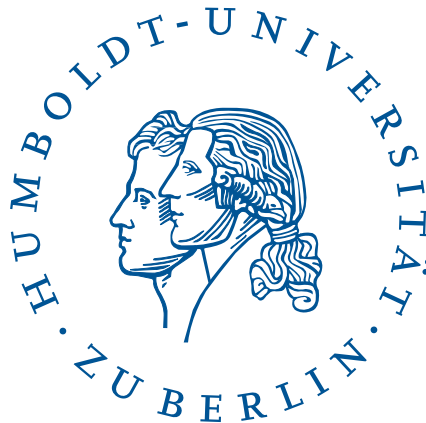


Differentialgleichungen massiver 2-Schleifen Beiträge zur Zweipunktfunktion

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science (B. Sc.)
im Fach Physik



eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
Institut für Physik
Humboldt-Universität zu Berlin

von Armin Ralf Kurt Schweitzer

Beurteilung:

1. Prof. Dr. Dirk Kreimer
2. Dr. Christian Bogner (Betreuung)

eingereicht am: *20.08.2015*
Tag der mündlichen Prüfung: *27.08.2015*

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Armin Schweitzer

Datum, Ort

Danksagungen

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Christian Bogner.

Ich bedanke mich für Ihre fortwährende Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit und dafür, dass Sie die Rolle als Betreuer so ernst genommen haben und wann immer Probleme auftraten, sofort bereit waren diese zu besprechen. Dabei ist es Ihnen durch Ihre stetigen Hinweise auf interessante Artikel und Anwendungsbereiche gelungen, dass ich zu keinem Zeitpunkt das Gefühl hatte überfordert oder festgefahren zu sein, sondern lediglich ein wachsendes Interesse verspürte, mich mit der Materie auseinanderzusetzen.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Kreimer für die Möglichkeit, in seiner Arbeitsgruppe eine Arbeit zu erstellen und seine Bereiterklärung, diese zu begutachten.

Zusammenfassung

In der theoretischen Elementarteilchenphysik ist es notwendig Feynmanintegrale zu berechnen, um Vorhersagen zu aktuellen Beschleunigerexperimenten erstellen zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die IBP-Reduktion ganzer Klassen von Feynmanintegralen auf wenige Masterintegrale und deren Berechnung mittels der Differentialgleichungsmethode an ausführlichen Beispielen vorgestellt.

Weiterhin wird gezeigt, dass die Masterintegrale der sunrise-Topologie in der Inhomogenität der Differentialgleichung des Masterintegrals der 5-Nenner 2-Schleifen Topologie auftreten und somit für die Berechnung eines weiteren massiven 2-Schleifen Beitrages zur Zweipunktfunktion relevant sind.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Motivation | 1 |
| 2 | Grundbegriffe und Grundtechniken zum Umgang mit Feynmangraphen | 3 |
| 2.1 | Grundbegriffe | 3 |
| 2.2 | Grundtechniken für skalare Feynmanintegrale | 5 |
| 2.2.1 | Wick-Rotation | 5 |
| 2.2.2 | Regularisierung von Feynmanintegralen | 8 |
| 3 | Ein allgemeinerer Standpunkt | 11 |
| 3.1 | Topologien | 11 |
| 3.1.1 | Beispiel: Von einem Feynmangraphen zur Topologie | 12 |
| 4 | IBP-Reduktion auf Masterintegrale | 16 |
| 4.1 | Beispiel einer IBP-Reduktion | 17 |
| 4.2 | Laportas Algorithmus | 19 |
| 4.2.1 | Beispiel der Anwendung des Laporta Algorithmus | 20 |
| 5 | Differentialgleichungen für Feynmanintegrale | 22 |
| 5.1 | Die Lösung des MIs der massiven 1-Schleifen 2-Nenner Topologie $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ | 22 |
| 5.2 | Automatisierte Generierung der MIs und der DGLs | 28 |
| 6 | Differentialgleichungen massiver 2-Schleifen Beiträge zur Zweipunktfunktion | 30 |
| 6.1 | Die massive 2-Schleifen 5-Nenner Topologie \mathcal{H} | 30 |
| 6.2 | Die DGLs der \mathcal{B} - und \mathcal{S} -MIs | 37 |
| 7 | Abschließender Ausblick | 40 |
| 7.1 | Ausblick zur ϵ -Entwicklung | 40 |
| 7.2 | Ausblick zur Integration über Inhomogenitäten | 42 |
| 7.2.1 | Einschub: Ausblick zu Polylogarithmen und iterierten Integralen | 44 |
| 7.3 | Zusammenfassender Ausblick | 49 |
| A | | 51 |
| A.1 | Berechnung des Tadpole-Integrals | 51 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| B | | 52 |
| B.1 | Polynome und DGLs der \mathcal{B} und \mathcal{H} -MIs | 52 |
| B.1.1 | Polynome | 52 |
| B.1.2 | DGLs spezieller Massenkonfigurationen des \mathcal{H} -MI | 52 |
| B.1.3 | DGL des \mathcal{B} -MI im Grenzfall gleicher Massen | 54 |
| B.2 | Polynome und DGLs der sunrise-MIs | 54 |
| B.2.1 | Polynome | 54 |
| B.2.2 | DGLs der sunrise-MIs im Grenzfall gleicher Massen | 55 |

Kapitel 1

Motivation

Diese Bachelorarbeit beschäftigt sich mit der Berechnung von Feynmanintegralen. Diese treten im Rahmen einer störungstheoretischen Betrachtung von Quantenfeldtheorien als Beiträge zu Streuamplituden auf. Die Berechnung dieser Streuamplituden bildet die Grundlage für die theoretische Vorhersage experimentell zugänglicher Wirkungsquerschnitte, die bei Streuprozessen hochenergetischer Elementarteilchen gemessen werden. Dabei stellen die zunehmenden Genauigkeiten der experimentellen Test des Standardmodells, wie sie z.B. am LHC erreicht werden, neue Anforderungen an Exaktheit der theoretischen Vorhersage. Dies führt dazu, dass eine Vielzahl von Feynmanintegralen, deren Berechnung ein hohes Maß an mathematischer Komplexität erreicht, ausgewertet müssen. In diesem Zusammenhang ist es erforderlich, dass bestehende mathematische Methoden stetig verbessert und neue Methoden entwickelt werden, um eine erfolgreiche Auswertung gewährleisten zu können.

Vor Kurzem erforderte die Berechnung der Masterintegrale der massiven 2-Schleifen 3-Nenner sunrise-Topologie (siehe z.B. [4–6, 13, 32, 39, 43]) erstmalig eine Erweiterung, der bereits in der Berechnung von Feynmanintegralen etablierten Verallgemeinerungen klassischer Polylogarithmen [2, 18, 19, 21, 33, 44], auf den elliptischen Fall [10] [5, 6]. Es ist bereits bekannt, dass die in [6] gefundene Lösung der sunrise-Masterintegrale durch elliptische Polylogarithmen für die Auswertung der Differentialgleichung des Masterintegrals der massiven 2-Schleifen 4-Nenner Topologie [12] als Beitrag zur Zweipunktfunktion relevant ist.

Daraus ergibt sich die Fragestellung, ob dies auch für andere Masterintegrale der Fall sein wird. Ist dem so, kann es als klares Indiz für die Notwendigkeit einer tiefer gehenden Erforschung der Anwendung elliptischer Polylogarithmen in der Berechnung von Feynmanintegralen aufgefasst werden.

Ausgehend von dieser Fragestellung ergeben sich die zwei Hauptziele dieser Bachelorarbeit:

- **Ziel 1.** Vorstellung der *integration-by-parts*-Reduktion [14] ganzer Klassen von Feynmanintegralen auf wenige Masterintegrale sowie deren Lösung mit Hilfe der Differentialgleichungsmethode [28, 45]
- **Ziel 2.** Beantwortung der Frage: Treten die Masterintegrale der massiven sunrise-Topologie als Beiträge zur Zweipunktfunktion in der Differentialgleichung des Masterintegrals der massiven 2-Schleifen 5-Nenner Topologie auf?

Das erste Ziel soll dabei über die ausführliche Betrachtung von Beispielrechnungen, an denen die Grundstruktur verdeutlicht wird, erreicht werden. Die verwendete Methode für das computergestützte Erstellen der Differentialgleichung, welche zum Erreichen des zweiten Ziels notwendig ist, wird, um einen minimalen Konsistenzcheck zu gewährleisten, durch die Erzeugung und den Vergleich mit zwei aus der Literatur bekannten Differentialgleichungen [12, 13] getestet.

Kapitel 2

Grundbegriffe und Grundtechniken zum Umgang mit Feynmangraphen

Im Rahmen einer störungstheoretischen Betrachtung, d.h. einer Entwicklung in der als klein angenommenen Kopplungskonstanten der Felder, werden Feynmandiagramme sowohl als Grundlage der Veranschaulichung als auch der Rechnung herangezogen.

Eine häufige Anwendung dieser störungstheoretischen Entwicklung ist die Berechnung des Wirkungsquerschnittes σ bei hochenergetischen Streuprozessen von Teilchen, wie sie in Beschleunigern realisiert werden.

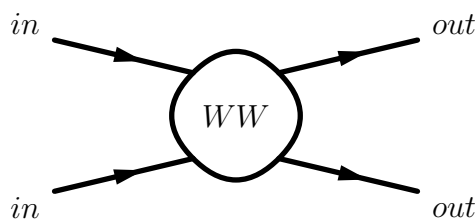
Dabei lässt sich zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt proportional zum Betragsquadrat der Übergangswahrscheinlichkeit P ist, welche sich wiederum als Summe aller möglichen Feynmangraphen darstellen lässt. Es gilt also

$$\sigma(in \rightarrow out) \propto |P(in \rightarrow out)|^2 \propto \left| \sum \text{mögl. Feynmangraphen} \right|^2$$

Wobei ein Feynmangraph eine diagrammatische Darstellung des Prozesses, welcher mit Hilfe der sogenannten Feynmanregeln in Formeln zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit “übersetzt” werden kann, bezeichnet.

2.1 Grundbegriffe

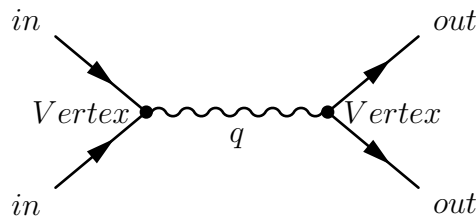
Die Grundlage eines Vergleiches des Experimentes mit der Theorie ist die Kenntnis über die Anzahl und Art, der vor der Wechselwirkung einlaufenden und anschließend auslaufenden Teilchen. Im Rahmen der Feynmangraphen sieht z.B. ein $2 \rightarrow 2$ -Streuprozess schematisch wie folgt aus.



Hierbei werden die ein- und auslaufenden Teilchen als Beine (*legs*) bzw. externe Impulse bezeichnet. Diese sind durch den zu betrachtenden Prozess festgelegt und experimentell bestimmbar.

Die Wechselwirkung (WW) der Theorie wird durch verbinden der externen Beine graphisch beschrieben, wobei die Art und Anzahl der möglichen Verbindungen durch die angenommene WW-Theorie und die damit verbundene Kopplung sowie die Ordnung der Störungstheorie vorgeben ist.

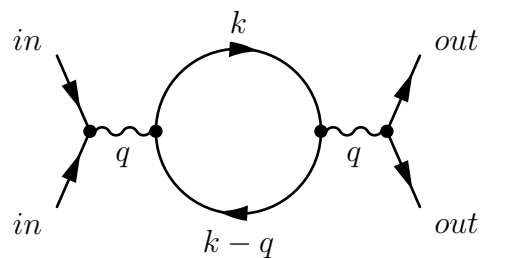
In niedrigster Ordnung erhält man für einen $2 \rightarrow 2$ -Streuprozess z.B. ein zu



ähnliches Diagramm. Hierbei werden die Punkte in denen sich Linien treffen, d.h. die Felder koppeln, als *Vertizes* bezeichnet. Die Vertizes sind somit proportional zur Kopplungskonstanten und bei gleicher Art und Anzahl der Teilchen bedeuten Graphen mit mehr Vertizes folglich eine höhere Ordnung in der störungstheoretischen Entwicklung des Prozesses. In jedem Vertex gilt eine Erhaltung der *4er*-Impulse, sodass in dem schematisch dargestellten Prozess der Impuls q des Austauscheteilchens vollständig als Summe der ein- bzw. auslaufenden Impulse bestimmt ist. Diagramme dieser Art werden als Baumgraphen und die Ordnung der Störungstheorie als Baumgraphenniveau (*tree-level*) bezeichnet.

Der dargestellte $2 \rightarrow 2$ -Graph entspricht z.B. einer Baumgraphennäherung des Prozesses $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, wobei die geschwungene Linie ein Photon darstellt, welches über die Ladung an die ein- bzw. auslaufenden Fermionen koppelt.

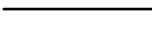
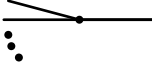
In höheren Ordnungen der Störungstheorie sind die Impulse der Austauscheteilchen nicht mehr vollständig durch die externen Impulse bestimmbar. Betrachtet man z.B. Graphen der Art



so ist der Impuls k nicht durch die Impulserhaltung festgelegt. In einem solchen Fall bezeichnet man den freien Impuls k als Schleifenimpuls (*loop*-Impuls). Über unbestimmte Schleifenimpulse wird integriert, wohinter die physikalische Aussage steht, dass diese jeden Wert annehmen können.

Diagramme, die Schleifenimpulse beinhalten, bezeichnet man als Schleifendiagramme. Enthält ein Diagramm n Schleifenimpulse, so spricht man von einem n -Schleifendiagramm.

Jedes Feld besitzt im Detail verschieden aussehende Feynmanregeln, welche sich im Rahmen der Quantisierung herleiten lassen. Die Grundbausteine sind in allen Feldern allerdings sehr ähnlich, sodass man sie für eine Betrachtung im Impulsraum wie folgt zusammenfassen könnte.

-  $\propto \frac{T_{\mu_1 \mu_2 \dots}^{\nu_1 \nu_2 \dots}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$:
heißt Propagator und beschreibt die Propagation des Teilchens
-  : heißt Vertex und ist proportional zur Kopplung der Felder
- an Vertizes gilt Impulserhaltung
- $\int d^4k$ über Schleifenimpulse wird integriert

Man erkennt, dass für Diagramme jenseits des Baumgraphenniveaus Impulsintegrale auftreten werden. Diese haben im Allgemeinen eine Tensorstruktur, da die zu Grunde liegenden Felder Tensorfelder sind. Diese Integrale sind in den meisten Fällen nicht elementar lösbar und erfordern fortgeschrittene Lösungsmethoden, sind aber unerlässlich für eine exakte theoretische Vorhersage von Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Wirkungsquerschnitten.

2.2 Grundtechniken für skalare Feynmanintegrale

Im Rahmen dieser Arbeit werden skalare 2-Schleifen Feynmandiagramme untersucht. Diese stammen nicht direkt aus der Berechnung eines konkret zu grundlegenden Streuprozesses, da es im Standardmodell der Elementarteilchen nur ein skalares Teilchen, das Higgs-Boson, gibt.

Allerdings lassen sich die Tensorintegrale, die in jedem anderen Streuprozess in höherer Ordnung auftreten, mit Hilfe von geeigneten Reduktionsmethoden auf skalare Integrale überführen. Eine systematische Reduktion von Ein-Schleifen-Tensorintegralen wurde erstmals 1979 von Passarino und Veltman im Rahmen der Untersuchung des Streuprozesses $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ausgearbeitet [41]. Auch für Mehr-Schleifen-Integralen ist eine Reduktion möglich [9, 55, 56], sodass sich die Auswertung des ursprünglichen Feynmandiagramms auf die Berechnung zugehöriger skalarer Mehr-Schleifen Integrale reduziert.

Daher ist die Kenntnis der Lösung von skalaren Feynmanintegralen ein notwendiger Schritt hin zu der theoretischen Vorhersage realer Streuprozesse und deren Wirkungsquerschnitte.

Bevor die eigentlichen Integrale, um die es in dieser Arbeit gehen wird, vorgestellt werden, ist es notwendig, dass einige Grundtechniken im generellen Umgang mit skalaren Feynmanintegralen betrachtet werden. Da diese schnell für eine nicht computerbasierte Auswertung zu komplex werden, sollen sie an nachvollziehbaren und vereinfachten Beispielen verdeutlicht werden und die Grundlage für das Verständnis der Ergebnisse und deren Berechnung liefern.

2.2.1 Wick-Rotation

Schon bei der Betrachtung des einfachen Falles eines skalaren, masselosen 1-Schleifen Integrals Glg.: (2.2.1) treten Schwierigkeiten auf.

$$I_1 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} k \\ \circ \\ -k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p=0 \\ \text{---} \end{array} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(-k)^2} \quad (2.2.1)$$

Die erste liegt darin, dass die Impulse in Minkowskimetrik vorliegen, d.h. $k^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$. Somit ist eine Integration in z.B. 4d-Kugelkoordinaten nicht intuitiv klar. Es zeigt sich allerdings, dass eine Integraltransformation in den euklidischen \mathbb{R}^4 möglich ist, die sogenannte Wick-Rotation.

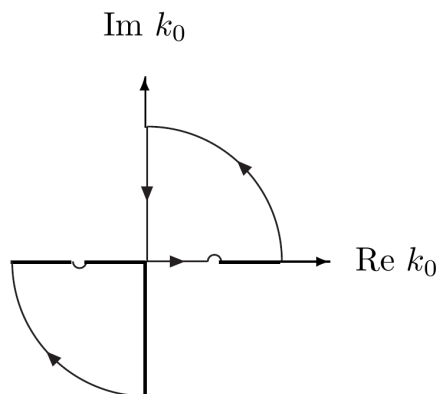


Abbildung 2.1: Darstellung der Integrationskontur für die k_0 -Integration nach durchgeführter Wick-Rotation. Entnommen aus [59].

Hierbei betrachtet man die in Abb. 2.1 eingezeichnete Integrationskontur innerhalb der komplexen k_0 -Ebene, wobei die eingezeichneten Kreise entlang der reellen Achse die im Propagator eingeführten $i\epsilon$ -Pole ausschließen. Da die $i\epsilon$ -Pole die einzigen Polstellen der in Feynmanintegralen zu integrierenden meromorphen Funktionen $f(k_0)$ sind, gilt nach dem Residuensatz

$$\oint dk_0 f(k_0) = 0 ,$$

wenn entlang der eingezeichneten Kontur integriert wird. Es kann weiterhin gezeigt werden, dass die Beiträge der Viertelkreise ober- und unterhalb der reellen Achse im Unendlichen verschwinden, sodass man die Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 f(k_0) = - \int_{i\infty}^{-i\infty} dk_0 f(k_0) \quad (2.2.2)$$

erhält. Durch die Substitution

$$\begin{aligned} k_0 &= iK_0 \\ k_j &= K_j, \quad \text{für } j = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

erhält man das Skalarprodukt

$$k^2 = k_0^2 - k_j^2 = -K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2 = -K^2,$$

wobei K^2 nun dem "gewöhnlichen" Skalarprodukt im \mathbb{R}^4 entspricht und wir als Konsequenz das Maß gemäß

$$d^4k = idK_0 d^3k = id^4K$$

ändern. Somit wird Glg. (2.2.2) zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 f(k_0) = - \int_{i\infty}^{-i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} dK_0 f(K_0),$$

d.h. wir können uns eine rein imaginäre Komponente K_0 denken, deren physikalische Bedeutung nicht mehr selbstverständlich ist, die aber zu Skalarprodukten in euklidischer Metrik führt und die $i\epsilon$ -Pole im Propagator unnötig macht.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Impulse, wenn sie in euklidischer Metrik mit Großbuchstaben (z.B. K) und wenn sie Minkowskimetrik vorliegen, mit kleinen Buchstaben (z.B. k) bezeichnet.

