

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
INSTITUT FÜR PHYSIK



Masterarbeit

*Algebren von Feynman-Graphen für
verschiedene Kopplungen*

*Feynman Graph Algebras for several
couplings*

eingereicht von: Lisa Laudan
geboren am: 22. August 1990 in Rüdersdorf
Betreuung: Prof. Dr. Dirk Kreimer
Dr. Christian Bogner
eingereicht am: 28. September 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	4
2.1	Mathematische Grundlagen	4
2.2	Graphentheorie	11
2.3	Feynman-Graphen	12
2.4	Hopf-Algebra von Feynman-Graphen	17
2.5	Dyson-Schwinger Gleichungen	18
3	Vorbereitung	23
3.1	Kombinatorische Dyson-Schwinger Gleichungen für die zugrundelie- gende Theorie	23
3.2	Koeffizienten-Form der Feynman-Graphen	26
4	Beispielrechnung	30
4.1	Feynman-Graphen des Edge-Typen X_5	30
4.2	Berechnung der Koprodukte	33
5	Zusammenfassung	39

Tabellenverzeichnis

1	Einschleifen-Feynman-Graphen für alle fünf Typen	29
2	Feynman-Graphen für den Edge-Typen X_5 bis zur 2. Schleifenordnung	31

1 Einleitung

Die Relativitätstheorie und die Quantentheorie zählen zu den wichtigsten Werkzeugen der modernen Physik. Beides sind erfolgreiche Theorien, welche allerdings einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich besitzen. Die klassische Mechanik beschreibt das Verhalten makroskopischer Körper richtig. Sie wird bei hohen Geschwindigkeiten durch die spezielle Relativitätstheorie ergänzt. Für die physikalische Beschreibung der Materie im atomaren Bereich bedurfte es der Erweiterung durch die Quantenmechanik. Diese wiederum kann die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen nicht beschreiben. Die Quantenfeldtheorie (QFT) verbindet die Relativitätstheorie und die Quantentheorie zu einer relativistischen Quantentheorie. Sie kombiniert klassische Feldtheorien und die Quantenmechanik und hat das Ziel neue Phänomene zu beschreiben. Je nach zu beobachtenden Phänomenen ergeben sich unterschiedliche Theorien. So handelt es sich bei der Quantenelektrodynamik (QED) um eine relativistische Quantenfeldtheorie der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die Theorie der starken Wechselwirkung. Die Yukawa-Theorie beschreibt die Wechselwirkung zwischen Nukleonen, während die φ^4 -Theorie ein selbstwechselwirkendes, skalares, reelles Feld beschreibt. Siehe [1], [2] oder [3] für ausführliche Informationen zur Quantenfeldtheorie.

Berechnungen von physikalischen Größen, wie Streuquerschnitten oder Teilchenmassen, sind oft sehr aufwändig. In der Quantenfeldtheorie lassen sich Probleme selten analytisch ohne Vereinfachung lösen, weshalb sich Näherungsmethoden wie beispielsweise Störungsrechnungen etabliert haben.

Eine der bekanntesten Näherungsverfahren ist die Störungstheorie, bei der eine Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten erfolgt. Sie liefert gute Übereinstimmungen für die QED, ist jedoch für starke Kopplungen, wie die QCD nur eingeschränkt brauchbar [4].

In der Quantenfeldtheorie wechselwirken Teilchen auf verschiedene Weisen miteinander. Die möglichen Konstellationen der Wechselwirkungen werden durch Feynman-Graphen der Theorie beschrieben. Die Feynman-Graphen oder auch Feynman-Diagramme stellen ein wichtiges Werkzeug zur Quantenfeldtheorie dar, denn mit ihrer Hilfe lassen sich alle Terme der störungstheoretischen S-Matrix kombinieren und berechnen.

Mithilfe der Streumatrix, der Gell-Mann-Low-Formel und dem Wickschen Theorem lassen sich Greensche Funktionen darstellen. Diese spielen eine zentrale Rolle, da sie alle physikalischen Informationen enthalten. Greensche Funktionen einer Quantenfeldtheorie werden entwickelt als eine Reihe der Kopplungskonstanten, welche durch die Menge von Feynman-Graphen induziert werden.

Bei der Beschreibung der Wechselwirkung von Teilchen in der Quantenfeldtheorie treten oft Divergenzen auf. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Energie und Impuls von einem Teilchen auf ein anderes zu übertragen. Diese Divergenzen oder Unendlichkeiten sind auf eine unendliche Selbstenergie zurückzuführen. Diese werden in Feynman-Graphen als Schleifen dargestellt und man spricht von Feynman-Graphen höherer Ordnung.

Das Problem der Divergenzen kann durch die Renormierung behoben werden. Ausführliche Informationen zur Renormierung können in [5], [6] nachgelesen werden.

Prof. Dr. Kreimer entdeckte, dass der Renormierungsprozess durch eine Hopf-Algebra beschrieben werden kann [7]. Er zeigte, dass die Renormierung einer Quantenfeldtheorie organisiert ist durch die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen, siehe [8], [9]. Zwischen der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen und der Hopf-Algebra von Feynman-Graphen bestehen bestimmte Beziehungen, die sich gegenseitig übertragen lassen. Die Hopf-Algebrastruktur kann aber auch direkt auf Feynman-Graphen formuliert werden [10]. \mathcal{H}_{FG} ist eine freie kommutative Algebra, erzeugt durch die Menge der Feynman-Graphen einer gegebenen Theorie. Eine Grundlage dieser Algebra ist gegeben durch die disjunkten Vereinigungen von Feynman-Graphen. Die Einheit (unit) eines leeren Graphen ist 1. Die Algebra wird gegeben durch ein koassoziatives Koproduct. Für jeden Feynman-Graphen Γ gilt

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma,$$

wobei die Summe über alle Familien von disjunkten Feynman-Subgraphen von Γ geht, die weder leer noch gleich Γ sind. Durch das Koproduct ist \mathcal{H}_{FG} eine Hopf-Algebra, graduiert durch die Anzahl der Loops (Schleifen).

Die Greenschen Funktionen stellen außerdem Lösungen der kombinatorischen Dyson-Schwinger Gleichungen dar, welche die Reihe der Feynman-Graphen liefern. Die Menge der Feynman-Graphen erzeugen eine Subalgebra, welche für bestimmte Formen der Dyson-Schwinger Gleichungen selbst eine Hopf-Algebra ist. Die Lösung einer kombinatorischen Dyson-Schwinger Gleichung enthält bestimmte Koeffizienten c_j^r , welche sich als Feynman-Graphen ausdrücken lassen.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass die Menge der Koeffizienten eine Hopf-Subalgebra von \mathcal{H}_{FG} erzeugt, indem die Koproducte der Algebra, welche eine Subalgebra von \mathcal{H}_{FG} ist, der folgenden Form unterliegen

$$\Delta(c_{\mathbf{k}}^{(i)}) = \sum_{\substack{l_1+m_1=k_1 \\ \dots \\ l_n+m_n=k_n}} Pol_{l_1,\dots,l_n}(\{c_{\dots}^{(s)}\}) \otimes c_{m_1,\dots,m_n}^{(i)}.$$

Der Frage und das damit verbundene Ziel, ob die graduierte Subalgebra Hopf ist oder nicht, wird beispielsweise in [11], [12] nachgegangen.

Nachdem in der Einleitung einige Informationen über die Thematik gegeben wurden, sollen im nächsten Kapitel die grundlegenden Begriffe erläutert werden. Es werden zunächst die *mathematischen Grundlagen*, vom Begriff einer Gruppe bis hin zur Definition einer Hopf-Algebra, behandelt (siehe [13], [14]). Im Anschluss werden die grundlegenden Informationen der *Graphentheorie* (siehe [15], [16]) beleuchtet, welche für ein Verständnis des Aufbaus der Feynman-Graphen von Bedeutung sind. Nachdem *Feynman-Graphen* (siehe [16], [17]), sowie deren Sub- und Kographen und einige Beispiele dazu betrachtet wurden, wollen wir im Anschluss die *Hopf-Algebra von Feynman-Graphen* behandeln und auch hierfür ein Beispiel geben [18], [16], [19]. Es schließt sich eine ausführliche Betrachtung kombinatorischer *Dyson-Schwinger Gleichungen* an, siehe [20].

Das dritte Kapitel dient der *Vorbereitung* unserer Beispielrechnung. Hier werden zunächst die *kombinatorischen Dyson-Schwinger Gleichungen für die zugrundeliegende Theorie* aufgestellt. Als nächstes wird die *Koeffizienten-Form der Feynman-Graphen* eingeführt sowie einige Beispiele gegeben. Für unsere *Beispielrechnung* in Kapitel 4 ist es zunächst notwendig, alle Feynman-Graphen des zu betrachtenden Edge-Typen zu finden, um anschließend die Koprodukte zu berechnen. Durch die Übertragung der Feynman-Graphen in Koeffizienten-Form lässt sich nun überprüfen, ob die Koeffizienten eine Subalgebra erzeugen.

2 Grundlagen

2.1 Mathematische Grundlagen

Im Folgenden sollen zunächst die mathematisch relevanten Begriffe erläutert werden. Dafür werden zu Beginn die wesentlichen Begriffe der linearen Algebra definiert. Anschließend wollen wir Stück für Stück an den Begriff der Hopf-Algebra herantreten.

