) \subseteq J \otimes J$. [2]

Demnach müssen die Koeffizienten von X_2 und X_3 jeweils eine Sub-Hopf-Algebra von H_D bilden. (siehe auch [1])

Im Gegensatz dazu bilden die Koeffizienten von X_1 keine Sub-Hopf-Algebra! Dies lässt sich bereits beim zweiten Koeffizienten a_1^2 beim reduzierten Ko-

produkt sehen:

$$\begin{aligned}\Delta'(a_1^2) &= (\bullet^a + \bullet^b + \bullet^d) \otimes \bullet^a + 2\bullet^c \otimes \bullet^b \\ &= (a_1^1 + a_3^1) \otimes \bullet^a + 2a_2^1 \otimes \bullet^b .\end{aligned}$$

Offensichtlich ist es so, dass die Koeffizienten von X_1 alleine keine Sub-Hopf-Algebra bilden könnten. Es werden in jedem Fall auch die Koeffizienten von X_2 und X_3 benötigt. Da jedoch \bullet^a und \bullet^b als einzelne Koeffizienten weder in X_1 , X_2 , noch in X_3 vorkommen, können die Koeffizienten dieser drei Gleichungen zusammen keine Sub-Hopf-Algebra bilden.

Das Problem kann behoben werden, indem dem System eine zusätzliche Symmetrie gegeben wird: $X_3X_1 = (X_2)^2$. [12]

In diesem Fall vereinfacht sich X_1 zu $X_1(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha(B_+^a + B_+^b)((X_2)^2)$ und mit $\Delta(B_+(t)) = B_+(t) \otimes \mathbb{I} + (id \otimes B_+)\Delta(t)$ lässt sich zeigen, dass somit die Koeffizienten aus X_1 und X_2 gemeinsam eine Sub-Hopf-Algebra von H_D bilden. Dabei ist $\sum_{l=0}^j a_2^l a_2^{j-l}$ der Koeffizient aus $(X_2)^2$ zur j . Ordnung in α . [1]

Beweis:

Sei $\mathfrak{C}(a_2^n)$ die Menge der zulässigen Schnitte eines Koeffizienten a_2^n von X_2 mit Elementen c_n . Dann sind $P^{c_n}(a_2^n)$ und $R^{c_n}(a_2^n)$ ebenfalls Koeffizienten von X_2 , da die Koeffizienten von X_2 eine Sub-Hopf-Algebra bilden. Folglich müssen alle $\sum_{l=0}^j P^{c_l}(a_2^l)P^{c_{j-l}}(a_2^{j-l})$ Koeffizienten aus $(X_2)^2$ und alle $(B_+^a + B_+^b) \sum_{l=0}^j (R^{c_l}(a_2^l)R^{c_{j-l}}(a_2^{j-l}))$ Koeffizienten aus X_1 sein.

Laut [11] gilt:

$$\Delta(a_2^l a_2^{j-l}) = \sum_{c_l \in \mathfrak{C}(a_2^l), c_{j-l} \in \mathfrak{C}(a_2^{j-l})} P^{c_l}(a_2^l)P^{c_{j-l}}(a_2^{j-l}) \otimes R^{c_l}(a_2^l)R^{c_{j-l}}(a_2^{j-l}) .$$

Wird darüber die Summe $\sum_{l=0}^j$ genommen und $(id \otimes (B_+^a + B_+^b))$ darauf angewendet, so ergibt sich:

$$(id \otimes (B_+^a + B_+^b))\Delta\left(\sum_{l=0}^j a_2^l a_2^{j-l}\right) = \Delta(a_1^{j+1}) - a_1^{j+1} \otimes \mathbb{I} ,$$

da $\forall j \geq 0 : a^{j+1} = (B_+^a + B_+^b)(\sum_{l=0}^j a_2^l a_2^{j-l})$.

□

Mit Zuhilfenahme der Symmetrie $X_3X_1 = (X_2)^2$ lassen sich auch X_1 und X_3 auswerten. Für die Auswertung von X_1 wird ausgenutzt, dass in diesem Fall $X_1(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha(B_+^a + B_+^b)((X_2)^2)$ gilt.