Das Feynmanintegral Glg. (2.2.1) kann mit Hilfe der Wick-Rotation (W.R.) zumindest auf eine trivial integrierbare Form Glg. (2.2.3)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{p=0} \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \stackrel{W.R.}{=} i \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4} \frac{1}{K^4} \\
 &\quad \begin{array}{c} k \\ -k \end{array} \\
 &\stackrel{K.K.}{=} \iint \frac{idK_E d\Omega}{(2\pi)^4} \frac{-iK_E^3}{K_E^4} = \int_0^\infty \frac{dK_E}{(4\pi)^2} \frac{1}{K_E} \\
 &\quad (\text{"} \propto \log(K_E) \Big|_0^\infty \text{"}) \tag{2.2.3}
 \end{aligned}$$

gebracht werden, wobei zur Auswertung 4d-Kugelkoordinaten (K.K.) verwendet wurden.

An diesem Punkt wird die zweite große Schwierigkeit offensichtlich. Es ist zwar gelungen das Integral auf eine trivial integrierbare Form Glg. (2.2.3) zurückzuführen,

welches allerdings nicht ausgeführt werden kann, da es sowohl für $K_E \rightarrow 0$ als auch für $K_E \rightarrow \infty$ logarithmisch divergiert.

Diese Divergenzen resultieren nicht aus der Wick-Rotation, sondern sind durch diese nur einfacher ersichtlich geworden. Sie werden bei der Auswertung von Feynmangraphen auftreten und sind nicht auf das betrachtete Integral Glg. (2.2.1) beschränkt.

Es ist allerdings klar, dass jede Größe, die durch die Auswertung eines divergenten Integrals gewonnen werden kann, schlecht definiert ist. Es muss folglich eine Möglichkeit gefunden werden, diese Divergenzen zu *regularisieren* um wohldefinierte Ergebnisse zu erhalten.

2.2.2 Regularisierung von Feynmanintegralen

Um sich mit Divergenzen in Feynmanintegralen auseinanderzusetzen, ist es notwendig, diese zu klassifizieren. In dem betrachteten Beispiel treten zwei verschiedene Arten der Divergenz auf.

Man bezeichnet Divergenzen die im Limes $k \rightarrow 0$, und somit im Grenzfall $1/k \propto \lambda \rightarrow \infty$ langer Wellenlängen, auftreten als *infrarote* Divergenzen (*IR*). In der Betrachtung der Struktur von skalaren Propagatoren

$$P(K^2) \propto \frac{1}{K^2 + m^2} \stackrel{m=0}{=} \frac{1}{K^2}$$

erkennt man, dass IR-Divergenzen generell nur für masselose Teilchen (z.B. Photonen) auftreten können und somit etwas speziellerer Natur sind.

Die zweite Art der Divergenzen, die im Limes $k \rightarrow \infty$ auftreten, bezeichnet man analog als *ultraviolette* Divergenzen (*UV*). Diese hängen nicht von einer speziellen Eigenschaft wie Masslosigkeit der Teilchen ab und treten bei skalaren Feynmanintegralen auf, für welche der naive UV-Divergenzgrad $G = DL - 2P \geq 0$ gilt, wobei D den Dimensionen (vorerst 4), L der Schleifenanzahl und P den internen Linien (\propto Propagatoren) entspricht. Für das Beispiel Glg. (2.2.3) gilt somit $G = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$, was sich, wie bereits gesehen, als logarithmische Divergenz manifestiert.

Für den Umgang mit Divergenzen wurden zahlreiche Regularisierungsschemata entwickelt, wobei entweder die Propagatoren angepasst [42, 51] oder die Dimension des Integrationsmaßes geändert wird [11, 53, 54, 61].

Dimensionale Regularisierung

In dieser Arbeit werden die Integrale dimensional regularisiert betrachtet. Dazu wird das ursprünglich physikalisch motivierte Impulsintegral in $D = 4$ Dimensionen durch ein Integral in D Dimensionen ersetzt. Hierbei wird D zu einem zusätzlichen freien Parameter, welcher keine ganze Zahl sein muss, sondern sogar komplex sein kann. Somit erhält man nach Durchführen der Integration eine Funktion, die von dem eingeführten Parameter D abhängt und deren Verhalten in der Grenzwertbildung von $D \rightarrow 4$ untersucht wird.

Betrachtet man das regularisierte Feynmanintegral I_1^D , so erhält man

$$I_1^D = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^4}.$$

Man kann wiederum eine Wick-Rotation ausführen und eine Integration in D -dimensionalen Kugelkoordinaten vornehmen, in welcher man eine Integration über den verallgemeinerten Raumwinkel ($d\Omega$), dessen Integration über die $D - 1$ -Winkel auf eine geschlossene Form einer Funktion von D führen wird, und den Radius ($dK_E \cdot K_E^{D-1}$) durchführt. Um sich ein Bild über das Verhalten der Divergenzen zu machen, ist lediglich der von K_E abhängige Teil des Integrals

$$I^D(K) = \int dK_E \frac{K_E^{D-1}}{K_E^4}$$

interessant.

Zur Analyse der IR-Divergenz, ohne die UV-Divergenz zu betrachten, wird eine obere *cut-off*-Grenze Λ eingeführt. Diese Grenze kann groß, sollte aber endlich sein. Obwohl sie in anderen Regularisierungsschemata (z.B. [42]) eine Rolle spielt, wird sie hier nur herangezogen, um die IR-Divergenz zu untersuchen und ist daher nicht weiter von Interesse. Man erhält mit Hilfe des *cut-off*'s das UV-konvergente Integral

$$I_{IR}^D = \int_0^\Lambda dK_E \frac{K_E^{D-1}}{K_E^4} .$$

In diesem Integral erkennt man sofort, dass, um eine IR-Konvergenz zu garantieren, offensichtlich $\text{Re}(D) > 4$ gelten muss.

Will man eine ähnliche Analyse für UV-Divergenzen durchführen, ist es sinnvoll sich eine leicht abgewandelte Form des Integrals I_D anzuschauen. Man könnte zum Beispiel ein ähnliches Integral mit massiven Propagatoren

$$I_{UV}^D = \int dK \frac{K^{D-1}}{(K^2 + m^2)^2}$$

betrachten, welches im Grenzfall $m \rightarrow 0$ in I^D übergeht. Damit dieses Integral für $k \rightarrow \infty$ konvergiert, muss offensichtlich $\text{Re}(D) < 4$ gelten.

Auch wenn hier nur ein Beispiel betrachtet wurde, ist das Ergebnis allgemeiner Natur. Integrale mit UV-Divergenzen konvergieren im Bereich $\text{Re}(D) < 4$ (oder sogar $\text{Re}(D) < 2$) und Integrale, die IR-Divergenzen besitzen, konvergieren für $\text{Re}(D) > 4$. Bei $D = 4$ treten Polstellen auf [59].

Diese Aussage scheint zunächst im Widerspruch zu einer dimensional Regularisierung, mit der sowohl IR- als auch UV-Divergenzen beseitigt werden können, zu stehen. Das dies trotzdem möglich ist, ist nicht trivial und es wird hier lediglich der Grundgedanke der Funktionsweise gemäß [59] skizziert.

Hat man ein Integral, welches sowohl UV- als auch IR-divergent ist, so regularisiert man die IR-Divergenz mit einem zweiten Verfahren, welches nicht dimensional regularisiert, indem man z.B. die Propagatoren massiv macht, wie es beim Übergang von $I^D \rightarrow I_{UV}^D$ gemacht wurde.

Sobald die IR-Divergenzen regularisiert wurden, kann man die Integration in einem Bereich mit $\text{Re}(D) < 4$ durchführen, in dem das Integral UV-konvergent ist. Das erhaltene Ergebnis wird von D abhängig und analytisch auf der gesamten komplexen Ebene fortsetzbar sein.

In dem Bereich $\text{Re}(D) > 4$ können, mit Hilfe des analytisch fortgesetzten Ergebnisses, die ursprünglich zur Beiseitigung der IR-Divergenz eingeführten Regulatoren entfernt werden, sodass sowohl die UV- als auch die IR-Divergenz dimensional regularisiert wurden und als Pole mit entgegengesetztem Vorzeichen bei $D = 4$ auftreten. Aus diesem Grund werden Integrale ohne externe Skala, d.h. deren Propagatoren weder von Massen noch externen Impulsen abhängen, Null gesetzt werden. Weitere nützliche Eigenschaften dimensional regulierter Integrale sind z.B. in [23] (S.9 ff.) zusammengefasst.

Die bei $D = 4$ auftretenden Pole, die aus der UV-Divergenz resultieren, lassen sich im Rahmen einer Renormierung der zu Grunde liegenden Theorie beseitigen.

Durch IR-Divergenz hervorgerufene Pole bei $D = 4$ löschen sich, unter der Annahme, dass der schlussendlich im Experiment detektierende Detektor nur eine endliche Auflösung des Phasenraums besitzt, mit IR-Divergenzen der Phasenraumintegrale aus (Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [27,34]). Grob gesprochen heißt dies, dass das Standardmodell unter der Annahme, dass ein Detektor Teilchen unterhalb einer bestimmten Energie oder eines bestimmten Abstandes nicht auflösen bzw. separieren kann, IR-konvergent ist.

Eine genauere Behandlung von Renormierung oder des KLN-Theorems würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen und ist hier auch nicht notwendig, da das Verhalten der erhaltenen Ergebnisse für $D \rightarrow 4$ nicht ausführlich betrachtet werden wird.

An dieser Stelle werde ich kurz die wichtigsten Punkte der vorhergegangenen Abschnitte zusammenfassen und hervorheben, welche Ergebnisse für das weitere Verständnis unabdingbar seien werden.

Möchte man eine theoretische Vorhersage über experimentell bestimmbare Größen eines Streuprozesses treffen, muss man dazugehörige Feynmangraphen auswerten können, die die Struktur der beteiligten Teilchen und die Art der WW widerspiegeln. Diese Graphen lassen sich mit Hilfe von Feynmanregeln in Formeln übersetzen, welche in höheren Ordnungen der störungstheoretischen Betrachtung des Prozesses auf Integrale über freie Schleifenimpulse führen, welche i.A. Tensorintegrale sind. Diese Tensorintegrale lassen sich auf zugrundeliegende Skalarintegrale reduzieren, welche in 4 Dimensionen Divergenzen aufweisen können. Man kann diese Divergenzen im Rahmen einer dimensional Regularisierung behandeln, was zur Konsequenz hat, dass die Integration über die Schleifenimpulse nun in allgemeinen D Dimensionen stattfindet. Die Wahl des Raumes, in dem die Impulse definiert sind, kann mittels Wick-Rotation zwischen Minkowski und Euklidischem Raum geändert werden. Im Rahmen dieser Arbeit stehen Großbuchstaben für euklidische und Kleinbuchstaben für Impulse in Minkowskimetrik.

Kapitel 3

Ein allgemeinerer Standpunkt

Im bisherigen Verlauf wurden die Eigenschaften der Schleifenintegrale besprochen und keines dieser Integrale, weder in vier noch in D Dimensionen, gelöst. Dies wird im weiteren Verlauf der Arbeit, bis auf wenige Ausnahmen, auch nicht geschehen, was der Tatsache geschuldet ist, dass in vielen Fällen die Methoden, um eine Lösung zu erhalten, höchstgradig nicht trivial sind.

Im weiteren Verlauf wird eine konkrete Lösungsmethode mittels Differentialgleichungen in Verbindung mit Reduktionsalgorithmen vorgestellt, mit der bereits ganze Problemklassen gelöst werden konnten [17–19].

Doch bevor diese Lösungsmethode vorgestellt werden kann, ist es sinnvoll, sich die Struktur der Integrale etwas verallgemeinert anzuschauen.

3.1 Topologien

Nach einer erfolgreichen Tensorreduktion des zu Grunde liegenden tensoriellen Feynmanintegrals wird man verschiedene, skalare Feynmangraphen mit g Beinen, l Schleifen und d internen Linien in der generischen Form

$$\int d^D k_1 d^D k_2 \dots d^D k_l \frac{\prod_{i=1}^{N_{sp}} S_i^{m_i}}{\prod_{j=1} D_j} \quad (3.1.1)$$

erhalten, wobei die l Faktoren $(2\pi)^{-D}$ der Fouriertransformation weggelassen wurden. Hierbei bezeichnen die D_j die Nenner

$$D_j = q_j^2 - m_j^2$$

der Propagatoren des Feynmangraphen, die den internen Linien des Graphen entsprechen. Von hier an, werde ich die Nenner D_j als Propagatoren bezeichnen, da diese den skalaren Propagator $\propto 1/D_j$ vollständig charakterisieren.

Die S_i sind die Skalarprodukte zwischen entweder einem externen Impuls, den Beinen des Graphen, und einem Schleifenimpuls (l) oder zwischen zwei Schleifenimpulsen und $n_i \in \mathbb{N}$

die dazugehörigen Exponenten. Das Produkt über die S_i läuft bis N_{sp} , der Anzahl aller möglichen Skalarprodukte. Dabei ist $N_{sp} = N_{lg} + N_{ll}$, wobei

$$N_{lg} = l(g - 1)$$

der Anzahl der möglichen Skalarprodukte zwischen einem externen und einem Schleifenimpuls entspricht. Hierbei ist zu beachten, dass für den gesamten Graphen Impulserhaltung gilt, sodass sich ein externer Impuls immer durch die verbleibenden $g - 1$ ausdrücken lässt. Die Anzahl der möglichen Skalarprodukte zwischen den Schleifenimpulsen N_{ll} ist nach Gaußscher Summenformel

$$N_{ll} = \frac{l(l + 1)}{2}.$$

Somit sind folglich

$$N_{sp} = l(g - 1) + \frac{l(l + 1)}{2}$$

verschiedene Skalarprodukte möglich.

Wenn in dem generischen, skalaren Feynmanintegral (Glg.: (3.1.1)) t der d Propagatoren verschieden sind, so lässt sich dieses als

$$\int d^D k_1 d^D k_2 \dots d^D k_l \frac{\prod_{i=1}^{N_{sp}} S_i^{n_i}}{\prod_{j=1}^t D_j^{m_j}}$$

schreiben, wobei $m_j, n_i \in \mathbb{N}$. Weiterhin lassen sich t der N_{sp} Skalarprodukte durch Propagatoren ausdrücken, sodass nur $q = N_{sp} - t$ der Skalarprodukte *irreduzibel* verbleiben, da sich der Rest mit Propagatoren kürzt. Wenn man anstatt der irreduziblen Skalarprodukte q Propagatoren definiert, die diese enthalten, so erhält man die *Topologie*

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q} = \int d^D k_1 d^D k_2 \dots d^D k_l \frac{1}{\prod_{j=1}^t D_j^{\mu_j} \prod_{i=1}^q D_{t+i}^{-\nu_i}}$$

mit $\mu, \nu \geq 0$, wobei Topologien wie Feynmangraphen gezeichnet und analysiert werden. Topologien werden im weiteren Verlauf der Arbeit mit kaligraphischen Buchstaben gekennzeichnet.

3.1.1 Beispiel: Von einem Feynmangraphen zur Topologie

Im folgenden soll, um das Konzept der Topologie zu verdeutlichen der Zusammenhang zwischen einem Feynmangraphen und der zugeordneten Topologie betrachtet werden, wobei dies in Analogie zu [7] gemacht wird.

Betrachtet man den massiven Feynmangraphen

$$= \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{\prod_{i=1}^5 S_i^{n_i}}{\prod_{j=1}^5 D_j} \quad (3.1.2)$$

mit $d = 5$ internen Linien, $g = 2$ Beinen, $l = 2$ Schleifenimpulsen und $N_{sp} = 2 + 3 = 5$ möglichen Skalarprodukten.

Hierbei stehen vier Skalarprodukte ($S_1 \dots S_4$) mit Propagatoren im Zusammenhang (vgl. Tab. 3.1) und sind somit reduzibel. Lediglich das Skalarprodukt $S_5 = pk_2$, welches willkürlich gewählt wurde, lässt sich nicht durch Propagatoren des ursprünglichen Graphen ausdrücken. Möchte man in einer reinen Propagatorschreibweise bleiben, so kann z.B. der Propagator

$$D_{irr} = (p - k_2)^2$$

eingeführt werden, der mit dem Skalarprodukt S_5 in Verbindung steht (Tab. 3.1).

Tabelle 3.1: Zusammenhang zwischen Propagatoren und Skalarprodukten im Feynmangraphen Glg. (3.1.2)

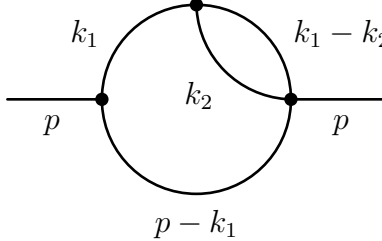
| Skalarprodukte S_i | Korrespondierende Propagatoren | Zusammenhang |
|-----------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $S_1 = k_1^2$ | $D_1 = k_1^2 - m^2$ $D_5 = k_1^2 - m^2 = D_1$ | $S_1 = D_1 + m^2$ |
| $S_2 = k_2^2$ | $D_2 = k_2^2 - m^2$ | $S_2 = D_2 + m^2$ |
| $S_3 = k_1 k_2$ | $D_3 = (k_1 - k_2)^2 - m^2$ | $S_3 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2 - D_3 + m^2)$ |
| $S_4 = pk_1$ | $D_4 = (p - k_1)^2 - m^2$ | $S_4 = \frac{1}{2}(D_1 - D_4 + p^2)$ |
| $S_5 = pk_2$ (irred.) | $D_{irr} = (p - k_2)^2$ (z.B.) | $S_5 = \frac{1}{2}(D_2 - D_{irr} + p^2)$ |

Weiterhin erkennt man, dass die Propagatoren D_1 und D_5 identisch sind, sodass sich der Feynmangraph Glg. (3.1.2) als

$$\int d^D k_1 d^D k_2 \frac{(D_1 + m^2)^{n_1} (D_2 + m^2)^{n_2} (\frac{1}{2}(D_1 + D_2 - D_3 + m^2))^{n_3} (\frac{1}{2}(D_1 - D_4 + p^2))^{n_4} S_5^{n_5}}{D_1^2 D_2 D_3 D_4}$$

schreiben lässt und eigentlich zu einer einfacheren Klasse (nur 4-Propagatoren und ein irred. Skalarprodukt) gehört.