Definition 1 (Gruppe). Sei G eine Menge und $*$ eine Verknüpfung, dann heißt $(G, *)$ eine *Gruppe*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) Es gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz).
- (ii) Es existiert ein $e \in G$, sodass gilt $e * a = a$ für alle $a \in G$. Das Element e wird *neutrales Element* genannt.
- (iii) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ mit $a' * a = e$. Das Element a' heißt *inverses Element* von a .

Gilt außerdem das Kommutativgesetz $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, so heißt die Gruppe G *abelsch* (oder kommutativ).

Bemerkung 1. Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.

Das inverse Element a' ist für jedes $a \in G$ eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft $a \cdot a' = e$ für alle $a \in G$. Da das Inverse zu a eindeutig bestimmt ist, kann man es auch mit a^{-1} bezeichnen. Somit gilt:

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e, \quad (a^{-1})^{-1} = a, \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad \text{für alle } a, b \in G.$$

Definition 2 (Homomorphismus von Gruppen). Seien (G, \cdot) und (H, \odot) zwei Gruppen mit den Verknüpfungen \cdot und \odot . Eine Abbildung φ heißt *Homomorphismus von Gruppen*, wenn

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) \quad \text{für alle } a, b \in G.$$

Ein Homomorphismus heißt *Isomorphismus*, wenn er bijektiv ist.

Definition 3 (Ring). Sei R eine Menge mit der additiven Verknüpfung $+$

$$+ : R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

und der multiplikativen Verknüpfung \cdot

$$\cdot : R \times R \rightarrow R, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *Ring*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (ii) Die Multiplikation \cdot ist assoziativ.
- (iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{für alle } a, b, c \in R.$$

Ein Ring heißt *kommutativ*, wenn $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$. Ein Element $1 \in R$ heißt *Einselement*, wenn $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$.

Definition 4 (Körper). Sei K eine Menge mit der additiven Verknüpfung $+$

$$+ : K \times K \rightarrow K, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

und der multiplikativen Verknüpfung \cdot

$$\cdot : K \times K \rightarrow K, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0.
- (ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1.
- (iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{für alle } a, b, c \in K.$$

Definition 5 (Vektorraum). Sei K ein Körper und V eine Menge. Sei weiterhin

$$\dot{+} : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v \dot{+} w$$

eine innere Verknüpfung (Addition) und

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

eine äußere Verknüpfung (skalare Multiplikation). Dann heißt $(K, \dot{+}, \cdot)$ *Vektorraum über K* oder *K -Vektorraum*, wenn folgendes gilt:

- (i) $(V, \dot{+})$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0 (*Nullvektor*) und dem Negativen $-v$.
- (ii) Für die skalare Multiplikation müssen die folgenden Eigenschaften für alle

$\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$ erfüllt sein:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \\ \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) &= (\lambda\mu) \cdot v, \\ 1 \cdot v &= v.\end{aligned}$$

Definition 6 (Homomorphismus). Eine Abbildung $F : V \rightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V und W heißt linear (genauer K -linear oder Homomorphismus von K -Vektorräumen), wenn die nachfolgenden Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned}F(v + w) &= F(v) + F(w), \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v),\end{aligned}$$

für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in K$. Aus den beiden Bedingungen folgt:

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$$

für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$.

Eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ heißt

Isomorphismus, wenn F bijektiv ist,

Endomorphismus, wenn $V = W$,

Automorphismus, wenn $V = W$ und F bijektiv ist.

Definition 7 (Algebra). Sei A ein K -Vektorraum. Sei m eine bilineare Verknüpfung

$$m : A \times A \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto m(a, b) =: a \cdot b.$$

Dann heißt (A, m) *K-Algebra* oder *Algebra über K* , wenn für alle $x, y, z \in A$ und alle $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ \lambda \odot (x \cdot y) &= (\lambda \odot x) \cdot y = x \cdot (\lambda \odot y).\end{aligned}$$

Gilt weiterhin für alle $x, y, z \in A$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

dann ist die K -Algebra assoziativ und wir sprechen von einer *assoziativen K -Algebra*.

Wir können die Algebra auch als Ring definieren. Eine Algebra ist ein Ring A zusammen mit einer Ringabbildung $\eta_A : K \rightarrow A$, dessen Bild im Zentrum von A enthalten ist. Die Abbildung $(\lambda, a) \mapsto \eta_A(\lambda)a$ von $K \times A$ bis A rüstet A mit einer Vektorraumstruktur über K aus und die multiplikative Abbildung $\mu_A : A \times A \rightarrow A$ ist bilinear.

Definition 8 (Morphismus von Algebren). Ein *Morphismus von Algebren* oder ein *Algebromorphismus* ist eine Ringabbildung $f : A \rightarrow B$, sodass

$$f \circ \eta_A = \eta_B.$$

Die lineare Abbildung $\eta_A : k \rightarrow A$ ist ein Morphismus von Algebren. Wenn $i : A \rightarrow B$ ein injektiver Algebromorphismus ist, dann sagt man, dass A eine *Subalgebra* von der Algebra B ist.

Wir können die assoziative K -Algebra auch über zwei lineare Abbildungen definieren.

Definition 9 (assoziative K -Algebra). Sei A ein K -Vektorraum und seien m und u zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} m : A \times_k A &\rightarrow A && \text{(Multiplikation),} \\ u : k &\rightarrow A && \text{(Eins).} \end{aligned}$$

Dann heißt (A, m, u) *assoziative K -Algebra*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} m \circ (id \otimes m) &= m \circ (m \otimes id), \\ m \circ (u \otimes id) &= m \circ (id \otimes u). \end{aligned}$$

Definition 10 (graduierte Algebra). Eine Algebra A heißt *graduiert*, wenn es Unterräume (A_i) mit $i \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \text{ und } A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Die Elemente von A_i gelten als homogen vom Grad i .

Definition 11 (Koalgebra). Sei C ein K -Vektorraum und seien Δ und ϵ zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \Delta : C &\rightarrow C \otimes C && (\text{Koprodukt}), \\ \epsilon : C &\rightarrow K && (\text{Koeins}). \end{aligned}$$

Dann heißt (C, Δ, ϵ) k -Koalgebra, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Koassoziativität: $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

Das Viereck (*)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

kommutiert.

Koeins: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta$

Das Diagramm (**)

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & A \\ & \xleftarrow{id \otimes \Delta} & & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & \\ & & \uparrow \Delta & & \\ C & & C & & \\ & \cong & & \cong & \end{array}$$

kommutiert.

Die Abbildung Δ bezeichnet man als *Koprodukt*. Die Abbildung ϵ nennt sich *Koeins der Koalgebra*. Die Diagramme (*) und (**) besagen, dass das Koprodukt Δ koassoziativ und kounital ist.

Die Koalgebra C ist *kommutativ*, wenn weiterhin gilt, dass das Dreieck

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow & \searrow \\ C \otimes C & \xrightarrow{\tau_{C,C}} & C \otimes C \end{array}$$

kommutiert, wobei hier $\tau_{C,C}$ die Faktoren vertauscht: $\tau_{C,C} = (c \otimes c') = c' \otimes c$.

Definition 12 (Tensorprodukt). Seien V und W K -Vektorräume sowie

$$\eta : V \times W \rightarrow \underbrace{V \otimes W}_T$$

eine bilineare Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:

Ist

$$\xi : V \times W \rightarrow U$$

bilinear, dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$\xi' : V \otimes W \rightarrow U \text{ mit } \xi = \xi' \circ \eta,$$

d.h. für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\xi} & U \\ & \searrow \eta & \swarrow \xi' \\ & & T \end{array}$$

kommutiert.

(T, η) bzw. T heißt *Tensorprodukt von V und W über K* .

Satz 1 (Eigenschaften Tensorprodukt). Für alle $v \in V$ und $w \in W$ bestimmen wir $v \otimes w = \eta(v, w)$. Ist η bilinear, dann gelten die folgenden Beziehungen für $V \otimes W$:

$$\begin{aligned} (v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w, \\ v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w', \\ \lambda(v \otimes w) &= (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w), \end{aligned}$$

wobei $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$.

Jedes Element von $V \otimes W$ entspricht einer finiten Summe der Form

$$\sum_{i=1}^p v_i \otimes w_i,$$

wobei v_1, \dots, v_p zu V und w_1, \dots, w_p zu W gehören.

Den Beweis kann man [14] entnehmen.

Definition 13 (Tensorprodukt von Algebren). Seien A und B zwei Algebren. Wir können dem Tensorprodukt $A \otimes B$ eine Algebrastruktur geben, indem

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \tag{1}$$

wobei $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$.

$A \otimes B$ heißt *Tensorprodukt der Algebren A und B* mit der Einheit $1 \otimes 1$.

Man erhält die Algebromorphismen $i_A : A \rightarrow A \otimes B$ und $i_B : B \rightarrow A \otimes B$, indem man $i_A(a) = a \otimes 1$ und $i_B(b) = 1 \otimes b$ definiert. Mit (1) ergibt sich die folgende Relation

$$i_A(a)i_B(b) = i_B(b)i_A(a) = a \otimes b$$

für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 14 (Tensoralgebra). Sei V ein Vektorraum. Wir definieren $T^0(V) = k, T^1(V) = V, T^n(V) = V^{\otimes n}$, wenn $n > 1$. Der kanonische Isomorphismus

$$T^n(V) \otimes T^m(V) \cong T^{n+m}(V)$$

induziert ein assoziatives Produkt auf dem Vektorraum $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$. $T(V)$ heißt *Tensoralgebra von V* , sofern es diese Algebrastruktur aufweist.