Es ergibt sich:

$$X_1(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha(\bullet^a + \bullet^b) + 2\alpha^2(\bullet_c^a + \bullet_c^b) + \alpha^3(4\bullet_c^a + 4\bullet_c^b + \bullet_c^a \bullet_c^b + \bullet_c^b \bullet_c^a) + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

und somit:

$$\begin{aligned} {}_0\phi(X_1) &= c_1^0 + \alpha c_1^1 + \alpha^2 c_1^2 + \alpha^3 c_1^3 + \mathcal{O}(\alpha^4) \\ &= 1 + 2\alpha L + 4\alpha^2 L^2 + \alpha^3(8L^3 + 5\pi^2 L) + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad . \end{aligned}$$

Wird $X_3X_1 = (X_2)^2$ in den einzelnen Ordnungen in α betrachtet, so ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten aus X_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{1. Ordnung:} \quad c_3^1 &= 2c_2^1 - c_1^1 \\ &= 2L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2. Ordnung:} \quad c_3^2 &= 2c_2^2 + (c_2^1)^2 - c_1^1 c_3^1 - c_1^2 \\ &= 4L^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3. Ordnung:} \quad c_3^3 &= 2c_2^3 + 2c_2^1 c_2^2 - c_1^1 c_3^2 - c_1^2 c_3^1 - c_1^3 \\ &= 8L^3 + 11\pi^2 L \end{aligned}$$

Damit ist das gesamte DSG-System bis zur 3.Ordnung in α gelöst.

3.5 Renormierungsgruppen-Gleichung

In diesem Unterkapitel wird für die Gleichungen des in 3.4 gelösten DSG-Systems eine *Renormierungsgruppen-Gleichung* gesucht. Für die Renormierung des Spielzeugmodells musste die zusätzliche Konstante u eingeführt werden. Dabei war u vollkommen beliebig. Die Ergebnisse, die das Spielzeugmodell liefert, sollten also unabhängig von der Wahl von u sein. Ein anderes u führt jedoch zu einem anderen L . Dies wird durch Modifikation von α korrigiert. Eine Theorie, wie das hier gewählte Spielzeugmodell, wird also durch

eine Äquivalenzklasse von Paaren (α, L) parametrisiert, wobei die Parameter u und L in gewisser Weise voneinander abhängig sind. In der Praxis ist es irrelevant welches Paar aus dieser Äquivalenzklasse gewählt wird. Die Menge dieser Paare bildet gemeinsam mit einer Abbildung, die ein Paar auf ein anderes Paar aus dieser Äquivalenzklasse abbildet, eine algebraische Struktur, die als *Renormierungsgruppe* bezeichnet wird. Diese ist mathematisch eigentlich nur eine sogenannte *Halbgruppe*, also eine Gruppe ohne inverse Elemente. [6]

Eine *Renormierungsgruppen-Gleichung* ist eine Differentialgleichung, welche die partiellen Ableitungen einer Greenschen Funktion nach den Parametern L und α zueinander in Beziehung setzt. Damit beschreibt sie gewissermaßen auch eine Beziehung zwischen den beiden Parametern. [9]

Eine Greensche Funktion kann demnach sowohl aus einer DSG, als auch aus der zugehörigen RGG bestimmt werden, indem diese partielle Differentialgleichung gelöst wird.

3.5.1 Herleitung

Für die Herleitung der gesuchten Renormierungsgruppen-Gleichung werden einige Vorbetrachtungen benötigt:

$G_i(\alpha, L) := {}_0\phi(X_i)$ für $i = 1, 2, 3$ ist eine Greensche Funktion.

$\gamma := \partial_0 \circ {}_0\phi$ mit $\partial_0 := \frac{\partial}{\partial L} \Big|_{L=0}$ heißt *anormale Dimension*. [2]

Laut [2] gilt außerdem:

$${}_0\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n \gamma^{\star n}}{n!} =: \exp_{\star}(L \cdot \gamma) \quad ,$$

wobei es sich um die Exponentialfunktion bezüglich des Faltungsproduktes handelt.

Für die Ableitung nach L ergibt sich demnach:

$$\frac{\partial}{\partial L} \exp_{\star}(L \cdot \gamma) = \gamma \star \exp_{\star}(L \cdot \gamma) = \gamma \star {}_0\phi \quad . [2]$$

Für das Produkt zweier Störungsreihen aus Wurzelbäumen unter γ gilt:

$$\gamma(X_i X_j) = \gamma(X_i)\epsilon(X_j) + \epsilon(X_i)\gamma(X_j) \quad .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \gamma(X_i X_j) &= \partial_0({}_0\phi(X_i) \cdot {}_0\phi(X_j)) \\ &= (\partial_L G_i)_0 \phi(X_j)|_{L=0} + {}_0\phi(X_i)(\partial_L G_j)|_{L=0} \\ &= \gamma(X_i) \cdot 1 + 1 \cdot \gamma(X_j) \\ &= \gamma(X_i)\epsilon(X_j) + \epsilon(X_i)\gamma(X_j) \end{aligned}$$

□

Insbesondere gilt:

$$\gamma(X^n) = n\gamma(X) \quad .$$

Dies lässt sich mit vollständiger Induktion zeigen:

Beweis

Induktionsanfang: $n = 1$: klar!