Daher werden die Integrale aus Glg. (3.1.2) durch die *4-Nenner Topologie*



$$= \mathcal{B}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; \nu_1} = \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{1}{D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} D_3^{\mu_3} D_4^{\mu_4} D_{irr}^{-\nu_1}} \quad (3.1.3)$$

vollständig repräsentiert.

Erhält man z.B. durch die Tensorreduktion ein Feynmanintegral aus der in Gl. (3.1.2) definierten Klasse mit $n_1 = n_2 = 1$ und $n_{i>2} = 0$

$$I = \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{k_1^2 k_2^2}{D_1^2 D_2 D_3 D_4},$$

setzt die in Tab. 3.1 dargestellten Zusammenhänge ein

$$I = \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{(D_1 + m^2)(D_2 + m^2)}{D_1^2 D_2 D_3 D_4}$$

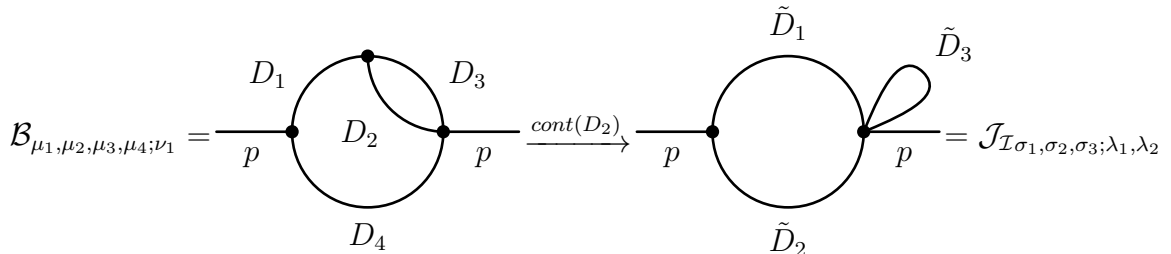
und vereinfacht so weit wie möglich

$$I = \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{1}{D_1 D_3 D_4} + \frac{m^2}{D_1^2 D_3 D_4} + \frac{m^2}{D_1 D_2 D_3 D_4} + \frac{m^4}{D_1^2 D_2 D_3 D_4},$$

so lässt sich das Ergebnis vollständig durch Elemente der 4-Nenner Topologie (Glg. (3.1.3)) darstellen. Das beschriebene Verfahren wird als *triviale Tensorreduktion* bezeichnet [7] und führt bei dem betrachteten Beispiel auf

$$I = \mathcal{B}_{1,0,1,1;0} + m^2 \mathcal{B}_{2,0,1,1;0} + m^2 \mathcal{B}_{1,1,1,1;0} + m^4 \mathcal{B}_{2,1,1,1;0} \quad (3.1.4)$$

In Glg. 3.1.4 erkennt man, dass die triviale Tensorreduktion in den ersten beiden Termen den Propagator D_2 rausgekürzt hat. Diese beiden Terme kann man als einer *3-Nenner Subtopologie* zugehörig klassifizieren, wobei das vollständige kürzen des Propagators als *Kontraktion* über D_2 bezeichnet wird. Diese Kontraktion lässt sich graphisch durch



$$\mathcal{B}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; \nu_1} = \text{Diagram} \xrightarrow{\text{cont}(D_2)} \text{Diagram} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \lambda_1, \lambda_2}}$$

darstellen. Man kontrahiert somit einen Propagator graphisch, indem man die dem Propagator zugehörige interne Linie auf einen Punkt zusammenzieht. Dabei gilt für die “neuen” Propagatoren z.B.

$$\begin{aligned} D_1 &\rightarrow \tilde{D}_1 = k_1^2 - m^2 = D_1 \\ D_4 &\rightarrow \tilde{D}_2 = (p - k_1)^2 - m^2 = D_4 \\ D_3 &\rightarrow \tilde{D}_3 = k_2^2 - m^2 (= D_2) \neq D_3 = (k_1 - k_2)^2 - m^2. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Das der Übergang von $D_3 \rightarrow \tilde{D}_3$ möglich ist, liegt an der Forderung, dass dimensional regulierte Feynmanintegrale translationsinvariant sind [61]. Somit ist innerhalb des Integrals die Substitution $k_1 - k_2 \rightarrow \tilde{k}_2 = k_2$ möglich, sodass man, wenn man die Kontraktion wie oben beschrieben graphisch definiert und anschließend den Graphen mit Feynmanregeln analysiert, auf das selbe Ergebnis kommt.

Mit Hilfe der eingeführten 3-Nenner Subtopologie $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ lässt sich das nach der trivialen Tensorreduktion erhaltene Ergebnis Glg.(3.1.4) als

$$I = \mathcal{J}_{\mathcal{I}1,1,1;0,0} + m^2 \mathcal{J}_{\mathcal{I}2,1,1;0,0} + m^2 \mathcal{B}_{1,1,1,1;0} + m^4 \mathcal{B}_{2,1,1,1;0}$$

schreiben, wobei die Propagatoren in Tab. 3.1 respektive Glg. (3.1.5) definiert sind.

In den kommenden Abschnitten wird der Vorteil der kompakten *Topologie*-Notation offensichtlich, daher werden an dieser Stelle die wichtigsten Punkte kurz zusammengefasst. In einer Topologie werden Feynmangraphen notiert, die ausschließlich einen minimalen Satz irreduzibler Skalarprodukte und Propagatoren enthalten. Durch Angabe der Propagatoren und der irreduziblen Skalarprodukte ist eine Topologie vollständig charakterisiert. Eine Angabe spezieller Indizes führt auf ein Feynmanintegral der Topologie. Enthält dieses Feynmanintegral nicht den vollen Satz an Propagatoren, kann es als einer Subtopologie zugehörig charakterisiert werden, wobei die Kontraktion über den Propagator als ein “zusammenziehen” der internen Linie auf einen Punkt graphisch umgesetzt wird.

Kapitel 4

IBP-Reduktion auf Masterintegrale

Im folgenden wird der Vorteil der kompakten Notation ganzer Klassen von Feynmanintegralen als Topologie offensichtlich werden. Es wird sich zeigen, dass sich das Lösen ganzer Topologien beliebiger Indizes, mit Hilfe von *integration-by-parts*-Identitäten (IBP) [14], auf das Lösen weniger, irreduzibler *Masterintegrale* (MIs) reduziert. Eine vollständigere Übersicht, als sie im Rahmen dieser Arbeit gegeben wird, kann in [22] oder [50] gefunden werden, wobei sich der generelle Aufbau und die Wahl der Beispiele des folgenden Abschnittes an [50] orientiert.

Der Grundgedanke der IBP-Reduktion ist, dass das Integral einer totalen Divergenz verschwindet, sodass sich mit

$$\int d^D k_1 \dots d^D k_l \frac{\partial}{\partial k_i^\sigma} [v^\sigma T_{\mu_1, \dots, \mu_t; \nu_1, \dots, \nu_q}] = 0$$

Identitäten zwischen Integralen der Topologie $T_{\mu_1, \dots, \mu_t; \nu_1, \dots, \nu_q}$ und $T_{\mu_1+a_1, \dots, \mu_t+a_t; \nu_1+a_{t+1}, \dots, \nu_q+a_{t+q}}$ mit $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ herleiten lassen. Hierbei bezeichnet k_i einen der $i = 1, 2, \dots, l$ Schleifenimpulse und v einen der unabhängigen Vektoren $k_1, \dots, k_l, p_1, \dots, p_{g-1}$ der Topologie.

Am Ende einer IBP-Reduktion steht ein Satz von *Masterintegralen* (MIs), welche sich nicht weiter mit Hilfe von IBP-Identitäten vereinfachen lassen. Im folgenden wird das Reduktionsverfahren an der *3-Nenner Topologie* $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ aus Abs. 3.1.1 verdeutlicht.

4.1 Beispiel einer IBP-Reduktion

Die Analyse des Graphen der Topologie

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= \int d^D k_1 \frac{1}{D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2}} \int d^D k_2 \frac{1}{D_3^{\mu_3}} \\
&= \int d^D k_1 \frac{1}{(k_1^2 - m^2)^{\mu_1} ((p - k_1)^2 - m^2)^{\mu_2}} \int d^D k_2 \frac{1}{(k_2^2 - m^2)^{\mu_3}} \\
&= \text{Diagram} \tag{4.1.1}
\end{aligned}$$

zeigt auf, dass die dem Graphen zugehörigen Integrale separieren. Dies ist immer der Fall, sobald ein Subgraph nur über einen Vertex mit dem Rest des Diagrammes verbunden ist [22].

Die IBP-Identität

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^\nu}{D_3^\mu} = 0$$

für die massive Vakuumblase \mathcal{I}_μ führt auf

$$\begin{aligned}
\int \left(\left(\frac{\partial}{\partial k^\nu} k^\nu \right) \frac{1}{D_3^\mu} + k^\nu \left(\frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{1}{(k_\sigma k^\sigma - m^2)^\mu} \right) \right) d^D k &= \int \left(\frac{D}{D_3^\mu} - \underbrace{2\mu \frac{k^2}{D_3^{\mu+1}}}_{k^2 = D_3 + m^2} \right) d^D k \\
&= \int \left(\frac{D - 2\mu}{D_3^\mu} - \frac{2\mu m^2}{D_3^{\mu+1}} \right) d^D k \\
&= (D - 2\mu) \mathcal{I}_\mu - 2\mu m^2 \mathcal{I}_{\mu+1} \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Somit erhält man mit $\mu \rightarrow \mu - 1$ die Rekursionsvorschrift

$$\mathcal{I}_\mu = \frac{D - 2\mu + 2}{2(\mu - 1)m^2} \mathcal{I}_{\mu-1} , \tag{4.1.2}$$

aus welcher ersichtlich wird, dass sich alle Integrale mit beliebigem Exponenten $\mu > 1$ des Propagators auf das MI \mathcal{I}_1 reduzieren lassen.

Für das massive 1-Schleifen 2-Nenner Integral $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ der *3-Nenner-Topologie* werden die IBP-Identitäten

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{p^\nu}{(k_1^2 - m^2)^{\mu_1} ((p - k_1)^2 - m^2)^{\mu_2}} = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^\nu}{(k_1^2 - m^2)^{\mu_1} ((p - k_1)^2 - m^2)^{\mu_2}} = 0 \quad (4.1.4)$$

betrachtet. Diese führen auf die Relationen

$$(4.1.3) \Leftrightarrow 0 = (-\mu_1 + \mu_2 - p^2 \mu_1 \mathbb{1}^+ + p^2 \mu_2 \mathbb{2}^+ - \mu_2 \mathbb{2}^+ \mathbb{1}^- + \mu_1 \mathbb{1}^+ \mathbb{2}^-) \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} \quad (4.1.5)$$

$$(4.1.4) \Leftrightarrow 0 = (D - 2\mu_1 - \mu_2 - 2m^2 \mu_1 \mathbb{1}^+ - 2m^2 \mu_2 \mathbb{2}^+ + p^2 \mu_2 \mathbb{2}^+ - \mu_2 \mathbb{2}^+ \mathbb{1}^-) \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}, \quad (4.1.6)$$

wobei die Operatoren $\mathbb{1}^\pm \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = \mathcal{J}_{\mu_1 \pm 1, \mu_2}$ und $\mathbb{2}^\pm \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2 \pm 1}$ wie Leiteroperatoren auf die Indizes wirken, d.h. den Exponenten μ_i des *i*ten Propagators um ± 1 verändern. Durch das Umstellen der IBP-Relationen nach $\mathcal{J}_{\mu_1+1, \mu_2}$ bzw. $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2+1}$ sowie der Umbenennung $\mu_1 + 1 \rightarrow \mu_1$ bzw. $\mu_2 + 1 \rightarrow \mu_2$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = & \frac{(p^2(-D + \mu_1 + 2\mu_2 - 1) + 2m^2(\mu_1 - \mu_2 - 1))}{(\mu_1 - 1)p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1-1, \mu_2} \\ & + \frac{2m^2 \mu_2}{(\mu_1 - 1)p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1-2, \mu_2+1} + \frac{(p^2 - 2m^2)}{p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2-1} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = & \frac{(p^2(-D + \mu_2 + 2\mu_1 - 1) + 2m^2(\mu_2 - \mu_1 - 1))}{(\mu_2 - 1)p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2-1} \\ & + \frac{2m^2 \mu_1}{(\mu_2 - 1)p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1+1, \mu_2-2} + \frac{(p^2 - 2m^2)}{p^2(p^2 - 4m^2)} \mathcal{J}_{\mu_1-1, \mu_2} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

als Rekursionsgleichungen, wobei $\mu_1 + \mu_2$ auf der rechten Seite immer um eins größer als auf der linken Seite ist.

Weiterhin gehen die Gleichungen (4.1.7) und (4.1.8) unter Vertauschung der Indizes ineinander über. Dies spiegelt die Symmetrie $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = \mathcal{J}_{\mu_2, \mu_1}$ des Graphen (vgl. Glg. (4.1.1)) bei der Wahl gleicher Propagatormassen wider.

Die Reduktionsgleichung zeigt weiterhin, welche MIs nach vollständiger Reduktion auftreten werden.

Offensichtlich ist eine Reduktion des Integrals mit Glg. (4.1.7), auf Grund der Singularität in den ersten beiden Termen, nur bis $\mu_1 = 1, \mu_2$ (auf der rechten Seite) möglich. Anschließend kann entweder die Symmetrie des Problems oder äquivalent Glg. (4.1.8) genutzt werden, um μ_2 bis $\mu_2 = 1$ zu reduzieren. Man erhält folglich das MI $\mathcal{J}_{1,1}$.

Die unterstrichenen Terme in Glg. (4.1.7) und (4.1.8) werden bei der Reduktion auf Integrale der Form $\mathcal{J}_{\sigma,0}$ mit $\sigma \in \mathbb{N}$ führen. Diese sind mit Glg. (4.1.2) auf das MI \mathcal{I}_1 reduzierbar.

Die komplette Lösung jedes Integrales aus der *3-Nenner Topologie* mit beliebigen Exponenten

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\mathcal{I}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}} &= \int d^D k_1 \frac{1}{(k_1^2 - m^2)^{\mu_1} ((p - k_1)^2 - m^2)^{\mu_2}} \int d^D k_2 \frac{1}{(k_2^2 - m^2)^{\mu_3}} \\ &= C_1(\mu_1, \mu_2, D, p^2, m^2) \mathcal{J}_{1,1} + C_2(\mu_1, \mu_2, \mu_3, D, p^2, m^2) \mathcal{I}_1\end{aligned}$$

lässt sich folglich auf die Kenntnis der Lösung der zwei MIs $\mathcal{J}_{1,1}$ und \mathcal{I}_1 zurückführen, wobei die C_i Polynomen in m^2 , p^2 und D entsprechen.

4.2 Laportas Algorithmus

Im vorhergehenden Abschnitt wurde für zwei einfache Fälle eine IBP-Reduktion argumentativ vorgeführt. Bei schwierigeren Topologien mit l Schleifen und g externen Beinen werden $l(g - 1 + l)$ -IBP-Relationen auftreten und deren Lösung wird zunehmend komplexer.

Ein Algorithmus, der eine systematische Reduktion auf MIs möglich macht, ist der Laporta-Algorithmus [30, 31], dessen Grundgedanke im folgenden kurz vorgestellt werden wird.

In Laportas Algorithmus betrachtet man nicht die IBP-Relation der Topologie als ganzes mit beliebigen Indizes sondern die Integrale mit einem bestimmten Indexsatz $(\mu_1, \dots, \mu_t, \nu_1, \dots, \nu_q)$ als Unbekannte, zwischen denen Relationen bestehen. Dass immer genug Relationen auffindbar sind, hängt mit der Beobachtung zusammen, dass die Anzahl der Relationen zwischen den Integralen, die bei Erhöhung der Indizes hinzukommen, schneller wächst, als die Anzahl hinzukommender, unbekannter Integrale [31], welche durch den Beweis, dass für Standardtopologien nur eine endliche Anzahl an MIs existieren [49], bestätigt wurde.

Man erhält somit, wenn man die Indizes ausreichend hoch wählt, ein überbestimmtes Gleichungssystem dessen Lösung Relationen definiert, in denen die MIs willkürlich sind. Laportas Algorithmus gibt einen Ausweg aus der willkürlichen Wahl der MIs, indem er eine globale Ordnung des Systems einführt, welche sicherstellt, dass der Satz der MIs möglichst einfach zu lösen ist. Der Grad der Komplexität des Integrals und eine daraus resultierende Ordnung des Systems, basiert dabei z.B. auf den folgenden Erkenntnissen (angelehnt an [30]).

1. Integrale mit weniger Propagatoren sind oft einfacher zu lösen, d.h.:

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_t, \nu_1, \dots, \nu_q} \succ \mathcal{T}'_{\sigma_1, \dots, \sigma_{t-a}, \lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{q}}} \text{ mit } a > 0 \quad .$$

2. Integrale mit gleicher Anzahl an Propagatoren für die

$$\sum_{n=1}^t (\mu_n) > \sum_{n=1}^t (\sigma_n)$$

gilt, werden gemäß

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \dots, \mu_t, \nu_1, \dots, \nu_q} \succ \mathcal{T}'_{\sigma_1, \dots, \sigma_t, \lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{q}}}$$

geordnet, sodass Integrale deren Summe der Propagatorexponenten im Nenner größer ist, als schwieriger zu lösen angenommen werden.

Im Allgemeinen werden die beiden vorgestellten Kriterien nicht ausreichen, um das System vollständig zu ordnen und man wählt für die Implementierung eines Laporta Algorithmus eine Vielzahl an Subkriterien, die eine komplette Ordnung des Systems gewährleisten (z.B. [30, 48, 52]). Hierbei wird eine Variation der Kriterien i.A. auf verschiedene MIs führen.

Möchte man zum Beispiel die Integrale F_k durch MIs ausdrücken, so erzeugt man die dazugehörigen $i = l(g - k + l)$ IBP-Relationen für jedes der k Integrale. Die erhaltenen IBP-Relationen werden nach dem schwierigsten Integral $S_{i,k}$ umgestellt, welches durch die eingeführte Ordnung des Systems festgelegt ist. Anschließend wird ermittelt, ob sich jedes Integral V_j , von dem $S_{i,k}$ abhängt, durch einfachere Integrale ausdrücken lässt. Ist dies nicht der Fall, werden durch Erhöhung der Indizes neue Integralrelationen erzeugt. Die Integrale $M \in V$, für die kein Ausdruck durch einfachere Integrale gefunden werden kann, werden zu einem MI. Nachdem das System vollständig geordnet vorliegt und jedes Integral (bis auf die MI) ausschließlich von Integralen niedrigerer Komplexität abhängt, werden die IBP-Relationen, angefangen von den einfachsten Integralen, in aufsteigender Ordnung substituiert [30] und man erhält jedes F_k als Linearkombination der MI.