Um die Definition einer Bialgebra nachvollziehen zu können, benötigt man den Begriff der Koalgebra, denn eine Bialgebra ist ein Vektorraum H mit einer Algebrastruktur (H, μ, η) und einer Koalgebrastruktur $(H\Delta, \epsilon)$.

Satz 2. Wir geben $H \otimes H$ die induzierte Struktur des Tensorprodukts einer Algebra und einer Koalgebra. Die nachstehenden zwei Aussagen sind äquivalent.

- (i) Die Abbildungen μ und η sind Koalgebra-Morphismen.
- (ii) Die Abbildungen Δ und ϵ sind Algebra-Morphismen.

Der Beweis ist ebenfalls zu finden in [14].

Definition 15 (Bialgebra). Sei (H, μ, η) eine Algebra und $(H\Delta, \epsilon)$ eine Koalgebra, welche die gleichen Bedingungen aus Satz 2 überprüfen. Dann bezeichnet man $(H, \mu, \eta\Delta, \epsilon)$ als *Bialgebra*. Ein Bialgebromorphismus ist ein Morphismus der zugrundeliegenden Algebra- und Koalgebrastrukturen.

Definition 16 (primitive Elemente). Sei (C, Δ, ϵ) eine Koalgebra. Ein Element x von C ist primitiv, wenn gilt

$$x = 1 \otimes x + x \otimes 1.$$

Wir bezeichnen mit $Prim(C)$ den *Subraum aller primitiven Elemente von C* .

Um die Definition einer *Antipode* zu verstehen, muss man zunächst den mathematischen Operator, die sogenannte *Faltung (convolution)*, nachvollziehen.

Wir haben eine Algebra $(A, \mu\eta)$ und eine Koalgebra (C, Δ, ϵ) und können dann eine bilineare Abbildung, die Faltung (convolution), auf dem Vektorraum $Hom(C, A)$ aus linearen Abbildungen von C nach A definieren. Stellen f, g solche linearen Abbildungen dar, dann ist die *Faltung $f \star g$* die Zusammensetzung der Abbildungen

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A.$$

Definition 17 (Antipode). Sei $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ eine Bialgebra. Ein Endomorphismus S auf H wird als *Antipode* der Bialgebra H bezeichnet, wenn gilt

$$S \star id_H = id_H \star S = \eta \circ \epsilon.$$

Mit der Definition der Antipode sind nun alle nötigen Begriffe vorhanden um eine Hopf-Algebra zu definieren.

Definition 18 (Hopf-Algebra). Eine Hopf-Algebra ist eine Bialgebra mit einer Antipode.

Definition 19 (graduierte Hopf-Algebra). Eine graduierte Hopf-Algebra über einem Körper K ist eine graduierte K -Algebra $A \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ mit den zwei linearen Abbildungen $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ und $\epsilon : A \rightarrow K$, sodass gilt:

$$(\epsilon \otimes id)\Delta = id \quad \text{und} \quad (id \otimes \epsilon)\Delta = id.$$

Definition 20 (Hopf-Subalgebra). Eine Hopf-Subalgebra einer graduierten Hopf-Algebra $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$ $H = \oplus_i H_i$ ist ein Unterraum $H' \subset H$ mit einer Hopf-Algebrastruktur $(H', m, u, \Delta, \epsilon, S)$, sodass $H' = \oplus_i (H' \cap H_i)$ eine Graduierung auf H' gibt.

2.2 Graphentheorie

Da der Aufbau von Feynman-Graphen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielt, wollen wir in diesem Abschnitt die graphentheoretischen Begriffe definieren.

Definition 21 (Multigraph). Ein Multigraph G ist ein Paar V, E , wobei V die Vertexmenge und E die Multimenge der Edges mit den Elementen $e \in V \times V$ bezeichnet.

Die *Multimenge* ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Menge, bei der die Elemente mehrfach vorkommen können

Definition 22 (Graph). Ein *Graph* G ist ein geordnetes Paar von disjunkten Mengen (V, E) . E ist eine Teilmenge der Menge $V^{(2)}$ von ungeordneten Paaren von V . $V = V(G)$ bezeichnet die Menge der Vertizes (Knoten) von G und $E = E(G)$ die Menge der Edges (Kanten) von G .

Definition 23 (Edges und Vertizes). Ein Edge bzw. eine Kante $e = \{v_1, v_2\} \in E$ verbindet die Vertizes v_1 und v_2 . v_1 und v_2 sind die Endvertizes dieser Kante. Für jede Kante $e = \{v_1, v_2\} \in E$ sind die Vertizes v_1 und v_2 *benachbart* zueinander und

inzident zur Kante e . Eine Kante e wird als Selbstschleife (self-loop) bezeichnet, wenn $v_1 = v_2$.

Definition 24 (Wertigkeit). Die Anzahl der ankommenden Kanten in einem Vertex (Knotenpunkt) $v \in V$ wird als *Wertigkeit* (valency) von v bezeichnet.

Definition 25 (Isomorphismus). Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. Eine bijektive Abbildung $\phi : V \rightarrow V'$ heißt *Isomorphismus* zwischen G und G' , falls gilt: $v_1, v_2 \in E$ genau dann wenn $\phi(v_1)\phi(v_2) \in E'$.

Zwei Graphen heißen zueinander *isomorph*, falls es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Die Menge aller Isomorphismen eines Graphen auf sich selbst $\phi : G \rightarrow G$ ist die *Automorphismengruppe* ($Aut(G)$) von G .

Definition 26 (Subgraph). $G' = (V', E')$ ist ein Subgraph von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Wir suchen $G' \subseteq G$.

Definition 27 (Schleifenzahl (loop number)). Die *Schleifenzahl* (*loop number*) ist die Anzahl der unabhängigen Schleifen des Graphen G . Für die Schleifenanzahl l gilt

$$l = |E| - |V| + f_G,$$

wobei $|E|$ und $|V|$ die zugehörigen Mächtigkeiten der Mengen der Vertizes und Multimengen der Edges (Kanten) sind. f_G bezeichnet die Anzahl der verbundenen Komponenten des Graphen.

2.3 Feynman-Graphen

Feynman-Graphen sind graphische Darstellungen von Wechselwirkungen zwischen Teilchen. Sie kennzeichnen den Übergang vom Anfangs- zum Endzustand. Feynman-Graphen werden mit Linien bzw. Kanten, den sogenannten Edges und Wechselwirkungspunkten bzw. Knoten, den sogenannten Vertizes dargestellt. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Graphen, wie sie im vorherigen Kapitel definiert wurden, weisen Feynman-Graphen einige Besonderheiten auf. Die Edges und Vertizes der Feynman-Graphen sind normalerweise beschriftet und enthalten wichtige physikalische Informationen. An jedem Vertex gilt Energie- und Impulserhaltung. Feynman-Graphen sind aus einer bestimmten Menge von Edges und Vertizes aufgebaut, welche mit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_E \cup \mathcal{R}_V$ bezeichnet werden. Der Index E steht dabei für die Edges (Kanten) und V entsprechend für die Vertizes (Knoten). Die Mengen \mathcal{R}_E und \mathcal{R}_V sind gegeben durch die jeweilige Quantenfeldtheorie, welche wir betrachten.

Beispiel 1. Für die Quantenelektrodynamik (QED), die Quantenchromodynamik (QCD) und die φ^4 -Theorie ergeben sich die folgenden Mengen der Edges und Vertizes.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{QED}} &= \left\{ \text{---}, \text{~}, \text{~} \right\} \\ \mathcal{R}_{\text{QCD}} &= \left\{ \text{---}, \text{---}, \text{---}, \text{~}, \text{~}, \text{~}, \text{~} \right\} \\ \mathcal{R}_{\varphi^4} &= \left\{ \text{---}, \text{X} \right\}\end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir die Feynman-Graphen mit Γ bezeichnen. $\Gamma^{[0]}$ bezeichnet die Vertexmenge und $\Gamma^{[1]}$ steht für die Menge der Kanten. Man unterscheidet zwischen inneren und äußeren Kanten. Eine Kante, welche zwei Vertizes verbindet, wird als *innere Kante (internal edge)* bezeichnet. Innere Kanten bestehen also zwischen zwei Vertizes. Eine *äußere Kante (external edge)* liegt nur an einem Vertex an und wird auch als äußeres Bein (external leg) bezeichnet. Die äußeren Beine stellen beobachtbare Teilchen dar. Die inneren Linien sind virtuelle Teilchen, welche nicht beobachtet werden können.

Definition 28 (Vertexmenge V und Kantenmenge E). Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph mit der Vertexmenge V und der Kantenmultimenge E . Seien V und E disunkte Vereinigungen der Mengen und Multimengen $\Gamma_{int}^{[0]}$, $\Gamma_{ext}^{[0]}$, $\Gamma_{int}^{[1]}$ und $\Gamma_{ext}^{[1]}$ sodass gilt

$$V = \Gamma_{int}^{[0]} \cup \Gamma_{ext}^{[0]}$$

und

$$E = \Gamma_{int}^{[1]} \cup \Gamma_{ext}^{[1]}.$$

Wir bezeichnen die Vertizes in $\Gamma_{int}^{[0]}$ als innere Vertizes und $\Gamma_{ext}^{[0]}$ als äußere Vertizes. Die Kanten in $\Gamma_{int}^{[1]}$ werden als innere Kanten und die in $\Gamma_{ext}^{[1]}$ als äußere Kanten bezeichnet.