Induktionsvoraussetzung: $\gamma(X^n) = n\gamma(X)$

Induktionsbehauptung: $\gamma(X^{n+1}) = (n+1)\gamma(X)$

$$\begin{aligned} \gamma(X^{n+1}) &= \gamma(X^n)\epsilon(X) + \epsilon(X^n)\gamma(X) \\ &= n\gamma(X) + \gamma(X) \\ &= (n+1)\gamma(X) \end{aligned}$$

□

Außerdem wird ein Ausdruck für das Koprodukt der Störungsreihen benötigt. Laut [15] gilt für alle $i = 1, 2, 3$:

$$\Delta(X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (X_i(\alpha))^{n+1} \otimes a_i^n \alpha^n \quad .$$

Damit kann die Renormierungsgruppen-Gleichung ähnlich wie in [2] hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L} G_i(\alpha, L) &= \frac{\partial}{\partial L} ({}_0\phi X_i(\alpha)) \\
&= \frac{\partial}{\partial L} [\exp_\star(L \cdot \gamma)](X_i(\alpha)) \\
&= (\gamma \star {}_0\phi)(X_i(\alpha)) \\
&= m \circ (\gamma \otimes {}_0\phi) \circ \Delta(X_i(\alpha)) \\
&= m \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(X_i^{n+1}) \otimes \alpha^n {}_0\phi(a_i^n) \right] \\
&= m \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \gamma(X_i) \otimes \alpha^n {}_0\phi(a_i^n) \right] \\
&= m \left[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(X_i) \otimes \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) \alpha^n {}_0\phi(a_i^n) \right] \\
&= \gamma(X_i) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) G_i(\alpha, L) .
\end{aligned}$$

Somit wurde die gesuchte Renormierungsgruppen-Gleichung gefunden:

$$\frac{\partial}{\partial L} G_i(\alpha, L) = \gamma(X_i) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) G_i(\alpha, L) .$$

3.5.2 Überprüfung des DSG-Systems

Abschließend wird die gefundene Renormierungsgruppen-Gleichung für die einzelnen DSGn des Systems überprüft.

zu X_1 :

$$\frac{\partial}{\partial L} G_1(\alpha, L) = 2\alpha + 8\alpha^2 L + \alpha^3(24L^2 + 5\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

$$\begin{aligned}
\gamma(X_1) \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 1 \right) G_1(\alpha, L) &= (2\alpha + 5\pi^2 \alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4)) (1 + 4\alpha L + 12\alpha^2 L^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)) \\
&= 2\alpha + 8\alpha^2 L + \alpha^3(24L^2 + 5\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)
\end{aligned}$$

zu X_2 :

$$\frac{\partial}{\partial L}G_2(\alpha, L) = 2\alpha + 8\alpha^2L + \alpha^3(24L^2 + 8\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

$$\begin{aligned}\gamma(X_2)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + 1\right)G_2(\alpha, L) &= (2\alpha + 8\pi^2\alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4))(1 + 4\alpha L + 12\alpha^2L^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)) \\ &= 2\alpha + 8\alpha^2L + \alpha^3(24L^2 + 8\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)\end{aligned}$$

zu X_3 :

$$\frac{\partial}{\partial L}G_3(\alpha, L) = 2\alpha + 8\alpha^2L + \alpha^3(24L^2 + 11\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

$$\begin{aligned}\gamma(X_3)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + 1\right)G_3(\alpha, L) &= (2\alpha + 11\pi^2\alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4))(1 + 4\alpha L + 12\alpha^2L^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)) \\ &= 2\alpha + 8\alpha^2L + \alpha^3(24L^2 + 11\pi^2) + \mathcal{O}(\alpha^4)\end{aligned}$$

Wie erwartet, erfüllen alle drei DSGn diese RGG in den betrachteten Ordnungen.