4.2.1 Beispiel der Anwendung des Laporta Algorithmus

Im folgenden werden wieder die massiven 1-Schleifen 2-Nenner Integrale mit den bereits bekannten IBP-Relationen Glg. (4.1.5), (4.1.6)

$$\begin{aligned} L_1(\mu_1, \mu_2) &= (D - 2\mu_1 - \mu_2) \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} - 2m^2 \mu_1 \mathcal{J}_{\mu_1+1, \mu_2} - (2m^2 \mu_2 - p^2 \mu_2) \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2+1} - \mu_2 \mathcal{J}_{\mu_1-1, \mu_2+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(\mu_1, \mu_2) &= (-\mu_1 + \mu_2) \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} - p^2 \mu_1 \mathcal{J}_{\mu_1+1, \mu_2} + p^2 \mu_2 \mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2+1} - \mu_2 \mathcal{J}_{\mu_1-1, \mu_2+1} + \mu_1 \mathcal{J}_{\mu_1+1, \mu_2-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

in dem Sektor $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ betrachtet. Die Symmetrie des Graphen $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2} = \mathcal{J}_{\mu_2, \mu_1}$ wird direkt ausgenutzt. Weiterhin wird die Größe $M = \mu_1 + \mu_2$ eingeführt und überprüft, ab welchem M der Algorithmus stabil läuft.

Für $M = 1$ erhält man die IBP-Relationen

$$\begin{aligned} L_1(1, 0) &= (-2 + d) \mathcal{J}_{0,1} - 2m^2 \mathcal{J}_{0,2} = 0, \\ L_2(1, 0) &= \mathcal{J}_{-1,2} - \mathcal{J}_{0,1} - p^2 \mathcal{J}_{0,2} = 0 \end{aligned}$$

und somit nach Lösung des Systems die geordneten Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{0,2} &= \frac{(-2 + D)}{2m^2} \mathcal{J}_{0,1}, \\ \mathcal{J}_{-1,2} &= \frac{2m^2 - 2p^2 + dp^2}{2m^2} \mathcal{J}_{0,1}. \end{aligned}$$

Für $M = 2$ erhält man die fünf IBP-Relationen

$$L_1(1, 0) = (D - 2)\mathcal{J}_{0,1} - 2m^2\mathcal{J}_{0,2} = 0, \quad L_2(1, 0) = \mathcal{J}_{-1,2} - \mathcal{J}_{0,1} - p^2\mathcal{J}_{0,2} = 0, \quad (4.2.1)$$

$$L_1(2, 0) = (D - 4)\mathcal{J}_{0,2} - 4m^2\mathcal{J}_{0,3} = 0, \quad L_2(2, 0) = 2\mathcal{J}_{-1,3} - 2\mathcal{J}_{0,2} - 2p^2\mathcal{J}_{0,3} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$L_1(1, 1) = (D - 3)\mathcal{J}_{1,1} + (p^2 - 4m^2)\mathcal{J}_{1,2} - \mathcal{J}_{0,2} = 0, \quad L_2(1, 1) = 0 = 0, \quad (4.2.3)$$

mit der Ordnungsvorschrift

$$\mathcal{J}_{1,2} \succ \mathcal{J}_{1,1} \succ \mathcal{J}_{-1,3} \succ \mathcal{J}_{-1,2} \succ \mathcal{J}_{3,0} \succ \mathcal{J}_{0,2} \succ \mathcal{J}_{0,1}.$$

Die geordneten Relationen, die man aus Glg. (4.2.1),(4.2.2) und (4.2.3) erhält, sind somit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{0,2} &\stackrel{L_1(1,0)}{\equiv} \frac{(D-2)}{2m^2}\mathcal{J}_{0,1}, \\ \mathcal{J}_{0,3} &\stackrel{L_1(2,0)}{\equiv} \frac{(D-4)}{4m^2}\mathcal{J}_{0,2} \stackrel{L_1(1,0)}{\equiv} \frac{(D-4)(D-2)}{8m^4}\mathcal{J}_{0,1}, \\ \mathcal{J}_{-1,2} &\stackrel{L_2(1,0)}{\equiv} p^2\mathcal{J}_{0,2} + \mathcal{J}_{0,1} \stackrel{L_1(1,0)}{\equiv} \frac{1}{2}\left(\frac{(D-2)p^2}{m^2} + 2\right)\mathcal{J}_{0,1}, \\ \mathcal{J}_{-1,3} &\stackrel{L_2(2,0)}{\equiv} p^2\mathcal{J}_{0,3} + \mathcal{J}_{0,2} \stackrel{L_1(2,0), L_1(1,0)}{\equiv} \frac{(D-2)((D-4)p^2 + 4m^2)}{8m^4}\mathcal{J}_{0,1}, \\ \mathcal{J}_{1,2} &\stackrel{L_1(1,1)}{\equiv} \frac{\mathcal{J}_{0,2} - (D-3)\mathcal{J}_{1,1}}{p^2 - 4m^2} \stackrel{L_1(1,0)}{\equiv} \frac{(D-3)}{4m^2 - p^2}\mathcal{J}_{1,1} + \frac{(2-D)}{m^2(8m^2 - 2p^2)}\mathcal{J}_{0,1} \end{aligned}$$

und man erkennt, dass die einzigen zwei Integrale, die sich nicht durch einfachere Integrale ausdrücken lassen, die beiden MIs $\mathcal{J}_{0,1} = \mathcal{I}_1$ und $\mathcal{J}_{1,1}$ sind, welche bereits in Abs. 4.1 gefunden wurden. Weiterhin ist Laportas Algorithmus in diesem Beispiel bereits ab $M = 1$ stabil, da für jedes Integral ein Ausdruck durch einfachere, nicht reduzierbare Integrale gefunden werden kann und man würde bei $M = 5$ ein überbestimmtes Gleichungssystem erhalten.

Diese Stabilisierung tritt i.A. allerdings erst bei sehr viel größeren M auf, sodass in vielen Fällen (auch im Rahmen dieser Arbeit) ein System tausender von Gleichungen gelöst werden muss. Für die Reduktion wurde im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich FIRE5 [47], welches auf einer Kombination von MATHEMATICA [63] und C++-Code basiert und Reduze 2 [58], welches ausschließlich auf C++ basiert, verwendet.

Kapitel 5

Differentialgleichungen für Feynmanintegrale

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass sich die Berechnung der Integrale ganzer Topologien auf die Berechnung weniger MIs reduzieren lässt, welche in vielen Fällen äußerst trickreich ist.

Eine indirekte Methode um ein analytisches Ergebnis der MIs zu finden, wurde Anfang der 90er Jahre von Kotikov [28] etabliert. Sie basiert auf der Differentiation der MIs nach den Propagatormassen und einer anschließenden IBP Reduktion. Das so erhaltene System von Differentialgleichungen (DGLs) enthält die MIs als Funktionen der Massen, deren Bestimmung mit Hilfe von Standardverfahren zur Lösung von DGLs in Angriff genommen werden kann. Eine Verallgemeinerung der Methode auf DGLs in beliebigen Mandelstamvariablen der Topologie fand durch Remiddi [45] statt.

Im weiteren Verlauf wird diese DGL-Methode an dem bereits bei der IBP-Reduktion betrachteten Beispiel der massiven 1-Schleifen 2-Nenner Topologie $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ verdeutlicht und anschließend die in der Arbeit verwendete Methodik zum Auffinden der MIs und DGLs erläutert.

5.1 Die Lösung des MIs der massiven 1-Schleifen 2-Nenner Topologie $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$

Wie bereits betrachtet, lässt sich jedes Integral aus $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ auf die beiden MIs \mathcal{I}_1 und $\mathcal{J}_{1,1}$ reduzieren. Dabei entspricht das Integral \mathcal{I}_1 einem Vakuumdiagramm, welches in der Literatur häufig als “Tadpole” (Kaulquappe) bezeichnet wird und dessen Lösung in der folgenden Rechnung als bekannt vorausgesetzt wird (für explizite Berechnung siehe Anhang A.1).

Das zu lösende Integral $\mathcal{J}_{1,1}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} \mathcal{J}_{1,1}(s) = \frac{(D-2)}{s(4m^2-s)} \mathcal{I}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{D-3}{s-4m^2} - \frac{1}{s} \right) \mathcal{J}_{1,1}(s) \quad , \quad (5.1.1)$$

die man durch Differentiation nach der kinematischen Variablen $s = p_\mu p^\mu$ erhält. Es ist zu erkennen, dass beide MIs der Topologie in der DGL auftreten. Dies ist plausibel, aber man kann es vor der expliziten Berechnung der DGL nicht mit Sicherheit sagen.

Ein Übergang in euklidische Metrik mittels Wick-Rotation (vgl. Abs. 2.2.1) kann durch die Substitution

$$\mathcal{J}_{1,1}(p^2) \rightarrow i\mathcal{J}_{1,1}^E(P^2), \mathcal{I}_1 \rightarrow -i\mathcal{I}_1^E \text{ und } s \rightarrow -P^2 = -t$$

erreicht werden, sodass Glg. (5.1.1) in

$$\frac{d\mathcal{J}_{1,1}^E(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{D-3}{4m^2+t} - \frac{1}{t} \right) \mathcal{J}_{1,1}^E(t) - \frac{(D-2)}{t(4m^2+t)} \mathcal{I}_1^E \quad (5.1.2)$$

übergeht, wobei der hochgestellte Index, der die euklidische Metrik indiziert, im Folgenden weggelassen wird. Dies ist offensichtlich eine inhomogene, lineare, gewöhnliche DGL erster Ordnung

$$\frac{dy(x)}{dx} = p(x)y(x) + q(x)$$

deren Lösung als Superposition der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung, z.B. mittels Standardverfahren wie einer Variation der Konstanten

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C e^{\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + 1 \right),$$

gefunden werden kann.

Die Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}_{1,1}^h(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{D-3}{4m^2+t} - \frac{1}{t} \right) \mathcal{J}_{1,1}^h(t) \\ \Rightarrow \mathcal{J}_{1,1}^h(t) &= C e^{\int \frac{1}{2} \left(\frac{D-3}{4m^2+t} - \frac{1}{t} \right) dt} = C e^{\frac{1}{2}((D-3)\ln(4m^2+t) - \ln(t))} = C \frac{(4m^2+t)^{\frac{1}{2}(D-3)}}{t^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ist durch triviale Integration berechenbar.

Eine Variation der Konstanten gemäß $C \rightarrow C(t)$, die die DGL

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{(D-2)}{t(4m^2+t)} \mathcal{I}_1 \cdot (\mathcal{J}_{1,1}^h(t))^{-1}$$

erfüllt, führt nach einsetzen der homogenen Lösung auf

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{(D-2)(4m^2+t)^{\frac{1}{2}-\frac{D}{2}}}{\sqrt{t}} \mathcal{I}_1. \quad (5.1.3)$$

Das Integral \mathcal{I}_1 in der Inhomogenität hat die Lösung

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)}{(m^2)^{\frac{2-D}{2}}},$$

die für beliebige Exponenten des Propagators $n > 0$ im Anhang A.1 berechnet wurde. $\Gamma(x)$ ist die Γ -Funktion, welche bis auf die Punkte $x = -n$ mit $n \in \mathbb{N}$, an der sie Polstellen mit

den Residuen $(-1)^n/n!$ besitzt, auf der gesamten komplexen Ebene analytisch ist [3]. Das einsetzen von \mathcal{I}_1 in Glg. (5.1.3) ergibt

$$\begin{aligned} C(t) &= \underbrace{\left(2\pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right)}_{K(m,D)} \int dt (4m^2 + t)^{-\frac{D-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \\ &= K(m, D) \int dt (4m^2 + t)^{-\frac{D-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Hierbei wurde in $K(m, D)$ die Rekursionsrelation (vgl. [3], S. 256)

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (5.1.5)$$

der Gamma-Funktion benutzt, welche auch im weiteren Verlauf der Rechnung noch hilfreich sein wird.

Das Integral (5.1.4) ist nicht ohne etwas Aufwand integrierbar. Daher werde ich, die weiteren Schritte grob skizzieren, damit in der folgenden Rechnung klar bleibt, warum gewisse Umformungen getätigt werden und dass diese nicht willkürlich, sondern zielorientiert erfolgen.

Das Integral Glg. (5.1.4) besitzt die generische Form $\int dx m(x)^{-a} n(x)^{-b}$. Diese Form ist ähnlich zu der von Schleifenintegralen. Auch wenn in dieser Arbeit lediglich indirekte Lösungsmethoden (IBP und DGLs) betrachtet werden, gibt es direkte Ansätze, die auf der “sofortigen” Integration der Schleifenintegrale als Ausgangspunkt basieren. Daher existieren im Umgang mit Integralen dieser Form eine Vielzahl von Funktionen und Tricks, basierend auf diversen Parameterdarstellungen der Integrale, die in diesem Zusammenhang zur Hilfe gezogen werden können (die bereits gesehene Γ -Funktion ist eine davon).

Die Rechnung wird die folgenden Hauptpunkte enthalten:

1. Finde eine passende Parametrisierung, die die t -Integration trivial werden lässt.
2. Bringe das Ergebnis mit einer bekannten Funktionsdarstellung in Übereinstimmung.
3. Manipuliere das Ergebnis, um eine bequeme Anpassung der Randbedingungen vornehmen zu können.

Die Parametrisierung,

$$\frac{1}{A_1^\lambda B_2^\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \int_0^\infty \frac{x^{\lambda_2-1}}{(A + Bx)^{\lambda_1+\lambda_2}}$$

die gewählt wird um die t -Integration zu vereinfachen, steht in Beziehung zu einer direkten Entwicklung des Schleifenintegrals in sogenannte “Feynmanparameter” (Kap. 3.4 in [50]). Es handelt sich aber lediglich um einen mathematischen Trick, welcher sich z.B. mit MATHEMATICA [63] sofort überprüfen lässt.

Die Anwendung dieses Tricks auf Glg. (5.1.4) mit der Wahl

$$A = (4m^2 + t), \quad B = t, \quad \lambda_1 = \frac{D-1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

führt auf

$$C(t) = K(m, D) \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} \int dt \frac{1}{(4m^2 + t(1+x))^{\frac{D}{2}}} . \quad (5.1.6)$$

In Glg. (5.1.6) kann, mit Hilfe dieser Parametrisierung, die t -Integration sofort ausgeführt werden und man erhält

$$\begin{aligned} C(t) &= K(m, D) \frac{2}{(2-D)} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} (4m^2 + t(1+x))^{-\frac{D}{2}+1} (1+x)^{-1} + C \\ &= K(m, D) \frac{2t^{\frac{2-D}{2}}}{(2-D)} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty dx x^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-1} \left(x+1 + \frac{4m^2}{t}\right)^{\frac{2-D}{2}} + C . \end{aligned}$$

Der Vergleich mit einer Integraldarstellung der hypergeometrischen Gaußfunktion [62]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^\infty dt t^{-b+c-1} (t+1)^{a-c} (t-z+1)^{-a}$$

mit $\Re(c) > \Re(b) > 0 \wedge |\arg(1-z)| < \pi$

zeigt, dass es sich bei der verbleibenden x -Integration in $C(t)$ um eine Darstellung von ${}_2F_1(a, b; c; z)$ mit

$$a = \frac{D-2}{2}, \quad b = \frac{D-1}{2}, \quad c = \frac{D}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{-4m^2}{t}$$

handelt, sodass sich

$$C(t) = \frac{4(m^2)^{\frac{D-2}{2}} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{4-D}{2})}{2-D} t^{\frac{2-D}{2}} {}_2F_1\left(\frac{D-2}{2}, \frac{D-1}{2}; \frac{D}{2}; -\frac{4m^2}{t}\right) + C$$

ergibt.

Somit erhält man die Lösung der DGL (5.1.2) als Superposition der homogenen und der partikulären Lösung zu

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1,1} &= (C\mathcal{J}_{1,1}^h + \mathcal{J}_{1,1}^h C(t)) = C_1 \frac{(4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}}}{\sqrt{t}} \\ &+ \frac{(4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}} {}_2F_1\left(\frac{D-2}{2}, \frac{D-1}{2}; \frac{D}{2}; -\frac{4m^2}{t}\right) \left(4\pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D-2}{2}} t^{\frac{2-D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)\right)}{(2-D)\sqrt{t}} . \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Bevor die Randbedingungen der Lösung angepasst werden, ist es sinnvoll, diese noch etwas weiter zu manipulieren. Dies ist möglich, da es während des Lösungsweges gelungen

ist, die Integraldarstellung von ${}_2F_1$ zu kreieren, für welche eine Vielzahl an Relationen existieren. Nutzt man z.B. die lineare Transformationsrelation (Glg. 15.3.7 in [3])

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(-z)^{-a} \Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z}\right) \\ + \frac{(-z)^{-b} \Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} {}_2F_1\left(b, b-c+1; -a+b+1; \frac{1}{z}\right) \quad ; (|\arg(1-z)| < \pi)$$

im Zusammenhang mit der Eigenschaften

$${}_2F_1(a, 0; c; z) = 1, \quad {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

so lässt sich das Ergebnis Glg. (5.1.7) auf die Form

$$\mathcal{J}_{1,1} = C_1 \frac{(4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}}}{\sqrt{t}} - \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \left(2^{4-D} \pi^{\frac{D+1}{2}} (4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}}\right)}{\sqrt{t} \left((D-2) \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)\right)} \\ + \frac{2^{3-D} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right)}{m} \quad (5.1.8)$$

bringen, wobei im zweiten Term die Relation (5.1.5) verwendet wurde. Diese etwas längliche Form ist gut geeignet um die Randbedingungen anzupassen, da die ersten beiden Terme das gleiche Divergenzverhalten im Grenzfall $t \rightarrow 0$ aufweisen.

Die ursprüngliche Darstellung des Integrals

$$\mathcal{J}_{1,1}^E = \int dK^D \frac{1}{(K^2 + m^2)((P-K)^2 + m^2)} \quad (5.1.9)$$

ist im Grenzfall $P \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ nicht singulär. Daher ist die Forderung an ein reguläres Verhalten der Lösung Glg. (5.1.8) als Randbedingung erforderlich, welche durch die Wahl

$$C_1 = \frac{2^{4-D} \pi^{\frac{D}{2} + \frac{1}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{(D-2) \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}$$

gewährleistet wird. Das Ergebnis mit angepassten Randbedingungen ist

$$\mathcal{J}_{1,1} = \frac{2^{3-D} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (4m^2 + t)^{\frac{D-3}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{D-1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right)}{m}.$$

Wendet man noch die Identität (Glg. (15.3.3) in [3])

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z)$$

an, so erhält man das Endergebnis

$$\mathcal{J}_{1,1} = \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D-4}{2}} {}_2F_1\left(1, \frac{4-D}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right), \quad (5.1.10)$$

welches den definierten Grenzwert

$$\mathcal{J}_{1,1}(t=0) = \pi^{\frac{D}{2}} m^{D-4} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$$

besitzt, wobei von ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$ Gebrauch gemacht wurde. Dieser Grenzfall ist das Tadpoleintegral \mathcal{I}_2 aus Glg. (A.1.3) in euklidischer Metrik. Das dies der Fall sein muss, erkennt man sofort, bei Durchführung des Limes $P \rightarrow 0$ in Glg. (5.1.9).