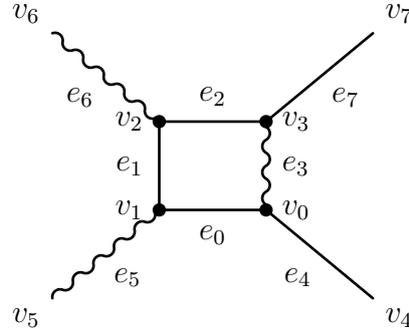
Definition 29 (Feynman-Graph). Ein Feynman-Graph $\Gamma = (G, \text{res})$ ist gegeben durch einen Multigraphen G und einer Abbildung res

$$\text{res} : \Gamma^{[0]} \cup \Gamma^{[1]} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{E}},$$

welcher jeder Kante und jedem Vertex in Γ ein Element der Menge der erlaubten Typen von Kanten und Vertizes zuordnet. Die Elemente $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ heißen erlaubte Residuen (Reste) der Theorie. Es gilt $\text{res}(\Gamma) = \Gamma$, wenn alle inneren Kanten zu einem

Punkt schwinden. Dann bezeichnet $\text{res}(\Gamma)$ das Residuum des Graphen und definiert seine äußere Struktur.

Beispiel 2 (one-loop Feynman-Graph).



Laut Definition 29 ergeben sich die folgenden Angaben für den obigen Graphen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{int}^{[0]} &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} & \Gamma_{ext}^{[0]} &= \{v_4, v_5, v_6, v_7\} \\ \Gamma_{int}^{[1]} &= \{e_0, e_1, e_2, e_3\} & \Gamma_{ext}^{[1]} &= \{e_4, e_5, e_6, e_7\} \end{aligned}$$

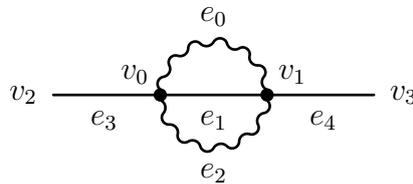
$$\begin{aligned} e_0 &= \{v_0, v_1\}, & e_4 &= \{v_0, v_4\} \\ e_1 &= \{v_1, v_2\}, & e_5 &= \{v_1, v_5\} \\ e_2 &= \{v_2, v_3\}, & e_6 &= \{v_2, v_6\} \\ e_3 &= \{v_3, v_0\}, & e_7 &= \{v_3, v_7\} \end{aligned}$$

$$\text{res}(e_3) = \text{res}(e_5) = \text{res}(e_6) = \sim$$

$$\text{res}(e_0) = \text{res}(e_1) = \text{res}(e_2) = \text{res}(e_4) = \text{res}(e_7) = \text{—}$$

$$\text{res}(v_0) = \text{res}(v_1) = \text{res}(v_2) = \text{res}(v_3) = \text{—} \bullet$$

Beispiel 3 (two-loop Feynman-Graph).



Für den Zweischleifen-Graphen erhält man:

$$\begin{aligned} \Gamma_{int}^{[0]} &= \{v_0, v_1\} & \Gamma_{ext}^{[0]} &= \{v_2, v_3\} \\ \Gamma_{int}^{[1]} &= \{e_0, e_1, e_2\} & \Gamma_{ext}^{[1]} &= \{e_3, e_4\} \end{aligned}$$

$$e_0 = e_1 = e_2 = \{v_0, v_1\}$$

$$e_3 = \{v_0, v_2\}, \quad e_4 = \{v_1, v_3\}$$

$$\begin{aligned}
res(e_0) = res(e_2) &= \sim \\
res(e_1) = res(e_3) = res(e_4) &= \text{---} \\
res(v_0) = res(v_1) &= \text{X}
\end{aligned}$$

Wir betrachten in dieser Arbeit nur bestimmte Graphen, die sogenannten Ein-Teilchen-irreduziblen Graphen.

Definition 30 (Ein-Teilchen-irreduzible Graphen (one-particle irreducible graphs - 1PI)). Ein verbundener Feynman-Graph wird als *Ein-Teilchen irreduzibel* (1PI) bezeichnet, wenn er nach Entfernen der inneren Kanten immer noch verbunden ist. Je nach Anzahl der äußeren Kanten bzw. Beine gibt es verschiedene Bezeichnungen für 1PI-Graphen:

- (i) Wenn Γ keine äußeren Beine besitzt, so nennt man ihn *Vakuumgraph*.
- (ii) Besitzt Γ ein äußeres Bein, so wird er *Tadpole* genannt.
- (iii) Einen Graph mit zwei äußeren Beinen bezeichnet man als *Propagator* oder als *Selbstenergiegraph* (self-energy graph).
- (iv) Bei mehr als drei äußeren Beinen wird der Graph als *Vertexgraph* bezeichnet.

Definition 31 (Subgraph oder Untergraph). Ein Graph $\gamma \subseteq \Gamma$ wird als Subgraph von Γ bezeichnet, wenn $\gamma_{int}^{[0]} \subseteq \Gamma_{int}^{[0]}$, $\gamma_{int}^{[1]} \subseteq \Gamma_{int}^{[1]}$ und jeder Vertex $v \in \gamma_{int}^{[0]} \subseteq \Gamma_{int}^{[0]}$ denselben Vertextypen in γ wie in Γ aufweist, d.h.

$$res_{\gamma}(v) = res_{\Gamma}(v).$$

Ein Subgraph ist nur durch seine inneren Edges und Vertizes gegeben.

Definition 32 (Kograph). Den *Kograph* Γ/γ erhält man, indem sich alle inneren Kanten von γ in Γ zu einem Punkt zusammenziehen, sodass die äußere Beinstruktur nicht betroffen ist, d.h.

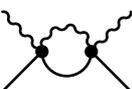
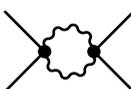
$$res(\Gamma/\gamma) = res(\Gamma).$$

Die Verknüpfung ”/” wird als *Kontraktion* bezeichnet.

Beispiel 4 (Kontraktion). Aus dem Graphen

$$\Gamma = \text{---} \text{---} \text{---}$$


können die folgenden Subgraphen

$$\gamma_1 = \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \text{---} \text{---} \text{---}$$



herausgeschnitten werden, sodass sich die nachstehenden Kographen

$$\Gamma/\gamma_1 = \text{---} \bullet \text{---}, \Gamma/\gamma_2 = \text{---} \bullet \text{---}$$

ergeben.

Die maximale Kontraktion Γ/Γ erhält man, indem sich alle inneren Kanten von Γ zusammenziehen, sodass nur ein innerer Vertex oder eine äußere Kante übrig bleibt. $\text{res}(\Gamma)$ bezeichnet den Vertex- oder Edge-Typen von der übrig gebliebenen Kante bzw. dem übrig gebliebenen Vertex.

Beispiel 5 (Residuen von Graphen).

$$\begin{aligned} \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) &= \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) = \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) = \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) &= \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) = \text{res} \left(\text{---} \bullet \text{---} \right) = \text{---} \bullet \text{---} \end{aligned}$$

Die Feynman-Regeln werden aus der Lagrangedichte der Quantenfeldtheorie abgeleitet und können anschließend in Feynman-Graphen überführt werden. Die Feynman-Regeln beschreiben die möglichen Wechselwirkungen der zugrundeliegenden Theorie, d.h. sie beschreiben, welche Vertizes und Edges möglich sind. Außerdem führen sie dazu, dass jeder Kante und jedem Vertex ein Gewicht zugeschrieben wird.

Beispiel 6 (Gewichte von Feynman-Graphen). In der Quantenelektrodynamik (QED) besitzen die Photonlinien oder Photonkanten das Gewicht 2, $w(\text{---}) = 2$, während die Fermionlinien Gewicht 1 aufweisen, $w(\text{---}) = 1$. Da die QED-Vertizes nicht von einem Impuls abhängig sind, ist ihr Gewicht stets 0, $w(\text{---}) = 0$.

In der φ^4 -Theorie haben alle Kanten ein Gewicht von 2, $w(\text{---}) = 2$, und alle Vertizes sind vom Gewicht 0.

Für den Symmetriefaktor von Feynman-Graphen gilt

$$\text{Symmetriefaktor} = \frac{1}{S} = \frac{1}{|\text{Symmetriegruppe}|},$$

wobei S die Mächtigkeit der Symmetriegruppe des Graphen beschreibt. Die Symmetriegruppe eines Graphen entspricht der Anzahl der Abbildungen des Graphen auf sich selbst, wenn die äußeren Beine festgehalten werden.

2.4 Hopf-Algebra von Feynman-Graphen

Mithilfe einer Hopf-Algebra kann man die Struktur von Feynman-Graphen und ihre Renormierung beschreiben. Die Menge der Feynman-Graphen bilden eine graduierte Hopf-Algebra (\mathcal{H}_{FG}). Wir können eine Hopf-Algebra durch ein Koproduct definieren

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma, \quad (2)$$

wobei die Summe über alle Vereinigungen von 1PI divergenten Subgraphen geht. Diese Definition kann auf Produkte von Graphen erweitert werden, sodass man eine Bialgebra erhält. Δ ist eine koassoziative Abbildung

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$$

und dadurch ist \mathcal{H} eine Bialgebra. Mit dem zusätzlichen Algebromorphismus, dem Koeins ϵ und der Antipode S wird \mathcal{H} zur Hopf-Algebra.

Das reduzierte Koproduct $\tilde{\Delta}$ ist definiert als

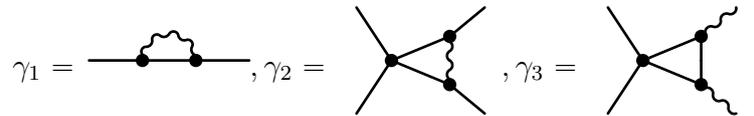
$$\tilde{\Delta} := \Delta - id \otimes 1 - 1 \otimes id \quad : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}.$$

In dieser Arbeit interessiert uns vor allem die Berechnungen der Koproducte.