4 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zunächst die mathematischen Begriffe Hopf-Algebra und Hopf-Algebra von Wurzelbäumen eingeführt, nachdem die dafür notwendigen Grundlagen wiederholt bzw. neu eingeführt wurden. Anschließend wurde ein Spielzeugmodell für eine Quantenfeldtheorie untersucht. Im Zuge dessen wurden kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen beschrieben. Ein Beispiel einer solchen Gleichung wurde ausführlich vorgerechnet. Dabei wurden Spielzeug-Feynman-Regeln festgelegt und später die zugehörigen renormierten Feynman-Regeln gefunden. Somit wurde das Spielzeugmodell renormiert. Die Betrachtungen aus dieser Beispielrechnung wurden anschließend für die Untersuchung eines Systems von Dyson-Schwinger-Gleichungen genutzt. Dabei musste eine bestimmte Symmetrie des Systems angenommen werden, um eine Sub-Hopf-Algebra aller Koeffizienten der DSGn des Systems zu erhalten. Obwohl eine Feynman-Regel dabei von vornherein unbekannt war, konnte die betroffene Gleichung dennoch mithilfe dieser Symmetrieanahme ausgewertet werden. Die Herleitung und Prüfung einer Renormierungsgruppen-Gleichung für das betrachtete System bildeten den Abschluss dieser Arbeit.

Literatur

- [1] Dirk Kreimer, Dyson-Schwinger equations, Vorlesungsskript, 2013, <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~maphy/SkriptDSE.pdf>
- [2] Erik Panzer, Hopf-algebraic renormalization of Kreimer's toy model, 2012, arXiv:1202.3552v1 [math.QA]
- [3] Christian Kassel, Quantum Groups, Springer-Verlag, 1995
- [4] Gerd Fischer, Lineare Algebra, Vieweg+Teubner, 17. Auflage, 2010
- [5] Li Guo, Algebraic Birkhoff Decomposition and its applications, 2008, arXiv:0807.2266 [math.RA]
- [6] Bertrand Delamotte, A hint of renormalization, 2003, arXiv:hep-th/0212049v3
- [7] Anthony Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press, Second Edition, 2010
- [8] David McMahon, Quantum Field Theory Demystified - A Self-teaching Guide, McGraw-Hill Companies, 2008
- [9] Ashok Das, Lectures On Quantum Field Theory, World Scientific Publishing, Reprint 2010
- [10] Bettina Grauel, Dyson-Schwinger-Gleichungen und die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen Eine Einführung, Bachelorarbeit, 2011, <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/grauel.pdf>
- [11] Martin Lüders, Baumfakultäten und kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen, Bachelorarbeit, 2011, <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/lueders.pdf>
- [12] Dirk Kreimer, Anatomy of a gauge theory, Annals of Physics, Volume 321, Issue 12, December 2006, Elsevier
- [13] Heiko Lacker, Einführung in die Kern- und Teilchenphysik, Vorlesung an der Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2013

- [14] Christoph Bergbauer, Dirk Kreimer, Hopf algebras in renormalization theory: Locality and Dyson-Schwinger equations from Hochschild cohomology, 2006, arXiv:hep-th/0506190v2
- [15] Loic Foissy, Faà di Bruno subalgebras of the Hopf algebra of planar trees from combinatorial Dyson-Schwinger equations, 2007, arXiv:0707.1204v2 [math.RA]
- [16] Loic Foissy, An introduction to Hopf algebras of trees, Preprint, <http://loic.foissy.free.fr/pageperso/preprint3.pdf>
- [17] Marko Roczen, Helmut Wolter, Lineare Algebra individuell, Online-Fassung, Band 2, Kapitel 4, 2005, <http://www.math.hu-berlin.de/roczen/papers/tensor.pdf>
- [18] Tom Leighton, Ronitt Rubinfeld, Graph Theory, Lecture Notes, 2006, <http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall06/cos341/handouts/graph1.pdf>
- [19] Franz Schwabl, Quantenmechanik für Fortgeschrittene, Springer-Verlag, 5. Auflage, 2008

Die symbolischen Berechnungen in dieser Arbeit wurden mithilfe von *Wolfram Mathematica 8.0* durchgeführt.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit unter Beachtung der Prüfungsordnung selbstständig angefertigt und dabei keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe. Des Weiteren versichere ich, dass ich erstmalig eine Bachelorarbeit einreiche.

Berlin, den