Dass sowohl die allgemeine Lösung Glg. (5.1.7) als auch Glg. (5.1.10) die DGL (5.1.2) erfüllen, wurde unter Zuhilfenahme von MATHEMATICA [63] überprüft. Der letzte Schritt, der erst an späterer Stelle in Abs. 7.1 durchgeführt werden wird, ist die Untersuchung des Verhaltens der Lösung bei einem Übergang zu den physikalischen $D = 4$ Dimensionen, was durch die Entwicklung von $D = 4 - 2\epsilon$ um $\epsilon = 0$ in eine Laurent-Reihe erfolgen wird.

Abschließend soll diese zugegebenermaßen sehr konkrete Beispielrechnung in einen etwas allgemeineren Rahmen eingebettet werden, da man an ihr bereits gewisse Eigenheiten dieser Lösungsmethode verdeutlichen kann.

Der erste, wenn auch offensichtliche, so doch wesentliche Punkt dieser Lösungsmethode ist die Kenntnis der Lösung der in der DGL auftretenden MIs der Subtopologien (im Beispiel \mathcal{I}_1). Ohne diese Kenntnis ist eine Integration der Inhomogenität ein aussichtsloses Unterfangen.

Das in dem Beispiel aufgetretene MI \mathcal{I}_1 besitzt eine von t unabhängige Lösung und führt daher bei der Integration nicht zu zusätzlichen Schwierigkeiten.

Im nächsten Kapitel, in dem DGLs für massive 2-Schleifen Beiträge zur Zweipunktfunktion betrachtet werden, wird eine auf verschiedene Propagatormassen m_1 und m_2 verallgemeinerte Form von $\mathcal{J}_{1,1}$ in der Inhomogenität auftreten.

Sollte es der Fall sein, dass man nicht in der Lage ist, über den kompletten Bereich von p^2 zu integrieren, besteht dennoch die Möglichkeit, dass sich die DGL in verschiedenen Grenzbereichen (z.B. große p^2 oder kleine p^2) analytisch lösen lässt, bzw. deren Verhalten untersucht werden kann. Diese Herangehensweise kann z.B. in [45] für das Integral $\mathcal{J}_{1,1}^{m_1, m_2}$ mit beliebigen Propagatormassen m_1, m_2 nachvollzogen werden.

Sollte eine analytische Untersuchung sich als nicht durchführbar erweisen, so kann man, bei Kenntnis des Verhaltens der DGL an dem Anfangspunkt $p^2 = 0$, eine direkte numerische Integration der DGL bis hin zu beliebigen p^2 durchführen (vorausgesetzt es existieren keine weiteren Singularitäten).

In dem betrachteten Beispiel war eine analytische Lösung der DGL mittels der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$ möglich. Diese Funktion wurde bereits 1812 von Gauß in Darstellung einer unendlichen hypergeometrischen Reihe untersucht, welche viele Standardfunktionen als Spezialfälle (z.B. Logarithmen, Trigonometrische, ... [3]) enthält. Diese hypergeometrische Reihe und ihre Verallgemeinerungen auf mehrere Variable treten im Zusammenhang mit analytischen Lösungen von Feynmanintegralen auf.

Das Integral $\mathcal{J}_{1,1}^{m_1, m_2}$ besitzt eine Lösung als Linearkombination von ${}_2F_1$ [8] aber auch in den zwei-Variablen Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Reihe, den Appell's-Funktion $F_1(a; b, b'; c; x, y)$ und $F_4(a; b; c, c'; x, y)$ [8, 46]. Dieser Zusammenhang konnte genutzt werden, um vollständig neue mathematische Identitäten zwischen diesen Funktionen herzuleiten [46].

Erzeugt man die DGL für $\mathcal{J}_{1,1}^{m_1, m_2}$, so lässt sich diese sofort unter Zuhilfenahme von MATHEMATICA [63] zu einer Linearkombination aus Appell's-Funktionen F_1 berech-

nen. Eine Überführung in das Ergebnis von [46] wird (falls möglich) eine Reihe an Manipulationen von F_1 involvieren, sodass sich, obwohl es sich um eine kleine Neuheit gehandelt hätte (sowohl [8] als auch [46] nutzen keine DGL-Methode), als Beispiel auf die “per-Hand-Lösung” von $\mathcal{J}_{1,1}$ beschränkt wurde.

5.2 Automatisierte Generierung der MIs und der DGLs

Zur automatisierten Berechnung der MIs wurde das Programm FIRE5 [47] verwendet. Dieses nutzt die Topologieschreibweise

$$\mathcal{T}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q} = \int d^D k_1 d^D k_2 \dots d^D k_l \frac{1}{\prod_{j=1}^t D_j^{\mu_j} \prod_{i=1}^q D_{t+i}^{-\nu_i}},$$

in welcher man irreduzible Skalarprodukte durch Propagatoren mit negativem Exponenten ausdrückt (vgl. Abs 3.1). Die Integrale einer Topologie werden in $(t+q)^2 - q$ verschiedenen Sektoren organisiert. Anschließend wird in jedem Sektor eine Reduktion unter Verwendung des Laporta-Algorithmus durchgeführt (vgl. Abs. 4.2). Dabei unterscheiden sich Sektoren in den Vorzeichen der Exponenten der $t+q$ Propagatoren bzw. irreduziblen Skalarprodukte [47].

Bei der bereits betrachteten Topologie $\mathcal{J}_{1,1}$ mit $t = 2$ Propagatoren und $q = 0$ irreduziblen Skalarprodukten hätte man die folgenden $2^2 - 0 = 4$ Sektoren

$$\mathcal{J}_{a_1 > 0, a_2 > 0}, \quad \mathcal{J}_{b_1 > 0, b_2 \leq 0}, \quad \mathcal{J}_{c_1 \leq 0, c_2 > 0} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_{d_1 \leq 0, d_2 \leq 0},$$

wobei der letzte Sektor trivial ist, da alle Integrale in ihm Null sind. Diese “Randbedingungen” werden von FIRE automatisch ermittelt.

Die Symmetrierelation kann in FIRE vor Beginn der Reduktion deklariert werden und würde die Sektoren 2 und 3 als gleich identifizieren, sodass sich die gesamte Reduktion auf die zweier Sektoren beschränkt. Sollte einem die Symmetrie der Topologie nicht klar sein, so kann diese in FIRE nach Abschluss der Reduktion als Symmetrie zwischen den MIs gefunden werden, um diese als Satz von “Regeln” in einer separierten Datei zu speichern. Man erhält folglich immer den minimalen Satz an MIs.

Da FIRE einzelne Integrale als Input verwendet, um bei anschließender Reduktion die MIs zu finden, in denen das Imputintegral ausgedrückt werden kann, wurde für die Bestimmung der MIs die folgende Herangehensweise benutzt.

Als Input wurden alle Integrale der Topologie (und der Subtopologien) verwendet, deren Propagatorexponenten

$$0 < \sum_{i=1}^t \mu_i \leq 10 \quad \text{mit } \mu_i \geq 0$$

$$\text{und } 0 \geq \sum_{j=1}^q \nu_j \geq 5 \quad \text{mit } \nu_i \geq 0$$

erfüllen. Somit wird ein relativ großer Bereich systematisch auf MIs untersucht und diese gespeichert.

Die Differentiation nach der kinematischen Variablen $p^2 = s$ wurde mit *Reduze 2* [58] durchgeführt, da es ebenfalls in der Topologienotation wie FIRE arbeitet.

Der vollständig automatische Ablauf zum Erhalten einer DGL im Rahmen dieser Arbeit bestand aus den folgenden Schritten:

- Differentiation nach kinematischer Variabler (*Reduze 2* [58])
- IBP-Reduktion der DGL (*FIRE5* [47])
- Weitesgehende Vereinfachung (*MATHEMATICA* [63])

und einer anschließenden Analyse “per Hand”.

Kapitel 6

Differentialgleichungen massiver 2-Schleifen Beiträge zur Zweipunktfunktion

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die generellen Techniken zum Umgang mit Schleifenintegralen im Rahmen einer IBP-Reduktion in Verbindung mit DGLs vorgestellt. Dabei ist der wesentliche Punkt deren Lösung in Form eines analytischen Ausdruckes die Kenntnis der Inhomogenität.

Im folgenden sollen die DGLs für massive 2-Schleifen Beiträge zur Zweipunktfunktion betrachtet werden, die mit der bereits vorgestellten Methode (Abs. 5.2) automatisch generiert wurden.

6.1 Die massive 2-Schleifen 5-Nenner Topologie \mathcal{H}

Bei einem 2-Schleifen Beitrag zur Zweipunktfunktion muss die entsprechende Topologie gemäß Abs. 3.1 aus

$$t + q = l(g - 1) + \frac{l(l + 1)}{2} = 2(2 - 1) + \frac{2(2 + 1)}{2} = 5$$

unabhängigen Propagatoren bestehen. Beginnt man mit der kompliziertesten Topologie (gemäß der Ordnung Abs. 4.2 Pkt. 1), so ist dies die reine 5-Nenner-Topologie

$$\mathcal{H}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5} = \text{Diagramm} \quad (6.1.1)$$

welche im weiteren Verlauf als \mathcal{H} -Topologie (“Halbkreis”) bezeichnet werden wird.

Um eine Wahl an Propagatoren zu treffen, muss die Impulserhaltung (Pfeilchen in Glg. (6.1.1)) an jedem Vertex sichergestellt werden und man erhält z.B.

$$\begin{aligned} D_1 &= k_1^2 - m_1^2, & D_3 &= (k_1 - k_2)^2 - m_3^2, \\ D_2 &= k_2^2 - m_2^2, & D_4 &= (p - k_2)^2 - m_4^2, & D_5 &= (p - k_1)^2 - m_5^2. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

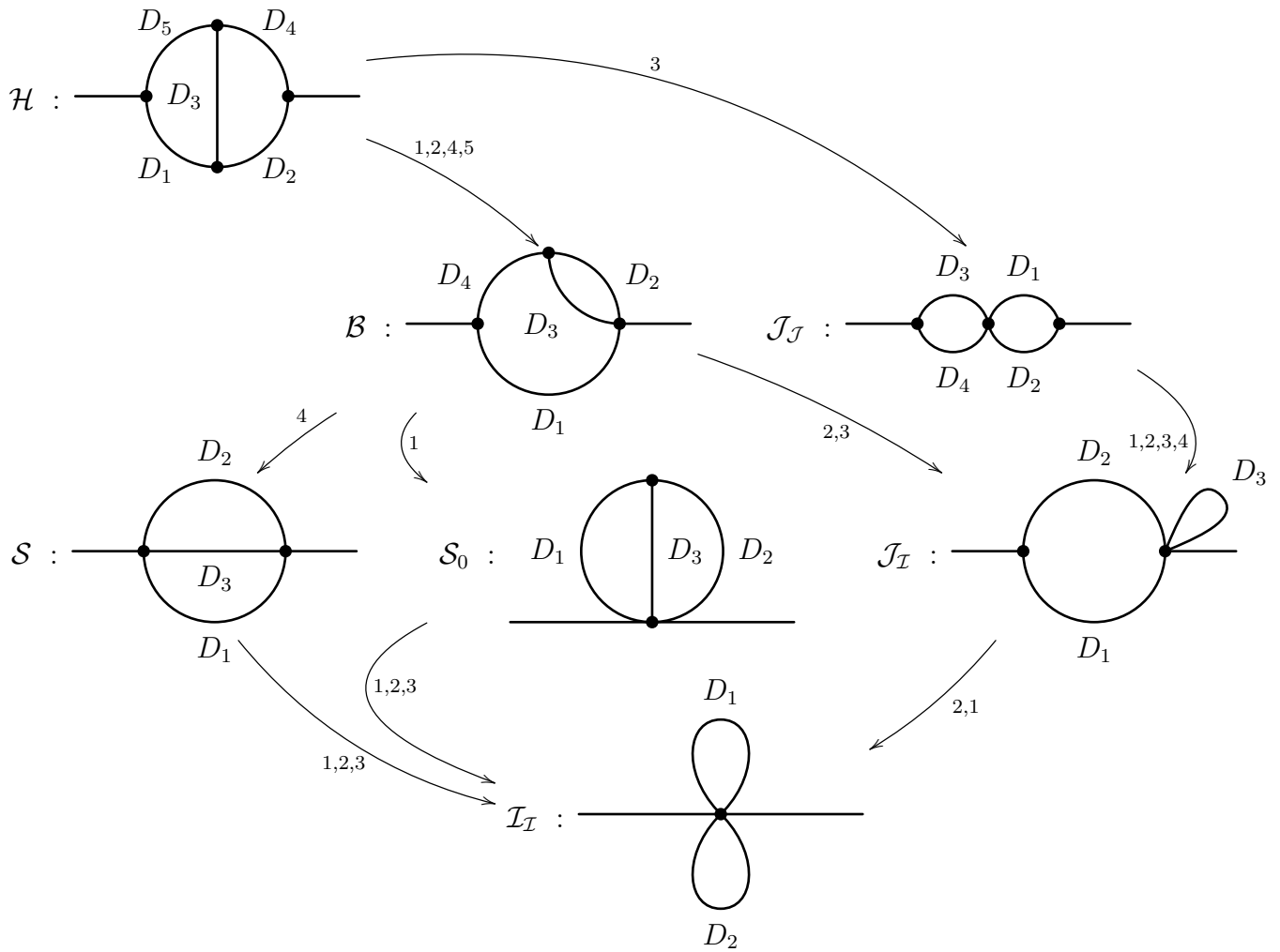


Abbildung 6.1: Darstellung der Kontraktionen der \mathcal{H} -Topologie auf 2-Schleifen Subtopologien; Propagatorindizes auf den Pfeilen geben Kontraktionen an, um zur Subtopologie zu gelangen.

Um eine Aussage darüber treffen zu können, welche MIs in der DGL auftreten werden, ist es sinnvoll, sich die möglichen Subtopologien in Abb. 6.1 anzuschauen, die über Kontraktionen von Propagatoren erreicht werden können. In Abb. 6.1 bezeichnen die Zahlen auf den Pfeilen, über welchen Propagator kontrahiert werden kann, um zur Subtopologie zu gelangen, wobei eine generische Wahl von Propagatoren D zu nehmen ist. Es gilt also nicht zwangsweise, dass D_4 der \mathcal{H} - gleich D_4 der \mathcal{B} -Topologie ist. Die einzige Ausnahme ist der D_3 -Propagator der \mathcal{S} und \mathcal{B} -Topologie. Dieser kann so gewählt werden, dass er immer dem D_3 -Propagator der \mathcal{H} -Topologie entspricht.

In Abb. 6.1 ist zu erkennen, dass nicht alle sechs Subtopologien grundsätzlich verschieden und neu sind.

Die $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ -Topologie, welche über Kontraktion von D_3 der \mathcal{H} -Topologie erreicht wird, ist ein direktes Produkt zweier Integrale der, bereits im Grenzfall gleicher Massen analysierten, 1-Schleifen 2-Nenner Topologie $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ aus Abs. 5.1.

Ebenso lässt sich die Topologie $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ als direktes Produkt zweier Integrale aus $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ und \mathcal{I}_{μ_3} darstellen, während es sich bei dem Doppeltadpole $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ ebenfalls um die bereits bekannte \mathcal{I}_{μ} -Topologie handelt.

In Abb. 6.1 treten drei weitere Subtopologien auf, die bisher noch nicht betrachtet wurden. Die 4-Nenner Topologie \mathcal{B} (“Baseball”), die sogenannte sunrise-Topologie \mathcal{S} und die Topologie \mathcal{S}_0 . Dabei ist \mathcal{S}_0 nur über einen Vertex mit den externen Beinen verbunden und kann somit vom Rest des Graphen separiert werden. Es handelt sich um das zur sunrise-Topologie zugehörige Vakuumdiagramm, welches man im Grenzfall $p \rightarrow 0$ aus \mathcal{S} erhält.

Mit Hilfe von Abb. 6.1 kann man bereits an dieser Stelle die möglichen Massenkombinationen der Subtopologien, d.h. die Multiplizität ihrer MIs, betrachten. So kann das MI der $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ in einer und das MI \mathcal{B} -Topologie in vier verschiedenen Konfigurationen auftreten. Die MIs der \mathcal{S} -Topologie hingegen nur in zwei, da, bei dem Übergang von der \mathcal{B} - zur \mathcal{S} -Topologie, immer der ursprünglich in der \mathcal{H} -Topologie diagonal gegenüber liegende Propagator kontrahiert werden muss. So resultieren die möglichen Kontraktionen, um von der \mathcal{H} - zur \mathcal{S} -Topologie zu gelangen, in den zwei möglichen Massenkombinationen $\{m_1, m_4, m_3\}$ und $\{m_2, m_5, m_3\}$, wie in Abb. 6.2 verdeutlicht.

Analoge Betrachtungen führen bei der \mathcal{S}_0 -Topologie auf die Massenkombinationen $\{m_4, m_5, m_3\}$ und $\{m_1, m_2, m_3\}$ und bei $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ auf sechs verschiedene Möglichkeiten, wobei vier sowohl aus $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ als auch \mathcal{B} und zwei ausschließlich der \mathcal{B} -Topologie resultieren. Für die $\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ -Topologie existieren $\binom{5}{2} - 2 = 8$ verschiedenen Konfigurationen mit $m_i \neq m_j$.

Wie zu erkennen ist, lässt sich bereits an diesem Punkt eine Vielzahl an Aussagen über die auftretenden Integrale machen.

Eine anschließende Analyse der \mathcal{H} -Topologie gemäß Abs. 5.2 zeigt, dass nur ein MI $\mathcal{H}_{1,1,1,1,1}$ mit vollem Indexsatz existiert und keine MIs mit negativen Exponenten auftreten. Somit lassen sich alle weiteren MIs, eindeutig den in Abb. 6.1 dargestellten Subtopologien zuordnen.