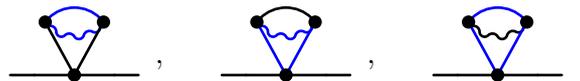
Beispiel 7 (Koproduct eines Feynman-Graphen). Wir wollen das Koproduct für den folgenden Graphen



berechnen. Es ergeben sich die folgenden drei Subgraphen



Diese haben wir zur Veranschaulichung hier noch einmal als blaue Linien des Ausgangsgraphen Γ dargestellt



Die passenden Kographen erhält man, indem man die zugehörigen Subgraphen,

welche blau markiert sind, ausschneidet bzw. zusammen zieht.

$$\Gamma/\gamma_1 = \Gamma/\gamma_2 = \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} \text{---},$$

$$\Gamma/\gamma_3 = \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---}.$$

Das Koproduct Δ ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \Delta \left(\text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \right) &= 1 \otimes \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes 1 \\ &+ \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} \text{---} \\ &+ \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} \text{---} \\ &+ \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---}. \end{aligned}$$

Für das reduzierte Koproduct $\tilde{\Delta}$ gilt dementsprechend

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} \left(\text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \right) &= \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} \text{---} \\ &+ \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} \text{---} \\ &+ \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---} \otimes \text{---} \overset{\text{blob}}{\bullet} \text{---}. \end{aligned}$$

2.5 Dyson-Schwinger Gleichungen

Dyson-Schwinger Gleichungen sind Relationen zwischen verschiedenen Greenschen Funktionen einer Quantenfeldtheorie. Greensche Funktionen, welche häufig mit G^r notiert werden, enthalten alle wichtigen physikalischen Informationen. Die Variable r steht dabei für die äußere Beinstruktur (external leg structure) und bestimmt die relevante Amplitude.

Beispiel 8 (QED-Vertex).

$$G \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} (p_1, p_2, \alpha) = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{blob} \quad (3)$$

Bei diesem Vertex-Typen gibt es drei äußere Beine, ein Photon und zwei Fermionen. Der entsprechende Vertex hängt von zwei Impulsen p_1 und p_2 und einer Kopplungskonstante α (Feinstrukturkonstante) ab.

Diese Funktionen können nur durch störungstheoretische (perturbative) Methoden (Gell-Mann-Low Formel) angenähert werden, welche die Kopplungskonstante berücksichtigen. Wegen ihrer Divergenzen können viele Terme nicht definiert werden und müssen deshalb renormiert werden. Wenn man die Divergenzen beheben kann und nur einige Amplituden renormiert werden müssen, dann spricht man auch von einer renormierbaren Quantenfeldtheorie und bezeichnet die Menge der Amplituden mit \mathcal{R} . Im obigen Beispiel gilt somit $r = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \in \mathcal{R}$ in QED.

Die Störungstheorie führte zum nicht-perturbativen Erfolg aufgrund der Selbstähnlichkeitseigenschaft von 'Blob'-Feynman-Graphen, wie der in (3) auf der rechten Seite. Diese Eigenschaft ergibt sich aus den unendlich wiederholenden Strahlungskorrekturen, welche in der Störungstheorie erforderlich sind. Um dies verständlich zu machen wollen wir zunächst ein einfaches Beispiel betrachten.

Beispiel 9 (Fermionpropagator in der Yukawa-Theorie). Man erhält die folgende Störungsreihe für das Blob-Diagramm, wenn man die Korrekturen nur auf die interne Fermionlinie bezieht.

$$\text{blob} = \text{line} + \text{line} \text{ blob} + \text{line} \text{ blob} \text{ blob} + \text{line} \text{ blob} \text{ blob} \text{ blob} + \dots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck kann nun in Feynman-Integrale überführt werden mit der Vorschrift

$$1 = \text{line}, \quad \int K = \text{line} \text{ blob}, \quad G = \text{blob}.$$

Mit dem Kernintegral K und der Greenschen Funktion G erhält man weiterhin

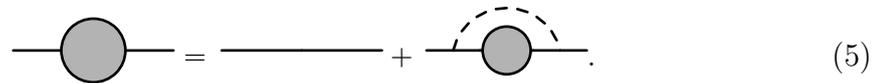
$$G = 1 + \int K + \int K \int K + \int K \int K \int K + \dots = 1 + \int K (1 + \int K + \int K \int K + \dots).$$

Da es sich bei dem Term in Klammern wieder um die Störungsreihe der Greenschen

Funktion handelt, kann man den Ausdruck als Integralgleichung zusammenfassen

$$G = 1 + \int KG.$$

Mithilfe der Blob-Diagramme lässt sich diese Gleichung wie folgt ausdrücken



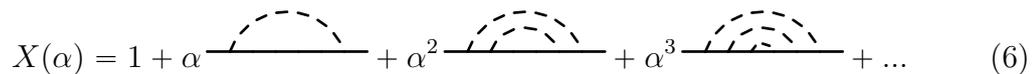
$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \frown \bigcirc \text{---} \quad (5)$$

Bezeichnet man den Integraloperator $\int KG$ mit \mathcal{I} , so erhält man eine Fixpunktgleichung

$$G = \mathcal{I}(G).$$

Fixpunktgleichungen von Greenschen Funktionen werden in der Quantenfeldtheorie als Dyson-Schwinger Gleichungen bezeichnet.

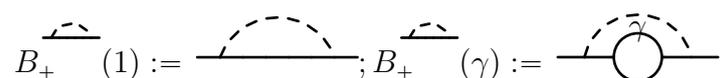
Wir wollen nun übergehen zu kombinatorischen Dyson-Schwinger Gleichungen und umschreiben die Störungsreihe aus (4) als formale Potenzreihe mit der Kopplungskonstanten α



$$X(\alpha) = 1 + \alpha \text{---} \frown \text{---} + \alpha^2 \text{---} \frown \frown \text{---} + \alpha^3 \text{---} \frown \frown \frown \text{---} + \dots \quad (6)$$

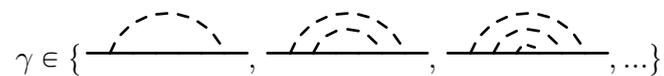
Es handelt sich hierbei um eine Potenzreihe mit Feynman-Graphen als Koeffizienten. Es stellt sich heraus, dass diese Menge zusätzlich algebraische Strukturen aufweist. Tatsächlich lässt sich eine Hopf-Algebra von Feynman-Graphen betrachten.

Definiert man den linearen Einfügeoperator (insertion operator)



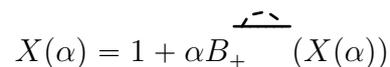
$$B_+ \text{---} \frown \text{---} (1) := \text{---} \frown \text{---}; B_+ \text{---} \frown \text{---} (\gamma) := \text{---} \bigcirc \text{---}$$

und fügt den Graphen



$$\gamma \in \{ \text{---} \frown \text{---}, \text{---} \frown \frown \text{---}, \text{---} \frown \frown \frown \text{---}, \dots \}$$

in die Fermionlinie ein, dann lässt sich die Dyson-Schwinger Gleichung aus (5) in der Form



$$X(\alpha) = 1 + \alpha B_+ \text{---} \frown \text{---} (X(\alpha))$$

ausdrücken.

Es handelt sich hierbei um eine Fixpunktgleichung im Raum der formalen Potenzreihe $\mathcal{H}[\alpha]$ mit der Lösung (6). Gleichungen von dieser Form bezeichnen wir

als *kombinatorische Dyson-Schwinger Gleichungen*, sie unterscheiden sich von den analytischen Dyson-Schwinger Gleichungen, welche mit Integraloperatoren wie in (2.5) formuliert werden.

Die Lösung einer kombinatorischen Dyson-Schwinger Gleichungen für eine Amplitude r besitzt die allgemeine Form

$$X^r(\alpha) = 1 + \operatorname{sgn}(s_r) \sum_{j \geq 1} \alpha^j c_j^r \quad (7)$$

mit den Koeffizienten $c_j^r \in \mathcal{H}$ in allgemeinen Linearkombinationen von Feynman-Graphen. Für Propagatoren-Typen (Edge-Typen) gilt $\operatorname{sgn}(s_r) = -1$ und für Vertex-Typen gilt $\operatorname{sgn}(s_r) = 1$. Die Menge dieser Koeffizienten bis zu einer festen Schleifenordnung (loop order) N , .. $\{c_j^r : j = 1, \dots, N\}$ erzeugt eine Hopf-Subalgebra. Weiterhin lässt sich eine Algebra erzeugen, welche eine Subalgebra von \mathcal{H} ist, sodass ihr Koprodukt der folgenden Form unterliegt

$$\Delta(c_j^r) = \sum_{k=0}^j \operatorname{Pol}_k(\{c^r\}) \otimes c_{j-k}^r, \quad (8)$$

wobei $\operatorname{Pol}_k(\{c^r\})$ einem homogenem Polynom vom Grad k mit den Variablen c_l^r mit $l = 1, \dots, j$ entspricht.

Die Gleichungen (7) und (8) gelten allerdings nur für eine Kopplungskonstante α . Für mehrere Kopplungskonstanten, welche wir in unserem Beispiel betrachten wollen, gilt die allgemeine Form für n Dyson-Schwinger Gleichungen mit n Kopplungskonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$X_i = \mathbb{I} + \sum_{\rho} w_{\rho}^i \alpha_1^{\zeta_1} \dots \alpha_n^{\zeta_n} B_+^{d_i^{\rho}} (X_1^{\zeta_1 s_1} \dots X_i^{\zeta_i s_i + 1} \dots X_n^{\zeta_n s_n}), \quad (9)$$

wobei der Vektor ρ definiert ist als $\rho_k = \zeta_k s_k$, $X_i = X_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}[(\alpha_1, \dots, \alpha_n)]$, die Potenzen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{Z}$ variieren, $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$ und s_i ist fest für jedes X_i .

Lemma 1. Die Gleichung (9) hat die einzige Lösung

$$X_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k_j \in \mathbb{N}} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} c_{k_1, \dots, k_n}^i \quad (10)$$

Satz 3. Die Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}^{(i)}$ erzeugen eine Hopf-Subalgebra von \mathcal{H} , sodass ihr

Koprodukt der folgenden Form unterliegt

$$\Delta(c_{\mathbf{k}}^{(i)}) = \sum_{\substack{l_1+m_1=k_1 \\ \vdots \\ l_n+m_n=k_n}} Pol_{l_1, \dots, l_n}(\{c_{\dots}^{(s)}\}) \otimes c_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}, \quad (11)$$

wobei für $\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n$ gilt.

3 Vorbereitung

3.1 Kombinatorische Dyson-Schwinger Gleichungen für die zugrundeliegende Theorie

Hopf-Subalgebren von Hopf-Algebren von Feynman-Graphen stehen in engem Zusammenhang mit Dyson-Schwinger Gleichungen. Tatsächlich ruft jede Dyson-Schwinger Gleichung eine Hopf-Subalgebra hervor.

Für unser Beispiel wollen wir eine skalare QED mit φ^4 -Theorie betrachten. Unserer Theorie liegen zwei Edge-Typen

$$e_1 = \text{~~~~~}, e_2 = \text{—————},$$

sowie drei verschiedene mögliche Vertizes

$$v_1 = \text{~~~~~} \bullet \text{---}, v_2 = \text{~~~~~} \bullet \text{---}, v_3 = \text{---} \bullet \text{---}$$

zugrunde.

Die Lagrangedichte für unsere Theorie lautet

$$\mathcal{L} = g_3\phi^4 + g_2A_\mu A^\mu \phi^2 + g_1\partial_\mu A^\mu \phi^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi.$$

Insgesamt können wir fünf verschiedene Graphentypen X_i mit den folgenden festen äußeren Beinen erhalten. Wir erhalten die drei Vertizes-Typen

$$\begin{aligned} X \text{~~~~~}(\alpha) = X_1 &= \text{~~~~~} \bullet \text{---}, \\ X \text{~~~~~}(\alpha) = X_2 &= \text{~~~~~} \bullet \text{---}, \\ X \text{---}(\alpha) = X_3 &= \text{---} \bullet \text{---}, \end{aligned}$$

Für den dritten Vertex-Typ, X_3 , lassen sich fünf verschiedene Graphen finden

$$c_1^{(3)} = \frac{1}{2} \text{[Diagram 1]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} + \text{[Diagram 4]} + \text{[Diagram 5]} .$$

Für den Edge-Typ X_4 gibt es zwei Graphen

$$c_1^{(4)} = \frac{1}{2} \text{[Diagram 1]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram 2]} .$$

Für den Edge-Typ X_5 erhält man drei Graphen

$$c_1^{(5)} = \frac{1}{2} \text{[Diagram 1]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram 2]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram 3]} .$$

Insgesamt lassen sich neunzehn Feynman-Graphen mit einer Schleife (loop order=1) für alle fünf Typen finden.

X_1	$\gamma_1 = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_2 = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_3 =$ [Diagram]
X_2	$\gamma_4 = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_5 = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_6 =$ [Diagram]
	$\gamma_7 =$ [Diagram]	$\gamma_8 =$ [Diagram]	$\gamma_9 =$ [Diagram]
X_3	$\gamma_{10} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_{11} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_{12} =$ [Diagram]
	$\gamma_{13} =$ [Diagram]	$\gamma_{14} =$ [Diagram]	
X_4	$\gamma_{15} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_{16} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	
X_5	$\gamma_{17} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_{18} = \frac{1}{2}$ [Diagram]	$\gamma_{19} = \frac{1}{2}$ [Diagram]

Die Lösungen der Dyson-Schwinger Gleichungen ergeben sich aus der Bedingung B_γ . Die Menge der Feynman-Graphen bilden eine graduierte Hopf-Algebra \mathcal{H}_{FG} .

Der Einfügeoperator B_γ der Feynman-Graphen ist eine lineare Abbildung auf $B_\gamma : \mathcal{H}_{FG} \rightarrow \mathcal{H}_{FG}$, welche auf Γ wirkt, indem sie einige innere Kanten von Γ durch den Graphen γ ersetzt.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \mathbb{I} + \alpha_3 B_{\gamma_1} \left(X_1 X_3 \frac{1}{X_5^2} \right) + \alpha_2 B_{\gamma_2} \left(X_1 X_2 \frac{1}{X_4 X_5} \right) + \alpha_1^2 B_{\gamma_3} \left(X_1^3 \frac{1}{X_4 X_5} \right), \\
X_2 &= \mathbb{I} + \alpha_3 B_{\gamma_4} \left(X_2 X_3 \frac{1}{X_5^2} \right) + \alpha_2 B_{\gamma_5} \left(X_2^2 \frac{1}{X_4 X_5} \right) + \alpha_1^2 B_{\gamma_6} \left(X_1^2 X_2 \frac{1}{X_4 X_5^2} \right) \\
&\quad + \alpha_1^2 B_{\gamma_7} \left(X_1^2 X_2 \frac{1}{X_4 X_5^2} \right) + \frac{\alpha_1^2 \alpha_3}{\alpha_2} B_{\gamma_8} \left(X_1^2 X_3 \frac{1}{X_5^3} \right) + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} B_{\gamma_9} \left(X_1^4 \frac{1}{X_4 X_5^3} \right), \\
X_3 &= \mathbb{I} + \alpha_3 B_{\gamma_{10}} \left(X_3^2 \frac{1}{X_5^2} \right) + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} B_{\gamma_{11}} \left(X_2^2 \frac{1}{X_4^2} \right) + \alpha_1^2 B_{\gamma_{12}} \left(X_1^2 X_3 \frac{1}{X_4 X_5^2} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{\alpha_3} B_{\gamma_{13}} \left(X_1^2 X_2 \frac{1}{X_4^2 X_5} \right) + \frac{\alpha_1^4}{\alpha_3} B_{\gamma_{14}} \left(X_1^4 \frac{1}{X_4^2 X_5^2} \right), \\
X_4 &= \mathbb{I} - \left(\alpha_2 B_{\gamma_{15}} \left(X_2 \frac{1}{X_5} \right) + \alpha_1^2 B_{\gamma_{16}} \left(X_1^2 \frac{1}{X_5^2} \right) \right), \\
X_5 &= \mathbb{I} - \left(\alpha_2 B_{\gamma_{17}} \left(X_2 \frac{1}{X_4} \right) + \alpha_3 B_{\gamma_{18}} \left(X_3 \frac{1}{X_5} \right) + \alpha_1^2 B_{\gamma_{19}} \left(X_1^2 \frac{1}{X_4 X_5} \right) \right).
\end{aligned}$$

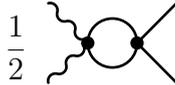
3.2 Koeffizienten-Form der Feynman-Graphen

Feynman-Graphen lassen sich zum einen graphisch als Bilder und zum anderen in der Koeffizienten-Form

$$c_{\mathbf{k}}^{(i)}$$

darstellen, wobei i für den jeweiligen Vertex- bzw. Edge-Typen steht, also $i = 1, \dots, 5$ gilt. Die Indizes $\mathbf{k} = k_i$ beschreiben die Anzahl der Kopplungskonstanten. Für drei Kopplungskonstanten gilt $\mathbf{k} = k_1, k_2, k_3$, wobei k_1 die Anzahl der Kopplungskonstanten α_1 , k_2 die Anzahl der Kopplungskonstanten α_2 und k_3 die Anzahl der Kopplungskonstanten α_3 repräsentiert. Wie betrachten zunächst ein einige Beispiel, um diese Notation nachzuvollziehen.

Beispiel 10. Der Graph



ist vom Vertex-Typ X_2 , somit gilt $i = 2$. Weiterhin weist er zwei verschiedene Vertizes auf. Darunter befindet sich einmal der Vertex v_2 und einmal der Vertex v_3 . Das würde bedeuten, dass sich die Indizes zu $k_1 = 0, k_2 = 1$ und $k_3 = 1$ ergeben. Bei den Vertizes-Typen muss man allerdings beachten, dass man noch durch die Kopplungskonstante des jeweiligen Typen teilen muss. Da der Graph vom Typ X_2

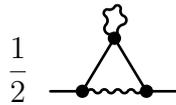
ist, muss auch die Kopplungskonstante α_2 abgezogen werden. Daher ergeben sich die Indizes zu $k_1 = 0, k_2 = 0$ und $k_3 = 1$ und der Graph lässt sich in der folgenden Form

$$c_{0,0,1}^{(2)}$$

ausdrücken.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in der Notation $c_{k_1, k_2, k_3}^{(i)}$ der Symmetriefaktor des Graphen bereits inbegriffen ist.