Um eine visuelle Vereinfachung der folgenden DGL in Zusammenhang mit den Subtopologien zu ermöglichen, wird eine neue Notation eingeführt. Anstatt MIs mit unvollständigem Indexsatz durch Topologieschreibweise $\mathcal{H}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5}$ mit $\mu_i \geq 0$ zu kennzeichnen, werden diese in Form des MIs der zugehörigen Subtopologie ausgedrückt, wobei hochgestellte Indizes die Massen kennzeichnen. Besitzt die Subtopologie nur ein MI, so werden die

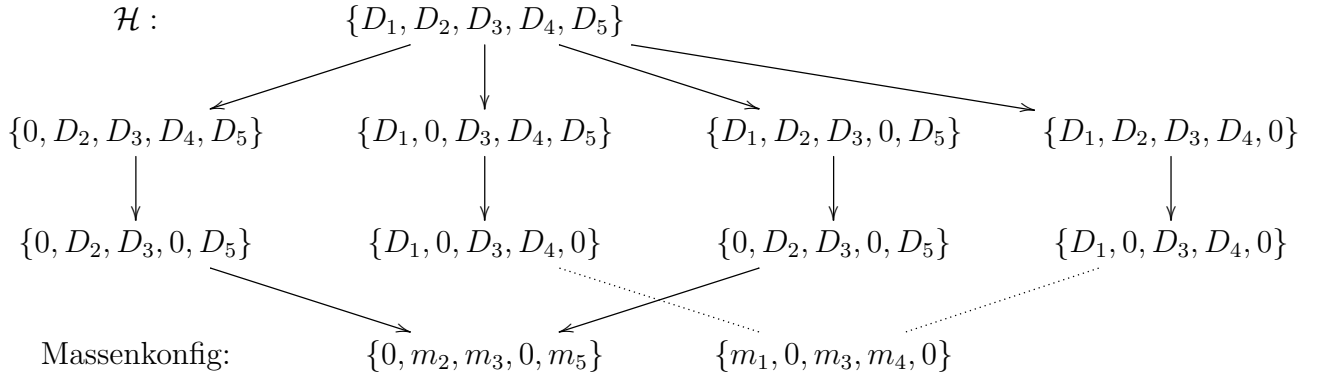


Abbildung 6.2: Darstellung der mögliche Kontraktionen und die daraus resultierenden Massenkonfigurationen am Beispiel des Übergangs von $\mathcal{H} \rightarrow (\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{S}$ -Topologie

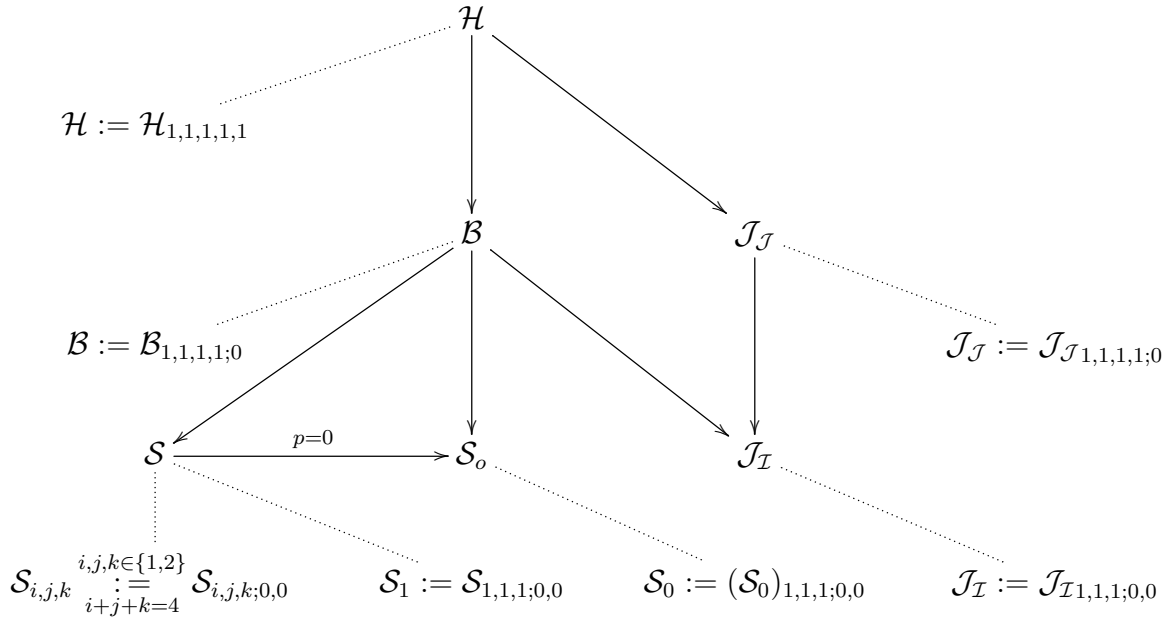


Abbildung 6.3: Darstellung der für die DGL relevanten Topologien mit zugeordneten MIs

tiefgestellten Indizes unterschlagen und nur die Kennzeichnung der Massen vorgenommen. Die Topologien, die in der DGL auftreten, sind in Abb. 6.3 dargestellt, wobei gepunktete Linien der Topologie das MI zuordnen, während durchgezogene den Zusammenhang zwischen den Topologien verdeutlichen.

Die insgesamt 30 Varianten der MIs der \mathcal{H} -Topologie, die aus den verschiedenen Massenkombinationen der in Abb. 6.3 dargestellten MIs zusammen mit den 8 Doppeltadpoles entstehen, wurden bereits in [56] mittels einer per Hand durchgeführten IBP-Reduktion gefunden. In der vorliegenden Arbeit wurden diese, mit der Methode aus Abs. 5.2, reproduziert.

Um die Notation zu verdeutlichen, wird das MI $\mathcal{H}_{0,1,1,1,1}$ betrachtet. Dieses stammt offensichtlich aus der \mathcal{B} -Topologie, da eine Kontraktion über D_1 stattgefunden hat (vgl. Abb. 6.1). In der "neuen" Notation wird es als

$$\mathcal{H}_{0,1,1,1,1} = \mathcal{B}_{1,1,1,1;0}^{m_2, m_5, m_3, m_4} = \mathcal{B}^{2,5,3,4}$$

notiert, da die \mathcal{B} -Topologie nur ein MI hat. Da die sunrise-Topologie vier MIs besitzt, wird beispielsweise das Integral $\mathcal{H}_{0,2,1,0,1}$ als

$$\mathcal{H}_{0,2,1,0,1} = \mathcal{S}_{2,1,1}^{2,5,3}$$

notiert, wobei die Topologien in Abb. 6.1 und die MIs in Abb. 6.3 dargestellt sind.

Das Hauptresultat dieser Arbeit, die DGL für das MI der \mathcal{H} -Topologie lautet

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{ds} = & \left(-(D-2) \frac{(m_4^4 m_1^2 + m_1^2 ((m_2^2 - m_4^2)(m_3^2 - m_4^2) - m_5^2 (m_2^2 + m_4^2)) + m_5^2 (m_2^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2) + m_2^2 m_5^4)}{2s N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right. \\ & \left. + (D-6) \frac{m_3^2 s}{2N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{m_1^2 (m_3^2 + m_4^2 - m_5^2) + (m_2^2 - m_3^2)(m_3^2 - m_4^2) + m_5^2 (m_2^2 + m_3^2)}{N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \mathcal{H} \quad \left. \right\} \propto \text{Diagram 1} \\ & + \left(\frac{(-m_1^2 + m_5^2 + s) Z^{2,1,3,5,4,s}}{4s N_1^{1,5,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{(-m_2^2 + m_4^2 + s) Z^{1,2,3,4,5,s}}{4s N_1^{2,4,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \\ & \cdot \left((2-D)(\mathcal{S}_0^{4,5,3} + \mathcal{S}_0^{1,2,3}) + (3D-8)(\mathcal{S}_1^{2,5,3} + \mathcal{S}_1^{1,4,3}) - 2s(D-3)\mathcal{J}^{1,2,4,5} \right) \quad \left. \right\} \propto \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \end{aligned} \quad (6.1.3a)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{Z^{4,5,3,1,2,s}}{2N_1^{1,5,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} (2m_1^2 (D-3) \mathcal{B}^{5,2,3,1} + (D-2) \mathcal{J}_I^{2,4,1}) \\ & + \frac{Z^{2,1,3,5,4,s}}{2N_1^{1,5,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} (2m_5^2 (D-3) \mathcal{B}^{1,4,3,5} + (D-2) \mathcal{J}_I^{2,4,5}) \quad \left. \right\} \propto \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \quad (6.1.3b) \\ & + \frac{Z^{5,4,3,2,1,s}}{2N_1^{2,4,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} (2m_2^2 (D-3) \mathcal{B}^{4,1,3,2} + (D-2) \mathcal{J}_I^{1,5,2}) \\ & + \frac{Z^{1,2,3,4,5,s}}{2N_1^{2,4,s} N_2^{1,2,3,4,5,s}} (2m_4^2 (D-3) \mathcal{B}^{2,5,3,4} + (D-2) \mathcal{J}_I^{1,5,4}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2N_2^{1,2,3,4,5,s}} \cdot (D-2) (\mathcal{J}_I^{2,4,3} + \mathcal{J}_I^{1,5,3}) \quad \left. \right\} \propto \text{Diagram 7}^{m_3} \quad (6.1.3c)$$

$$- \left(\frac{(m_1^2 - m_5^2 + s)Z^{4,5,3,1,2,s}}{2sN_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{(m_2^2 - m_4^2 + s)Z^{5,4,3,2,1,s}}{2sN_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{1}{N_2^{2,3,4,5,s}} \right) \cdot m_3^2 (\mathcal{S}_{1,1,2}^{2,5,3} + \mathcal{S}_{1,1,2}^{1,4,3}) \Bigg\} \propto \text{Diagram} \quad (6.1.3d)$$

$$+ \left(\frac{(m_2^2 - m_4^2 - s)(Z^{1,2,3,4,5,s} - N_1^{2,4,s})}{2sN_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} - \frac{(m_1^2 - m_5^2 - s)(Z^{1,\sqrt{s},5,4,3,2^2} - Z^{2,1,3,5,4,s})}{2sN_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \cdot m_1^2 \mathcal{S}_{2,1,1}^{1,4,3} \\ + \left(\frac{(m_1^2 - m_5^2 - s)(Z^{2,1,3,5,4,s} - N_1^{1,5,s})}{2sN_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} - \frac{(m_2^2 - m_4^2 - s)(Z^{1,\sqrt{s},5,4,3,2^2} - Z^{1,2,3,4,5,s})}{2sN_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \cdot m_2^2 \mathcal{S}_{2,1,1}^{2,5,3} \Bigg\} \propto \text{Diagram} \quad (6.1.3e)$$

$$- \left(\frac{(m_1^2 - m_5^2 + s)Z^{4,5,3,1,2,s}}{2sN_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{(m_2^2 - m_4^2 + s)Z^{5,4,3,2,1,s}}{2sN_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} - \frac{Z^{2,1,3,5,4,s}}{N_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \cdot m_5^2 \mathcal{S}_{1,2,1}^{2,5,3} \\ - \left(\frac{(m_1^2 - m_5^2 + s)Z^{4,5,3,1,2,s}}{2sN_1^{1,5,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{(m_2^2 - m_4^2 + s)Z^{5,4,3,2,1,s}}{2sN_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} + \frac{(Z^{1,\sqrt{s},5,4,3,2^2} + (m_1^2 - m_4^2)(m_3^2 - s))}{N_1^{2,4,s}N_2^{1,2,3,4,5,s}} \right) \cdot m_4^2 \mathcal{S}_{1,2,1}^{1,4,3} \Bigg\} \propto \text{Diagram} \quad (6.1.3f)$$

wobei die Graphen der MIs, die in den Termen auftreten, zur visuellen Gliederung hinter diesen Termen notiert wurden.

In der DGL sind die MIs kalligraphisch und Polynome in normalem Schriftsatz notiert. Die 3 auftretenden Polynome sind im Anhang B.1.1 zusammengefasst, wobei hochgestellte Zahlen Massenindizes und ein hochgestelltes s das Impulsquadrat bezeichnet.

Es zeigt sich, dass sich die rationalen Vorfaktoren aller Terme auf ein Zählerpolynom Z und zwei Nennerpolynome N_1 und N_2 reduzieren, die gewisse Symmetrieeigenschaften der \mathcal{H} -Topologie widerspiegeln.

Das Polynom N_1 involviert immer ausschließlich Massen (m_1, m_5 bzw. m_2, m_4), die sich bzgl. des ‘‘Symmetriepropagators’’ D_3 gegenüber liegen. Es ist vollständig symmetrisch unter deren Vertauschung (vgl. Glg.(6.1.1)).

N_2 , welches alle fünf Massen involviert, ist symmetrisch unter paarweiser Vertauschung von $(1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5)$ sowie $(1 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 4)$. Diese Massenvertauschungen spiegeln die Translationsinvarianz der \mathcal{H} -Topologie bzgl. $k_1 \rightarrow k_2$ und $k_i \rightarrow p - k_i$ wider.

Weiterhin ist festzustellen, dass alle MIs aller relevanter Subtopologien, in allen 21 möglichen Massenkfigurationen auftreten. Allerdings ist auch zu erkennen, dass diese nicht mit völlig unabhängigen Vorfaktoren eingehen.

In Term (6.1.3a) erkennt man, dass die MIs der $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$, der \mathcal{S}_0 und das MI \mathcal{S}_1 der Sunrise-Topologie einen gemeinsamen, rationalen Vorfaktor haben. Diese drei Subtopologien haben gemeinsam, dass sie in hohem Maße symmetrisch sind. Die beiden MIs $\mathcal{S}_{1/0}$ sind vollständig symmetrisch unter Permutationen der Propagatoren (/Massen), während das MI $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ symmetrisch unter den gleichen Vertauschungen wie das Nennerpolynom N_1 ist.

In den MIs der \mathcal{B} -Topologie, die Terme (6.1.3b) in Glg. (6.1.3), erkennt man ebenfalls ein Muster. Jedes dieser MIs teilt einen gemeinsamen Vorfaktor mit einem MI der $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -Topologie. Dabei fällt auf, dass das MI der \mathcal{B} -Topologie immer mit der Masse des Tadpoles in der $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -Topologie multipliziert wird. Weiterhin erkennt man, dass das zugeordnete MI der $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -Topologie niemals aus dem \mathcal{B} -MI gewonnen werden kann, mit dem es den

gemeinsamen rationalen Vorfaktor besitzt, welche unter Massenvertauschungen ineinander übergehen.

Wenn man zurück zur \mathcal{H} -Topologie Glg. 6.1.1 geht, so wird das Muster der Anordnung zwischen MIs der \mathcal{B} - und \mathcal{J}_T -Topologie klar.

Die Propagatoren D_1 und D_4 der \mathcal{B} -Topologie (vgl. Abb. 6.1) liegen sich bzgl. einer horizontalen Symmetrieachse in der \mathcal{H} -Topologie gegenüber (vgl. Glg. (6.1.2)). Im \mathcal{J} -Anteil des zugeordneten \mathcal{J}_T -MIs findet man immer die an der Symmetrieachse \mathcal{D}_3 der \mathcal{H} -Topologie gespiegelten Massen. Es gilt also $\{m_1, m_5\}_{\mathcal{B}}^{D_1, D_4} \leftrightarrow \{m_2, m_4\}_{\mathcal{J}_T}^{D_1, D_2}$ bzw. $\{m_2, m_4\}_{\mathcal{B}}^{D_1, D_4} \leftrightarrow \{m_1, m_5\}_{\mathcal{J}_T}^{D_1, D_2}$ für in der DGL zugeordnete MIs der \mathcal{B} - und \mathcal{J}_T -Topologie. Ebenso gilt, wenn der Propagator D_2 von \mathcal{B} die Masse m_i trägt, so wird der Tadpole des zugeordneten \mathcal{J}_T -MIs die in \mathcal{H} an D_3 gespiegelte Masse haben (siehe z.B. $\{m_1\}_{\mathcal{B}}^{D_2} \leftrightarrow \{m_2\}_{\mathcal{J}_T}^{D_3}$ in Term (6.1.3b)).

Die zwei MIs der \mathcal{J}_T -Topologie, die ausschließlich aus Kontraktion der \mathcal{B} -Topologie gewonnen werden können und die Masse m_3 auf dem Tadpole haben, besitzen einen gemeinsamen rationalen Vorfaktor (siehe Term (6.1.3c)).

Die sunrise-MIs, bei denen einer der Propagatoren quadratisch eingeht, Term (6.1.3d)-(6.1.3f), stehen ebenfalls mit der Symmetrie der ursprünglichen \mathcal{H} -Topologie in Verbindung. Bei der \mathcal{J}_T -Topologie besitzen die MIs, bei denen die Masse m_3 , die in der \mathcal{H} -Topologie dem ‘‘Symmetriepropagator’’ D_3 zugeordnet war, auf dem Tadpole liegt einen gemeinsamen rationalen Vorfaktor. Ebenso ist es bei den sunrise-MIs in Term (6.1.3d), bei denen die Masse m_3 quadratisch eingeht.

Bei den MIs $\mathcal{S}_{2,1,1}$ in Term (6.1.3e), bei denen der Propagator mit der Masse m_1 bzw. m_2 quadratisch eingeht, sind die Polynome unter Massenvertauschungen $\{m_1, m_5\} \leftrightarrow \{m_2, m_4\}$ identisch. Dabei ist zu beachten, dass das Polynom

$$Z^{1, \sqrt{s}, 5, 4, 3, 2^2} = s (m_1^2 + m_2^2 - 2m_3^2 + m_4^2 + m_5^2) - (m_5^2 - m_1^2) (m_4^2 - m_2^2) - s^2$$

unter dieser Vertauschung symmetrisch ist.

Die Massen m_1 und m_2 sind in der \mathcal{H} -Topologie Propagatoren zugeordnet, die ausschließlich von einem Schleifenimpuls k_i , nicht aber vom externen Impuls abhängen.

In den Termen (6.1.3f), bei denen der Propagator mit m_4 bzw. m_5 quadratisch eingeht, ist dies nicht der Fall. Hier gibt es einen identischen Anteil, der bereits in den Termen (6.1.3d) auftritt und einen ‘‘Störterm’’, der nicht unter Massenvertauschungen ineinander übergeht.

Zusammenfassend wird festgestellt, dass sich die Symmetrie der \mathcal{H} -Topologie zu einem hohen Grad in der DGL widerspiegelt, da in der DGL (6.1.3) anstatt 21 möglicher, nur drei verschiedene Polynome auftreten. Dabei ist hervorzuheben, dass MIs, bei denen der ursprüngliche Symmetriepropagator D_3 der \mathcal{H} -Topologie eine ausgezeichnete Rolle einnimmt ($\mathcal{S}_{1,1,2}$ und $\mathcal{J}_T^{m,n,3}$) gemeinsame Vorfaktoren haben. Die restlichen MIs (bis auf $\mathcal{S}_{1,2,1}$) spiegeln dies in der Gleichheit der Vorfaktoren bis auf Massenvertauschungen wider. Allerdings ist festzuhalten, dass die Zählerpolynome i.A. nicht die Symmetrie der zugeordneten MI widerspiegeln. So ist z.B. der Vorfaktor in Term (6.1.3a) unter keiner der Vertauschungen symmetrisch, unter denen die MIs \mathcal{J}_T und $\mathcal{S}_{1/0}$ symmetrisch sind.

Dass es überhaupt zu einer derartigen Anordnung der MIs der Subtopologien kommt, entspricht zwar der naiven Erwartung, kann aber vor Durchführen der eigentlichen Rechnung nicht mit Sicherheit gesagt werden.

Im Grenzfall gleicher Massen $m_i = m$ vereinfacht sich Glg. (6.1.3) zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{H}}{ds} \right|_{m_i=m} = & \frac{1}{12m^4 - 7m^2s + s^2} \left(-\frac{(4m^2 - s)((D-6)s + 6m^2)}{2s} \mathcal{H} + (3-D)\mathcal{J}_J \right. \\ & + \frac{4(D-3)m^2}{s} \mathcal{B} + (D-2) \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{s} \right) \mathcal{J}_I + \frac{(2-D)}{s} \mathcal{S}_0 + \frac{(3D-8)}{s} \mathcal{S}_1 \\ & \left. - \frac{2(m^2 + s)}{s} \mathcal{S}_{1,1,2} \right). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Mit Hilfe von Glg. (6.1.4) wurde ein minimaler Selbstkonsistenzcheck durchgeführt, indem sie sowohl durch das Gleichsetzen der Massen in Glg. (6.1.3), als auch durch direkte Generierung mit der Methode aus Abs. 5.2 erzeugt wurde. Die somit erhaltenen DGLs sind gleich und besitzen eine konsistente Massendimension.