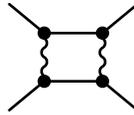
Beispiel 11. Der Graph



ist vom Edge-Typ X_5 . Im Gegensatz zu den Vertizes-Typen muss man bei den Edge-Typen nicht durch eine Kopplungskonstante teilen. Der Graph weist drei Vertizes auf, darunter befindet sich zweimal der Vertex v_1 , welchen wir jeweils links und rechts unten im Graphen finden, sowie einmal der Vertex v_3 . Somit gilt $k_1 = 2$, da wir zweimal den Vertex v_1 finden können, $k_2 = 0$ und $k_3 = 1$. Wir schreiben für diesen Feynman-Graphen

$$c_{2,0,1}^{(5)}$$

Beispiel 12. Der Graph



ist vom Typ X_3 und weist aber nur vier Vertizes v_1 und keinen Vertex v_3 auf. In diesem Fall, muss man für $k_3 = -1$ notieren. Es gilt weiterhin $k_1 = 4$ und $k_2 = 0$. Für die Notation des Graphen folgt damit

$$c_{4,0,-1}^{(3)}$$

Der nachstehenden Übersicht kann man die Koeffizienten-Form für die neunzehn Feynman-Graphen mit einer Schleife der fünf zugrundeliegenden Typen entnehmen.

Typ	Feynman-Graph	Kopplungen			Koeffizienten-Form $c_{\mathbf{k}}^{(i)}$
		α_1	α_2	α_3	
X_1	 $\frac{1}{2}$	1	0	1	$c_{0,0,1}^{(1)}$
	 $\frac{1}{2}$	1	1	0	$c_{0,1,0}^{(1)}$

		3	0	0	$c_{2,0,0}^{(1)}$
X_2	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$c_{0,0,1}^{(2)}$
	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$c_{0,1,0}^{(2)}$
		2	1	0	$c_{2,0,0}^{(2)}$
		2	1	0	$c_{2,0,0}^{(2)}$
		2	0	1	$c_{2,-1,1}^{(2)}$
		4	0	0	$c_{4,-1,0}^{(2)}$
X_3	$\frac{1}{2}$	0	0	2	$c_{0,0,1}^{(3)}$
	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$c_{0,2,-1}^{(3)}$
		2	0	1	$c_{2,0,0}^{(3)}$
		2	1	0	$c_{2,1,-1}^{(3)}$
		4	0	0	$c_{4,0,-1}^{(3)}$
X_4	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$c_{0,1,0}^{(4)}$
	$\frac{1}{2}$	2	0	0	$c_{2,0,0}^{(4)}$
X_5	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$c_{0,1,0}^{(5)}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$c_{0,0,1}^{(5)}$

4 Beispielrechnung

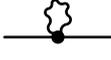
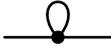
Wir wollen nun anhand einer Beispielrechnung für den Edge-Typen $X_5 = \text{---}\bigcirc\text{---}$ zeigen, dass die Koeffizienten $c_{k_1, k_2, k_3}^{(i)}$ eine Hopf-Subalgebra von \mathcal{H}_{FG} erzeugen. Mit Satz 3 gilt für ein System mit drei Kopplungskonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ für das zugehörige Koprodukt

$$\Delta(c_{k_1, k_2, k_3}^{(i)}) = \sum_{\substack{l_1+m_1=k_1 \\ l_2+m_2=k_2 \\ l_3+m_3=k_3}} Pol_{l_1, l_2, l_3}(\{c_{\dots}^{(s)}\}) \otimes c_{m_1, m_2, m_3}^{(i)}. \quad (12)$$

4.1 Feynman-Graphen des Edge-Typen X_5

Für unser Beispiel betrachten wir alle Feynman-Graphen des Edge-Typen X_5 bis zur zweiten Ordnung. Um den Zusammenhang aus Satz 3 zu überprüfen, müssen wir alle Koprodukte der Zweischleifen-Graphen des Edge-Typen X_5 berechnen. Dafür ist es zunächst notwendig, alle Feynman-Graphen für diesen Typen bis zur zweiten Schleifenordnung zu finden.

Für den Edge-Typ X_5 gibt es insgesamt neunzehn verschiedene Feynman-Graphen. Wie bereits erwähnt, gibt es die drei verschiedenen one-loop-Graphen. Mit zwei Schleifen lassen sich weitere sechzehn Graphen finden. Der nachstehenden Übersicht kann man die Feynman-Graphen sowie deren Kopplungen entnehmen.

$c_j^{(i)}$	Feynman-Graph	Kopplungen		
		α_1	α_2	α_3
$c_1^{(5)}(1)$		0	1	0
$c_1^{(5)}(2)$		0	0	1
$c_1^{(5)}(3)$		2	0	0
$c_2^{(5)}(1)$		0	1	1
$c_2^{(5)}(2)$		0	2	0
$c_2^{(5)}(3)$		0	2	0

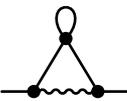
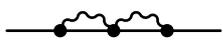
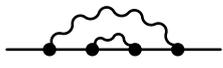
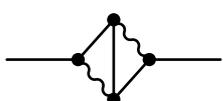
$c_2^r(i)$	Feynman-Graph	Kopplungen		
		α_1	α_2	α_3
$c_2^{(5)}(4)$		0	0	2
$c_2^{(5)}(5)$		0	0	2
$c_2^{(5)}(6)$		2	0	1
$c_2^{(5)}(7)$		2	0	1
$c_2^{(5)}(8)$		2	0	1
$c_2^{(5)}(9)$		2	1	0
$c_2^{(5)}(10)$		2	1	0
$c_2^{(5)}(11)$		2	1	0
$c_2^{(5)}(12)$		2	1	0
$c_2^{(5)}(13)$		2	1	0
$c_2^{(5)}(14)$		4	0	0
$c_2^{(5)}(15)$		4	0	0
$c_2^{(5)}(16)$		4	0	0

Tabelle 2: Feynman-Graphen für den Edge-Typen X_5 bis zur 2. Schleifenordnung

Für die Feynman-Graphen mit einer Schleife können wir zum einen die bildliche Darstellung

$$c_1^{(5)} = \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---}$$

erhalten und zum anderen ergeben sich folgende Ausdrücke in der Koeffizienten-Form

$$c_1^{(5)}(i) = c_1^{(5)}(1) + c_1^{(5)}(2) + c_1^{(5)}(3),$$

$$c_1^{(5)} = c_{0,1,0}^{(5)} + c_{0,0,1}^{(5)} + c_{2,0,0}^{(5)},$$

wobei für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Es lassen sich sechzehn two-loop Graphen finden

$$c_2^{(5)} = \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$+ \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{6} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$+ \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$+ \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$+ \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$+ \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---}.$$

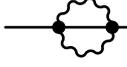
Die Feynman-Graphen können vereinfacht in der Form

$$c_2^{(5)}(i) = c_2^{(5)}(1) + \dots + c_2^{(5)}(16),$$

für $i = 1, \dots, 16$ ausgedrückt werden.

Bei den Zweischleifen-Graphen lässt sich erkennen (siehe Tabelle 2), dass mehrere

Graphen dieselben Kopplungen aufweisen.

Die Graphen $c_2^{(5)}(2) =$  und $c_2^{(3)}(3) =$  sind beide vom Typ $c_{0,2,0}^{(5)}$. Die Summe der beiden Graphen definiert diesen Typ, sodass

$$c_{0,2,0}^{(5)} = c_2^{(5)}(2) + c_2^{(3)}(3)$$

gilt. Damit gilt für die restlichen Graphen analog

$$\begin{aligned} c_{0,0,2}^{(5)} &= c_2^{(5)}(4) + c_2^{(5)}(5), \\ c_{2,0,1}^{(5)} &= c_2^{(5)}(6) + c_2^{(5)}(7) + c_2^{(5)}(8), \\ c_{2,1,0}^{(5)} &= c_2^{(5)}(9) + c_2^{(5)}(10) + c_2^{(5)}(11) + c_2^{(5)}(12) + c_2^{(5)}(13), \\ c_{4,0,0}^{(5)} &= c_2^{(5)}(14) + c_2^{(5)}(15) + c_2^{(5)}(16). \end{aligned}$$

Für die Notation der Zweischleifen-Graphen in Koeffizienten-Form ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} c_2^{(5)} &= + c_{0,1,1}^{(5)} + c_{0,2,0}^{(5)} + c_{0,0,2}^{(5)} \\ &\quad + c_{2,0,1}^{(5)} + c_{2,1,0}^{(5)} + c_{4,0,0}^{(5)}. \end{aligned}$$

Für die Lösung der Dyson-Schwinger Gleichung für den Edge-Typen X_5 erhält man

$$\begin{aligned} X_5 &= \mathbb{I} - (c_1^{(5)} + c_2^{(5)}) \\ &= \mathbb{I} - (c_{0,1,0}^{(5)} + c_{0,0,1}^{(5)} + c_{2,0,0}^{(5)} \\ &\quad + c_{0,1,1}^{(5)} + c_{0,2,0}^{(5)} + c_{0,0,2}^{(5)} \\ &\quad + c_{2,0,1}^{(5)} + c_{2,1,0}^{(5)} + c_{4,0,0}^{(5)}). \end{aligned}$$

4.2 Berechnung der Koprodukte

Um nun Gleichung (12) zu bestätigen, müssen wir alle Koprodukte der Feynman-Graphen vom Typ X_5 berechnen. Die Einschleifen-Graphen sind primitive Graphen und enthalten keine Subgraphen. Für die sechzehn Graphen mit zwei Schleifen wollen wir die Koprodukte berechnen. Der Einfachheit halber wird stets nur das reduzierte Koprodukt betrachtet.