Einige weitere spezielle Massenkonfigurationen von Glg. (6.1.3), die bei QCD- und QED-Propagatorkorrekturen auftreten, sind Anhang in den Glgn. (B.1.1)-(B.1.5) dargestellt.

6.2 Die DGLs der \mathcal{B} - und \mathcal{S} -MIS

In der Differentialgleichung des MIS der \mathcal{H} -Topologie sind zwei, bisher in dieser Arbeit nicht betrachtete MIS aufgetaucht. Wie aber bereits in Abs 5 verdeutlicht, ist die Kenntnis der Inhomogenität der zentrale Punkt, um mittels der Differentialgleichungsmethode ein analytisches Ergebnis zu erhalten. Daher werden die DGLs dieser MIS im folgenden betrachtet.

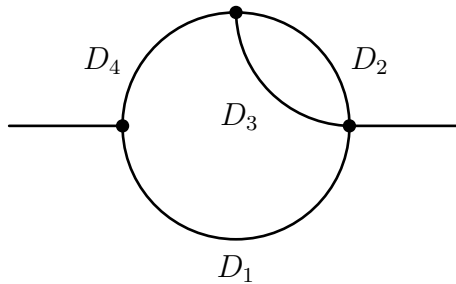


Abbildung 6.4: Vollständige Charakterisierung der \mathcal{B} -Topologie mit $D_1 = k_1^2 - m_1^2$, $D_2 = k_2^2 - m_2^2$, $D_3 = (p - k_1 - k_2)^2 - m_3^2$ und $D_4 = (p - k_1)^2 - m_4^2$ und $S = k_2 p$

Die \mathcal{B} Topologie ist vollständig durch die Wahl der Propagatoren

$$D_1 = k_1^2 - m_1^2, \quad D_2 = k_2^2 - m_2^2, \quad D_3 = (p - k_1 - k_2)^2 - m_3^2, \quad D_4 = (p - k_1)^2 - m_4^2$$

$$S_1 = k_2 p$$

bestimmt. Allerdings wurde bereits festgestellt, dass keines der MIS der \mathcal{H} -Subtopologien irreduzible Skalarprodukte enthält. Daher wird sich hier und im weiteren Verlauf lediglich auf die “physikalischen” Propagatoren der Topologie beschränkt. Weiterhin wird die

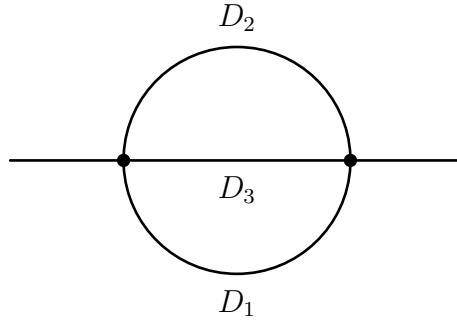


Abbildung 6.5: Vollständige Charakterisierung der \mathcal{S} -Topologie mit $D_1 = k_1^2 - m_1^2$, $D_2 = k_2^2 - m_2^2$, $D_3 = (p - k_1 - k_2)^2 - m_3^2$ und $S_1 = k_1 p$ und $S = k_2 p$

bereits eingeführte Notation beibehalten, wobei eindeutige Massenkonfigurationen nicht explizit geschrieben werden.

Die DGL für das MI der \mathcal{B} -Topologie lautet

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{B}}{ds} = & \frac{1}{sN_1^{1,4,s}} \left(\frac{1}{2} \left((2-D)(m_1^2 - m_4^2)^2 + (D-4)s^2 + 2s(m_1^2 + m_4^2) \right) \mathcal{B} \right. \\ & + (m_1^2 - m_4^2 + s) \left(\frac{1}{2}(2-D)\mathcal{S}_0^{2,3,4} + \frac{1}{2}(3D-8)\mathcal{S}_1^{1,2,3} - m_2^2\mathcal{S}_{1,2,1}^{1,2,3} - m_3^2\mathcal{S}_{1,1,2}^{1,2,3} \right) \\ & \left. - (m_1^2 - m_4^2 + 3s)m_1^2\mathcal{S}_{2,1,1}^{1,2,3} \right), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

wobei $N_1^{i,j,k}$ das Nennerpolynom aus B.1.1 ist, welches bereits in Glg. (6.1.3) auftrat.

In dieser DGL tauchen alle MIS der sunrise-Topologie auf. Man erkennt, dass sich offensichtlich die Symmetrie des Graphen bei der getätigten Propagatorwahl in der DGL (6.2.1) widerspiegelt. Dabei ist der homogene Anteil der DGL vollständig symmetrisch und die Inhomogenität vollständig antisymmetrisch unter der Vertauschung $m_1 \leftrightarrow m_4$.

Die DGL ist bereits bekannt und wurde in [12] analytisch um $s = 0$ entwickelt und numerisch um singuläre Punkte ausgewertet. Die DGL (6.2.1) und Glg. (2) aus [12] sind nach Durchführen einer Wick-Rotation gleich. Daher kann dies als Konsistenzcheck der verwendeten Methode aus Abs 5.2 angesehen werden.

Für die DGL der sunrise-MIS wird die bisherige Notation minimal angepasst werden. Wie bereits gesehen (vgl. Abb 6.3), besitzt diese Topologie, als einzige der hier betrachteten Topologien, mehrere MIS mit vollem Propagatorsatz. Dabei ist die vollständige Charakterisierung der Topologie z.B. durch die Wahl

$$D_1 = k_1^2 - m_1^2, \quad D_2 = k_2^2 - m_2^2, \quad D_3 = (p - k_1 - k_2)^2 - m_3^2, \quad S_1 = k_1 p, \quad S_2 = k_2 p$$

gewährleistet (vgl. Abb. 6.5). Im folgenden werden die MIS, bei denen ein Propagator quadratisch eingeht (vgl. Abb. 6.3) durch \mathcal{S}_2^j notiert, wobei j den Massenindex des Propagators angibt, der quadratisch eingeht. Das MI $\mathcal{S}_1^{i,j,k}$ wird von nun an als \mathcal{S}_1 notiert, da die Massenkonfiguration eindeutig ist.

Die DGLs für die MIs sind

$$\frac{d\mathcal{S}_1}{ds} = \frac{(D-3)\mathcal{S}_1}{s} - \frac{m_1^2\mathcal{S}_1^2 + m_2^2\mathcal{S}_2^2 + m_3^2\mathcal{S}_3^2}{s} \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}_2^i}{ds} = & -\frac{\mathcal{S}_2^i}{2s} + \frac{(D-3)}{2N^{(i,j,k)}} \left(2m_j^2 P_1^{i,j,k} \mathcal{S}_2^j + 2m_k^2 P_1^{i,k,j} \mathcal{S}_2^k - P_2^{i,(j,k)} \mathcal{S}_2^i + (3D-8) Q^{i,(j,k)} \mathcal{S}_1 \right) \\ & - \frac{(D-2)^2}{4m_i^2 N^{(i,j,k)}} \left(R_1^{i,j,k} \mathcal{I}_T^{i,j} + R_1^{i,k,j} \mathcal{I}_T^{i,k} - 2m_i^2 R_2^{(i,k,j)} \mathcal{I}_T^{j,k} \right) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

wobei die hochgestellten Indizes in Glg. (6.2.3) mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\} : i \neq j \neq k \neq i$ die Massen bezeichnen. Die Polynome sind im Anhang B.2.1 aufgelistet.

In den Glgn. (6.2.2), (6.2.3) spiegelt sich die Tatsache wieder, dass die \mathcal{S} -Topologie mehrere MIs besitzt. Dies führt dazu, dass man gekoppelte DGLs erhält. Die erstellten DGLs sind bereits bekannt [13] und wurden u.a. für den Grenzfall $p^2 = 0$, d.h. für $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_0$, gelöst und somit die Integrationskonstante bestimmt. Die im Rahmen dieser Arbeit generierten Glgn. (6.2.2), (6.2.3) stimmen nach Durchführen einer Wick-Rotation mit den in [13] angegeben überein, was den zweiten Konsistenzcheck der in Abs. 5.2 beschriebenen Methode darstellt.

Für den im Anhang B.2.2 dargestellten Grenzfall gleicher Massen, lassen sich die DGLs in Form einer DGL zweiter Ordnung für \mathcal{S}_1 entkoppeln, in $D = 2$ und $D = 4$ analytisch lösen und um singuläre Punkte in entwickeln [32, 43].

Kapitel 7

Abschließender Ausblick

Bevor der aktuellere Fortschritt in Bezug auf die sunrise-MI vorgestellt werden kann, ist es notwendig, dass ein kleiner Ausblick auf die Entwicklung der Ergebnisse für $D = 4 - 2\epsilon$ um $\epsilon = 0$ gegeben wird. Weiterhin wird beispielhaft betrachtet, welche Techniken und Funktionen einen guten Rahmen geben, um mit MIs in der Inhomogenität von DGLs höherer Schleifenintegrale weiterarbeiten zu können. Im Anschluss dieser Betrachtungen, wird die Besonderheit der massiven sunrise-Topologie verständlich werden und es wird plausibel, warum eine ausführlichere Beschäftigung mit ihr interessant ist und wo sich die Ergebnisse dieser Bachelorarbeit einordnen lassen.

7.1 Ausblick zur ϵ -Entwicklung

In Abs. 5.1 wurde mittels der Differentialgleichungsmethode das MI der \mathcal{J} -Topologie im Grenzfall gleicher Massen in euklidischer Metrik zu

$$\mathcal{J}_{1,1} = \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) (m^2)^{\frac{D-4}{2}} {}_2F_1\left(1, \frac{4-D}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right) \quad (7.1.1)$$

berechnet. Dieses Ergebnis ist in beliebigen D -Dimensionen. Zur Berechnung physikalischer Sachverhalte muss der Übergang zu den physikalischen $D = 4$ Dimensionen betrachtet werden. Dazu ist es nützlich, die Reihenentwicklung $D = 4 - 2\epsilon$ um $\epsilon = 0$ zu betrachten, was dazu führt, dass in Glg. (7.1.1) die Reihenentwicklungen der Terme

$$\pi^{\frac{D}{2}} (m^2)^{\frac{D-4}{2}} \Big|_{D \approx 4} = \pi^2 (\pi m^2)^{-\epsilon} \Big|_{\epsilon \approx 0} \quad (7.1.2a)$$

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \Big|_{D \approx 4} = \Gamma(\epsilon) \Big|_{\epsilon \approx 0} \quad (7.1.2b)$$

$${}_2F_1\left(1, \frac{4-D}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right) \Big|_{D \approx 4} = {}_2F_1\left(1, \epsilon; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right) \Big|_{\epsilon \approx 0} \quad (7.1.2c)$$

betrachtet werden müssen.

Die ϵ -Entwicklung des Massenterms ist trivial.

Für die Γ -Funktion lässt sich die ϵ Entwicklung, wie z.B. in [59] gezeigt, auf die

Entwicklung des Ausdruckes

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \exp \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n) \epsilon^n}{n} - \gamma_E \epsilon \right)$$

zurückführen, wobei $\gamma_E \approx 0,577$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist und $\zeta(n) = \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^n$ der Dirichlet-Reihe entspricht. Der Pol der Γ -Funktion bei 0 wird sich als $1/\epsilon$ in der ϵ -Entwicklung niederschlagen.

Da die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ analytisch in ihren Parametern ist, wird in der ϵ -Entwicklung keine Singularität für $\epsilon \rightarrow 0$ auftreten. Es gibt verschiedene Ansätze diese ϵ -Entwicklung in beliebiger Ordnung zu erreichen, je nachdem ob man von einer Integral- (z.B. [15]), einer Summendarstellung (z.B. [38]) oder einer Differentialgleichung (z.B. [26]), die durch ${}_2F_1$ erfüllt wird, startet.

Dabei konnte für die in $\mathcal{J}_{1,1}$ auftretende Funktion ${}_2F_1 \left(1, \epsilon; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2} \right)$ in [26] (Theorem I, (1a)) gezeigt werden, dass sie sich in beliebiger Ordnung in ϵ durch Terme ausdrücken lässt, die sich vollständig durch multiple Polylogarithmen (multipliziert mit Potenzen von Logarithmen) darstellen lassen. Diese Tatsache wird für das Verständnis im Verlauf dieses Abschnittes wichtig werden.

Die folgenden ϵ -Entwicklungen der hier vorliegenden hypergeometrischen Funktion wurden unter Zuhilfenahme des MATHEMATICA Pakets HypExp 2 [25] bestimmt.

Aus den Betrachtungen der Terme (7.1.2a)-(7.1.2c) kann somit geschlossen werden, dass bei der ϵ -Entwicklung des Integrals $\mathcal{J}_{1,1}$ Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, ... auftreten werden. Welcher dieser Terme relevant ist, hängt von der jeweils zu bearbeitenden Fragestellung ab.

Im einführenden Abschnitt 2.2.2 wurde festgestellt, dass UV-Divergenzen im Rahmen der dimensional Regularisierung als Pole im Grenzfall $D \rightarrow 4$ auftreten werden. Offensichtlich wird durch die Entwicklung des Integrals in $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$

$$\mathcal{J}_{1,1} = \underbrace{\pi^2 \cdot 1}_{(7.1.2a) \mathcal{O}(\epsilon^0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\epsilon}}_{(7.1.2b) \mathcal{O}(\epsilon^{-1})} \cdot \underbrace{1}_{(7.1.2c) \mathcal{O}(\epsilon^0)} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

die UV-Divergenz als $1/\epsilon$ -Pol "greifbar". Sehr technisch gesprochen, ermöglicht die Kenntnis der in $\epsilon \rightarrow 0$ divergenten Terme, sogenannte Konterterme einzuführen, die zu Graphen führen werden, welche u.a. die Divergenz mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten. Da bei der Berechnung physikalischer Observabler über alle relevanten Graphen summiert werden muss, werden die Observablen schlussendlich in den physikalischen $D = 4$ Dimensionen endlich. Da eine tiefer gehende, physikalische Motivation dieses skizzenhaft dargestellten Verfahrens im Rahmen der in dieser Arbeit vorgestellten Aspekte von Quantenfeldtheorien nicht möglich ist, wird sich an dieser Stelle auf die Aussage beschränkt, dass für die Bestimmung von Kontertermen die Kenntnis des Pols ausreichend ist.

Bei der Berechnung physikalischer Observabler (z.B. von Wirkungsquerschnitten) sind auch endliche Beiträge relevant. In diesem Fall muss somit eine Entwicklung bis $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ betrachtet werden, was dazu führt, dass die Terme (7.1.2a) und (7.1.2c) bis $\mathcal{O}(\epsilon^1)$

entwickelt werden müssen. Man erhält somit

$$\mathcal{J}_{1,1} = \frac{\pi^2}{\epsilon} - \pi^2 \left(\underbrace{2\sqrt{\frac{4m^2+t}{t}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{t}{4m^2+t}}\right) - 2}_{\text{aus (7.1.2c) } \mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{\log(m^2\pi)}_{\text{aus (7.1.2a) } \mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{\gamma_E}_{\text{aus (7.1.2b) } \mathcal{O}(\epsilon^0)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Terme höherer Ordnung in ϵ werden beim Übergang $D \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$) verschwinden, d.h. nicht zur Observablen beitragen.

Trotzdem ist es wichtig, dass man diese Ordnungen kennt und ein Grund dafür liegt in den bereits vorgestellten, direkten Produkten aus Topologien. Als die Subtopologien der \mathcal{H} -Topologie (Abb. 6.1) betrachtet wurden, wurde festgestellt, dass die $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ - und $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -Topologien Produkte der bereits bekannten $\mathcal{J}_{\mu_1, \mu_2}$ - und \mathcal{I}_{μ} -Topologien sind. Ebenso sind die MIs $\mathcal{J}_{\mathcal{J}_{1,1,1,1}} = \mathcal{J}_{1,1} \cdot \mathcal{J}_{1,1}$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{I}_{1,1,1}} = \mathcal{J}_{1,1} \cdot \mathcal{I}_1$ Produkte bereits berechneter MIs. Daraus folgt, dass z.B. die Kenntnis des MI $\mathcal{J}_{\mathcal{J}_{1,1,1,1}}$ bis $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ erfordert, dass die Entwicklung des Integrals $\mathcal{J}_{1,1}$ bis ϵ bekannt ist, da es mit dem $1/\epsilon$ -Term aus der Entwicklung des jeweils anderen $\mathcal{J}_{1,1}$ multipliziert wird.

Es ist leicht vorstellbar, dass in höheren Schleifenordnungen MIs von “Produkttopologien” auftreten werden, die aus mehr als zwei bereits bekannter MI bestehen werden, welche jeweils $1/\epsilon^n$ -Terme besitzen. Daher ist es erstrebenswert, die Entwicklung von MIs bis zu beliebiger Ordnung in ϵ durchführen zu können.

7.2 Ausblick zur Integration über Inhomogenitäten

Der Abschnitt, der uns zum Verständnis der Besonderheit der sunrise-MI führt, beschäftigt sich mit der Integration der in der Inhomogenität der DGLs auftretenden MIs der Subtopologien, wobei in diesem Zusammenhang der Grundgedanke iterierter Integrale vorgestellt werden wird.

In Abs. 6.1 wurde festgestellt, dass sich die DGL der \mathcal{H} -Topologie im Grenzfall gleicher Massen zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{H}}{ds} \right|_{m_i=m} &= \frac{1}{12m^4 - 7m^2s + s^2} \left(-\frac{(4m^2 - s)((D-6)s + 6m^2)}{2s} \mathcal{H} + (3-D)\mathcal{J}_{\mathcal{J}} + \frac{4(D-3)m^2}{s} \mathcal{B} \right. \\ &\quad \left. + (D-2) \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{s} \right) \mathcal{J}_{\mathcal{I}} + \frac{(2-D)}{s} \mathcal{S}_0 + \frac{(3D-8)}{s} \mathcal{S}_1 - \frac{2(m^2+s)}{s} \mathcal{S}_{1,1,2} \right) \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

vereinfacht. In dieser Gleichung treten die MIs der $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ - und $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -Topologie auf, die in dieser Arbeit berechnet wurden. Um das Beispiel möglichst übersichtlich zu halten, wird im weiteren Verlauf skizziert, wie die Integration der vermeintlich einfachsten Inhomogenität, des $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ -MI, funktioniert.

Es ist folglich die Lösung der DGL

$$\frac{d\mathcal{H}_R^E}{dt} = -\frac{1}{12m^4 + 7m^2 + t^2} \left(\frac{(4m^2 + t)(6m^2 - (D-6)t)}{2t} \mathcal{H}_R^E + (D-2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{2}{t} \right) \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^E \right),$$

die nach Durchführung der Wick-Rotation gemäß

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^E, \quad \mathcal{J}_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^E, \quad s \rightarrow -t$$

aus Glg. (7.2.1) hervorgeht, von Interesse. Hierbei kennzeichnen die Indizes R und E , dass es sich um die reduzierte Gleichung (R) in euklidischer Metrik (E) handelt. Beide Indizes werden im weiteren Verlauf unterdrückt.