$$\begin{aligned}
1. \quad & \underbrace{\tilde{\Delta} \frac{1}{4} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,1}^{(5)}} = \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(2)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
2. \quad & \underbrace{\tilde{\Delta} \frac{1}{4} \text{ (diagram)}}_{c_{0,2,0}^{(5)}} = \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(4)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,2,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
3. \quad & \underbrace{\tilde{\Delta} \frac{1}{6} \text{ (diagram)}}_{c_{0,2,0}^{(5)}} = \frac{4}{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(2)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \right) \\
& + \frac{2}{3} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,2,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \right) \\
4. \quad & \underbrace{\tilde{\Delta} \frac{1}{4} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,2}^{(5)}} = \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
5. \quad & \underbrace{\tilde{\Delta} \frac{1}{6} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,2}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{ (diagram)}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{4} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,1}^{(5)}} = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
& + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(3)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,-1,1}^{(2)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \right) \\
7. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,1}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
& + \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(3)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
8. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,1}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(1)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
& + 2 \cdot \left(\underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(3)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \right) \\
9. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{4} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,1,0}^{(5)}} = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,0,0}^{(4)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
& + \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{2,1,-1}^{(3)}} \otimes \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram}}_{c_{0,0,1}^{(5)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 10.1}}_{c_{2,1,0}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 10.2}}_{c_{0,1,0}^{(4)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 10.3}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
& + \underbrace{\text{Diagram 10.4}}_{c_{2,0,0}^{(2)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 10.5}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
11. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 11.1}}_{c_{2,1,0}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 11.2}}_{c_{0,1,0}^{(4)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 11.3}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
& + \underbrace{\text{Diagram 11.4}}_{c_{2,1,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 11.5}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
12. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 12.1}}_{c_{2,1,0}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 12.2}}_{c_{0,1,0}^{(1)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 12.3}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
& + \underbrace{\text{Diagram 12.4}}_{c_{2,0,0}^{(2)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 12.5}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
& + \underbrace{\text{Diagram 12.6}}_{c_{2,1,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 12.7}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
13. \quad & \tilde{\Delta} \frac{1}{4} \underbrace{\text{Diagram 13.1}}_{c_{2,1,0}^{(5)}} = 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 13.2}}_{c_{0,1,0}^{(1)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 13.3}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 1}}_{c_{4,0,0}^{(5)}} &= 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 2}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 3}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
&+ \underbrace{\text{Diagram 4}}_{c_{4,0,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 5}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \\
&+ \underbrace{\text{Diagram 6}}_{c_{4,-1,0}^{(2)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 7}}_{c_{0,1,0}^{(5)}} \\
15. \quad \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 8}}_{c_{4,0,0}^{(5)}} &= 2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 9}}_{c_{2,0,0}^{(4)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 10}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
&+ 2 \cdot \left(\underbrace{\text{Diagram 11}}_{c_{4,0,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 12}}_{c_{0,0,1}^{(5)}} \right) \\
16. \quad \tilde{\Delta} \frac{1}{2} \underbrace{\text{Diagram 13}}_{c_{4,0,0}^{(5)}} &= 2 \cdot \left(\underbrace{\text{Diagram 14}}_{c_{2,0,0}^{(1)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 15}}_{c_{2,0,0}^{(5)}} \right) \\
&+ \underbrace{\text{Diagram 16}}_{c_{4,0,-1}^{(3)}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \text{Diagram 17}}_{c_{0,0,1}^{(5)}}
\end{aligned}$$

Die sechzehn Zweischleifen-Graphen (two-loop graphs) gehören jeweils zu einem der sechs verschiedenen Koeffizienten-Typen $(c_{0,1,1}^{(5)}, c_{0,2,0}^{(5)}, c_{0,0,2}^{(5)}, c_{2,0,1}^{(5)}, c_{2,1,0}^{(5)}, c_{4,0,0}^{(5)})$.

Wir betrachten nun alle zugehörigen Koprodukte und müssen überprüfen, ob die jeweiligen Terme der Sub- und Kographen den jeweiligen Typ erzeugen, d.h. da wir drei Kopplungskonstanten betrachten, müssen wir überprüfen, ob sich für jeden Term $l_i + m_i = k_i$ für $i = 1, 2, 3$ ergibt. Der Zusammenhang lässt sich nachfolgend

leicht überprüfen.

$$\tilde{\Delta}c_{0,1,1}^{(5)} = c_{0,1,0}^{(5)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} + c_{0,0,1}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}c_{0,2,0}^{(5)} &= c_{0,1,0}^{(4)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} + c_{0,2,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + \frac{4}{3} \left(c_{0,1,0}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} \right) + \frac{2}{3} \left(c_{0,2,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}c_{0,0,2}^{(5)} &= c_{0,0,1}^{(5)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} + c_{0,0,1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,0,1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}c_{2,0,1}^{(5)} &= c_{2,0,0}^{(5)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} + \frac{1}{2} \left(c_{2,0,0}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{2,-1,1}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} \right) \\ &\quad + 2 \left(c_{0,0,1}^{(5)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{2,0,0}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,0,1}^{(1)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + 2 \left(c_{2,0,0}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}c_{2,1,0}^{(5)} &= c_{2,0,0}^{(4)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} + c_{2,1,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,1,0}^{(5)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{2,0,0}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,1,0}^{(4)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{2,1,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,1,0}^{(1)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{2,0,0}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} + c_{2,1,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{0,1,0}^{(1)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}c_{4,0,0}^{(5)} &= 2 \left(c_{2,0,0}^{(5)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{4,0,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} + c_{4,-1,0}^{(2)} \otimes c_{0,1,0}^{(5)} \\ &\quad + 2 \left(c_{2,0,0}^{(4)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + 2 \left(c_{4,0,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \right) \\ &\quad + 2 \left(c_{2,0,0}^{(1)} \otimes c_{2,0,0}^{(5)} \right) + c_{4,0,-1}^{(3)} \otimes c_{0,0,1}^{(5)} \end{aligned}$$

5 Zusammenfassung

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass das Koprodukt der Algebra, aufgebaut aus Feynman-Graphen, der Form aus Gleichung 12 entspricht. Laut Satz 3 können wir nun sagen, dass die Feynman-Graphen, welche als Koeffizienten dargestellt wurden, eine Hopf-Subalgebra von \mathcal{H}_{FG} erzeugen. Der Zusammenhang wurde anhand des gewählten Beispiels für die Feynman-Graphen mit bis zu zwei Schleifen für den Edge-Typen X_5 überprüft. Man könnte weiterhin höhere Ordnungen betrachten, dies würde allerdings zu einer enormen Anzahl von Feynman-Graphen führen, da man bereits für den Fall der Graphen mit bis zu drei Schleifen jeweils alle one-loop und two-loop Graphen betrachten müsste.

Ziel dieser Arbeit war es anhand eines einfachen Beispiels den Zusammenhang näher zu bringen. Dabei wurde der Fokus vor allem auf die Darstellung der Feynman-Graphen und die Berechnung ihrer Koprodukte gelegt.

Literatur

- [1] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantenfeldtheorie*. AULA-Verlag, Wiesbaden, 1 edition, 1993.
- [2] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, New York, 1995.
- [3] James D. Bjorken and Sidney David Drell. *Relativistic quantum fields*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [4] Klaus Lichtenegger. *Schlüsselkonzepte zur Physik - Von den Newton-Axiomen bis zur Hawking-Strahlung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2015.
- [5] John Churton Collins. *Renormalization : an introduction to renormalization, the renormalization group, and the operator-product expansion*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [6] Laurie M. Brown. *Renormalization : from Lorentz to Landau (and beyond)*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] Dirk Kreimer. *Combinatorics of (perturbative) Quantum Field Theory*, Oktober 2000. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0010059v1.pdf>.
- [8] Allen Connes and Dirk Kreimer. *Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, August 1998. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9808042v1.pdf>.
- [9] Dirk Kreimer. *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Januar 1998. <https://arxiv.org/pdf/q-alg/9707029v4.pdf>.
- [10] Allen Connes and Dirk Kreimer. *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I: the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Dezember 1999. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9912092v1.pdf>.
- [11] Loic Foissy. *Pre-Lie algebras and systems of Dyson-Schwinger equations*, 2011. <http://loic.foissy.free.fr/pageperso/article21.pdf>.
- [12] Loic Foissy. *Multigraded Dyson-Schwinger systems*, November 2015. <http://arxiv.org/pdf/1511.06859v1.pdf>.
- [13] Gerd Fischer. *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 17. Aufl. edition, 2010.

- [14] Christian Kassel. *Quantum Groups*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [15] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [16] Michael Borinsky. *Algorithmization of the Hopf algebra of Feynman graphs*. Masterarbeit, August 2013. <http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/wp-content/uploads/BorinskyMaster.pdf>.
- [17] Julian Purkart. *The signed permutation group on Feynman graphs*, Februar 2016. <http://arxiv.org/abs/1512.02408v2>.
- [18] Christoph Bergbauer and Dirk Kreimer. *Hopf algebras in renormalization theory: Locality and Dyson-Schwinger equations from Hochschild cohomology*, Oktober 2006. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0506190v2.pdf>.
- [19] Lucia Rotheray. *Hopf subalgebras from Green's functions*. Masterarbeit, Dezember 2014. <http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~kreimer/wp-content/uploads/Lucia.pdf>.
- [20] Dirk Kreimer. Dyson-schwinger equations. notes by Lutz Klaczynski, 2013. <http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~klacz/SkriptRGE.pdf>.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

Berlin, den 28. September 2016