Diese DGL soll analog zu Abs. 5.1 mittels Variation der Konstanten gelöst werden. Für die Lösung \mathcal{H}_h der homogenen DGL erhält man

$$\mathcal{H}_h(t) = C \frac{(3m^2 + t)^{\frac{D-4}{2}}}{t},$$

sodass nach der Variation der Konstanten $C \rightarrow C(t)$ die DGL

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= - \frac{1}{12m^4 + 7m^2 + t^2} (D-2) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{2}{t} \right) \mathcal{J}_{\mathcal{I}} \cdot (\mathcal{H}_h(t))^{-1} \\ &= - \frac{(D-2)\pi^D (m^2)^{D-4} (2m^2 + t) (3m^2 + t)^{\frac{2-D}{2}}}{4m^2 + t} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{4-D}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t}{4m^2}\right) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

integriert werden muss. Dabei wurden in Glg. (7.2.2) bereits die Ergebnisse für $\mathcal{J}_{1,1}$ (Glg. (7.1.1)) und \mathcal{I}_1 (Glg. (A.1.4)) eingesetzt.

In Abs. 5.1 wurde die Integration über Terme, die ähnlich den Termen vor der hypergeometrischen Funktion sind, integriert. Dort wurde durch Reparametrisierung des Integranden eine Darstellung von ${}_2F_1$ gefunden. Eine ähnliche Herangehensweise würde in Glg. (7.2.2), falls überhaupt möglich, auf Grund des nicht trivialen Integranden ungemein schwerer durchführbar sein. Daher ist es in solchen Fällen sinnvoll, bereits den Integrand und nicht erst das Endergebnis in ϵ zu entwickeln sowie die t -Integration Ordnung für Ordnung in ϵ durchzuführen.

Eine ϵ -Entwicklung von Glg. (7.2.2) bis $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ überführt die Bestimmung von $C(t)$ auf die

Integration

$$\begin{aligned}
C(u) &= \frac{2\pi^4}{\epsilon^2} \int \left(-\frac{2u}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{u} \right) du \\
&+ \frac{2\pi^4}{\epsilon} \int \left[\left(\frac{u}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{u} \right) (2\alpha - \log(u^2 - u + 1) + 2 \log(1 - u)) \right] du \\
&+ \frac{2\pi^4}{\epsilon} \int \left[(u \rightarrow 1 - u =: v) \right] dv \\
&+ \frac{\pi^6}{3} \int \left(-\frac{2u}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{u} \right) du \\
&+ \pi^4 \int \left[\left(-\frac{u}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{u} \right) (2 \log(1 - u) (4\alpha - 2 \log(u^2 - u + 1) + \log(u)) \right. \\
&\quad \left. + (\log(u^2 - u + 1) - 2\alpha)^2 + 2 \log^2(1 - u) + 4 \right] du \\
&+ \pi^4 \int \left[(u \rightarrow 1 - u =: v) \right] dv \\
&+ 2\pi^4 \int \left[\left(\frac{1}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{1 - u} \right) \text{Li}_2(u) \right] du + 2\pi^4 \int \left[(u \rightarrow 1 - u =: v) \right] dv, \\
\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

die sich nach der Variablentransformation

$$u = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{t}{4m^2 + t}} + 1 \right); \quad 0,5 < u < 1 \quad du = \frac{m^2}{\sqrt{t}(4m^2 + t)^{3/2}} dt$$

und Partialbruchzerlegung ergibt. Hierbei bezieht sich die Transformation $[(u \rightarrow 1 - u =: v)]$ immer ausschließlich auf das direkt vorangegangene Integral und für die Konstante α gilt

$$\alpha = \log(m) + \gamma_E - 1 + \log(\pi).$$

7.2.1 Einschub: Ausblick zu Polylogarithmen und iterierten Integralen

In Glg. (7.2.3) im letzten Integral in $\mathcal{O}(\epsilon)$ steht der bisher in dieser Arbeit noch nicht besprochene Dilogarithmus, welcher aus der Entwicklung von ${}_2F_1$ in Glg. (7.2.2) hervorgeht. Um diesen einzuführen und weitere Grundgedanken zu verdeutlichen, werde ich vereinfacht der Motivation in [40] Kap. 3 folgen, indem eine systematische Betrachtung der durchzuführenden Integrationen in (7.2.2) beginnend bei $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ skizziert wird.

Der Beitrag zu $C(t)$ in $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ ist das Integral über die rationale Funktion

$$Q_{\epsilon^{-2}} = \frac{\pi^4}{\epsilon^2} \frac{(2 - 4u(u(2u - 3) + 2))}{(u - 1)u((u - 1)u + 1)}.$$

Nach Durchführen einer Partialbruchzerlegung erhält man

$$Q_{\epsilon^{-2}} = \frac{2\pi^4}{\epsilon^2} \left(-\frac{1}{u} - \frac{1}{u + e^{\frac{2i\pi}{3}}} - \frac{1}{u + e^{-\frac{1}{3}(2i\pi)}} + \frac{1}{1-u} \right)$$

und es ist offensichtlich, dass die rationalen Funktionen zwar abgeschlossen unter Differentiation, nicht aber unter Integration sind. Allerdings reicht die Einführung einer zusätzlichen, transzendenten Funktion

$$\int \frac{du}{u-a} = \begin{cases} \log(u-a) + \text{const} & a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \log(|u-a|) + \text{const} & a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

um die Integration rationaler Funktionen zu ermöglichen, sodass man in $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$

$$\begin{aligned} \int Q_{\epsilon^{-2}}(u) du &= \frac{2\pi^4}{\epsilon^2} \left(-\log(1-u) - \log\left(-u + e^{\frac{i\pi}{3}}\right) - \log(u) - \log\left(u + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \right) \\ &= -\frac{2\pi^4}{\epsilon^2} (\log(u^2 - u + 1) + \log(1-u) + \log(u)) \end{aligned}$$

erhält. Von nun an werden Integrationskonstanten unterdrückt, da sie am Ende sowieso in die Randbedingung für $C(t)$ absorbiert werden.

Um $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ in Glg. (7.2.3) zu erhalten, müssen Produkte von rationalen Funktionen und Logarithmen integriert werden. Es stellt sich somit die Frage, ob und welche weiteren transzendenten Funktionen eingeführt werden müssen, um Ausdrücke der Form $\int P(u) \log(u)$ zu integrieren. Diese Fragestellung wurde von Kummer bereits im Jahr 1840 [29] beantwortet, der zeigte, dass die *iterierte* Integration

$$\int P \left(\int Q dt_1 \right) dt_2$$

zweier rationaler Funktionen P, Q auf eine neue transzendente Funktion, den *Dilogarithmus* Li_2 führt. Ebenso lässt sich das Ergebnis der *iterierten* Integration dreier rationaler Funktionen

$$\int S \left(\int P \left(\int Q dt_1 \right) dt_2 \right) dt_3$$

vollständig durch rationale Funktionen, Logarithmen, Dilogarithmen und eine weitere transzendente Funktion, den *Trilogarithmus* Li_3 darstellen [29].

Dabei ist der Dilogarithmus durch

$$\text{Li}_2(u) = -\int_0^u \log(1-t) \frac{dt}{t}$$

und der Trilogarithmus durch

$$\text{Li}_3(u) = \int_0^u \text{Li}_2(t) \frac{dt}{t}$$

gegeben. Es ist leicht zu erkennen, dass man eine natürliche Erweiterung dieser Funktionen auf den n -ten *Polylogarithmus* durch

$$\text{Li}_n(u) = \int_0^u \text{Li}_{n-1}(t) \frac{dt}{t}$$

erhält. Wenn man

$$\text{Li}_1 = -\log(1-u) = \int_0^u \frac{dt}{1-t}$$

definiert, so ist Li_n durch das iterierte Integral

$$\text{Li}_n(u) = \int_0^u \left(\dots \left(\int_0^{t_2} \left(\int_0^{t_1} \frac{dt}{1-t} \right) \frac{dt_1}{t_1} \right) \dots \right) \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}} =: \int_0^u \omega_0^{n-1} \omega_1$$

mit

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

gegeben, wobei, auch wenn nicht explizit geschrieben, $|u| < 1$ weiterhin wie in Glg. (7.2.3) gilt. Die Kurzschreibweise ist so zu lesen, dass die ganz linke Integration als letzte auszuführen ist. Eine ausführliche Darstellung von Polylogarithmen findet man in [35].

Betrachtet man nach dieser Vorbetrachtung den Beitrag in $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ zu Glg. (7.2.3)

$$I_{\epsilon^{-1}} = \frac{2\pi^4}{\epsilon} \int \left(\frac{u}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{u^2 - u + 1} + \frac{1}{u} \right) \left(2\alpha - \log(u^2 - u + 1) + 2 \log(1-u) \right) du,$$

so erkennt man in den unterstrichenen Termen sofort die Darstellung des Dilogarithmus $\text{Li}_2(u)$. Für alle anderen Terme müssen etwas kompliziertere Transformationen gefunden werden, welche auf Logarithmen und Dilogarithmen komplexer Argumente führen. Auch wenn diese in $I_{\epsilon^{-1}}$ noch relativ einfach zu finden sind, ist dies bei höheren Ordnungen und schwierigeren Integralen schwer bzw. unmöglich.

Diese Tatsache führt dazu, dass gut motivierte Erweiterungen von Polylogarithmen eingeführt wurden, welche sich als iterierte Integrale darstellen lassen und bei der Berechnung von Feynmanintegralen hilfreich sind.

Die Darstellung der klassischen Polylogarithmen als iteriertes Integral wurde durch die beiden 1-Formen

$$\mathcal{A}_{Poly} = \left\{ \omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t} \right\}$$

mit einer Integration gemäß

$$\text{Li}_n(u) = \int_0^u \omega_n = \int_0^u \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{n-1} \omega_1$$

dargestellt. Lässt man den Satz der 1-Formen gleich, erlaubt aber eine Veränderung der Reihenfolge mit

$$\operatorname{Li}_{n_1, n_2, \dots, n_m}(u) = \int_0^u \omega_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \int_0^u \omega_{n_1} \omega_{n_2} \cdots \omega_{n_m} = \int_0^u \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{n_1-1} \omega_1 \cdot \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{n_2-1} \omega_1 \cdots \underbrace{\omega_0 \dots \omega_0}_{n_m-1} \omega_1 ,$$

erhält man multiple Polylogarithmen in einer Variable.

Eine minimale Erweiterung von \mathcal{A}_{Poly} um eine weitere 1-Form auf

$$\mathcal{A}_{HPL} = \left\{ \frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t}, \frac{dt}{1+t} \right\}$$

führt auf harmonische Polylogarithmen in einer Variable [44] (HPLs), die sich als iterierte Integrale mit $\omega_i \in \mathcal{A}_{HPL}$ darstellen lassen. Andere Erweiterungen von \mathcal{A}_{Poly} führen auf zyklotomische harmonische Polylogarithmen [2] (CHPLs), 2-dimensionale harmonische Polylogarithmen [18, 19] (2dHPLs), multiple Polylogarithmen in mehreren Variablen [21] (MPLs) bzw. Hyperlogarithmen [33] (HYPLs).

Um Glg. (7.2.3) zu berechnen, bieten sich zyklotomische harmonische Polylogarithmen an. Diese bestehen aus iterierten Integralen über

$$\mathcal{A}_{zykl} = \left\{ \frac{1}{t} \right\} \cup \left\{ \frac{t^l}{\Phi_k(t)} \mid k \in \mathbb{N}_+, 0 \leq l < \deg(\Phi_k(t)) \right\} , \quad (7.2.4)$$

wobei $\Phi_k(t)$ das k te zyklotomische Polynom [60]

$$\Phi_k(t) = \prod_{\substack{1 \leq l < k \\ \operatorname{ggT}(l, k) = 1}} \left(t - e^{2\pi \cdot i \frac{l}{k}} \right)$$

bezeichnet. Die ersten 10 zyklotomischen Polynome sind durch

$$\begin{array}{ll} \Phi_1(x) = x - 1 & \Phi_2(x) = x + 1 \\ \Phi_3(x) = x^2 + x + 1 & \Phi_4(x) = x^2 + 1 \\ \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & \Phi_6(x) = x^2 - x + 1 \\ \Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & \Phi_8(x) = x^4 + 1 \\ \Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1 & \Phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \end{array}$$

gegeben und ein Vergleich mit Glg. (7.2.3) zeigt, dass dort als nicht triviale Integration das zyklotomische Polynom Φ_6 im Nenner auftritt.

Mit Glg. (7.2.4) werden die zyklotomischen harmonischen Polylogarithmen durch

$$\mathcal{C}_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{l_1, l_2, \dots, l_m}(u) = \begin{cases} \frac{1}{k!} (\log(u))^k & \text{wenn } (k_1, k_2, \dots, k_m) = (0, 0, \dots, 0) \\ \int_0^u \omega_{k_1}^{l_1}(t) \cdot \mathcal{C}_{k_2, \dots, k_m}^{l_2, \dots, l_m}(t) & \text{wenn } (k_1, k_2, \dots, k_m) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (7.2.5)$$

mit

$$\omega_0^0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad \omega_k^l(t) = \frac{t^l}{\Phi_k(t)} dt; \quad 0 < l < \deg(\Phi_k(t))$$

definiert, wobei der Index m als Gewicht bezeichnet wird.

Mit Hilfe der zyklotomischen Polylogarithmen wird die Integration in Glg. (7.2.3) trivial, da man nur noch die Darstellung der Produkte aus Logarithmen als zyklotomische Polylogarithmen finden muss, was durch Differentiation im Integranden getan werden kann.

Die relevanten Darstellungen in sind $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$

$$\begin{aligned} \log(\Phi_6) &= \log(1 - t + t^2) = 2\mathcal{C}_6^1(t) - \mathcal{C}_6^0(t) \\ \log(-\Phi_1) &= \log(1 - t) = \mathcal{C}_1^0(t) \end{aligned}$$

und in $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$\begin{aligned} \log^2(1 - t) &= 2\mathcal{C}_{1,1}^{0,0}(t) \\ \log^2(1 - t + t^2) &= 2(\mathcal{C}_{6,6}^{0,0}(t) - 2(\mathcal{C}_{6,6}^{1,0}(t) + \mathcal{C}_{6,6}^{0,1}(t)) + 4\mathcal{C}_{6,6}^{1,1}(t)) \\ \log(1 - t) \log(t) &= \mathcal{C}_{0,1}^{0,0}(t) + \mathcal{C}_{1,0}^{0,0}(t) \\ \log(1 - t) \log(1 - t + t^2) &= 2(\mathcal{C}_{6,1}^{1,0}(t) + \mathcal{C}_{1,6}^{0,1}(t)) - (\mathcal{C}_{6,1}^{0,0}(t) + \mathcal{C}_{1,6}^{0,0}(t)) \\ \text{Li}_2 &= -\mathcal{C}_{0,1}^{0,0}(t) . \end{aligned}$$

Damit wird Glg. (7.2.3) zu

$$\begin{aligned} C(u) &= \left(\frac{2\pi^4}{\epsilon^2} + \frac{\pi^6}{3} \right) (\mathcal{C}_0^0(u) - \mathcal{C}_1^0(u) + \mathcal{C}_6^0(u) - 2\mathcal{C}_6^1(u)) \\ &+ \frac{4\pi^2\alpha}{\epsilon} (\mathcal{C}_0^0(u) - \mathcal{C}_6^0(u) + \mathcal{C}_6^1(u) + \mathcal{C}_0^0(1-u) - \mathcal{C}_6^0(1-u) + \mathcal{C}_6^1(1-u)) \\ &+ \frac{2\pi^2}{\epsilon} \left(\int_0^u + \int_0^{1-u} \right) \left[(\omega_0^0(t) - \omega_6^0(t) + \omega_6^1(t)) (2\mathcal{C}_1^0(t) + \mathcal{C}_6^0(t) - 2\mathcal{C}_6^1(t)) \right] \\ &+ (4\alpha^2 + 4) \pi^4 (\mathcal{C}_6^0(u) - \mathcal{C}_6^1(u) - \mathcal{C}_0^0(u) + \mathcal{C}_6^0(1-u) - \mathcal{C}_6^1(1-u) - \mathcal{C}_0^0(1-u)) \\ &+ \pi^4 \left(\int_0^u + \int_0^{1-u} \right) \left[(\omega_6^0(t) - \omega_6^1(t) - \omega_0^0(t)) (2(\mathcal{C}_{0,1}^{0,0}(t) + \mathcal{C}_{1,0}^{0,0}(t)) + 4\mathcal{C}_{1,1}^{0,0}(t)) \right. \\ &\quad - 4(2(\mathcal{C}_{1,6}^{0,1}(t) + \mathcal{C}_{6,1}^{1,0}(t)) - (\mathcal{C}_{1,6}^{0,0}(t) + \mathcal{C}_{6,1}^{0,0}(t))) \\ &\quad + 2(\mathcal{C}_{6,6}^{0,0}(t) - 2(\mathcal{C}_{6,6}^{0,1}(t) + \mathcal{C}_{6,6}^{1,0}(t)) + 4\mathcal{C}_{6,6}^{1,1}(t)) \\ &\quad \left. - 4\alpha(2\mathcal{C}_6^1(t) - \mathcal{C}_6^0(t) - 2\mathcal{C}_1^0(t)) \right] \\ &+ 4\pi^2 \left(\int_0^u + \int_0^{1-u} \right) \left[(\omega_0^0(t) + \omega_1^0(t) + \omega_6^0(t)) \mathcal{C}_{0,1}^{1,0}(t) \right] , \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

wobei eckige Klammern gemäß Def. (7.2.5) zu integrierende Ausdrücke anzeigen.

An dieser Stelle ist die Berechnung von \mathcal{H}_R^E abgeschlossen, da es gelungen ist, das Integral

über die Inhomogenität vollständig durch zyklotomische harmonische Polylogarithmen auszudrücken. Alle weiteren Schritte sind vergleichsweise trivial und bringen keine weiteren Einsichten.

7.3 Zusammenfassender Ausblick

Auch wenn das vorangegangene Beispiel sehr konkret und vergleichsweise einfach ist, werden an ihm wichtige, allgemeinere Herangehensweisen im Umgang mit den Inhomogenitäten in Differentialgleichungen für MIs offensichtlich, sodass die in dieser Arbeit betrachteten Beispiele und Techniken in einen allgemeineren Rahmen eingebettet werden können.

Ausgehend von der Fragestellung, wie ganze Klassen von skalaren Feynmanintegralen gelöst werden können, wurde die Zusammenfassung zu Topologien vorgestellt, welche aus dem minimalen Satz an Propagatoren und irreduzibler Skalarprodukte bestehen, wobei der Übergang vom skalaren Feynmanintegral zu Integralen der Topologie mittels *trivialer Tensorreduktion* erfolgt. Weiterhin wurde gezeigt, dass sich die Betrachtung ganzer Topologien mit Hilfe von IBP-Identitäten auf das Berechnen weniger MIs reduziert. Zur Berechnung der MIs wurde die Differentialgleichungsmethode betrachtet, in welcher man versucht, für das betrachtete MI eine inhomogene, gewöhnliche DGL erster Ordnung in Mandelstamvariablen (oder Propagatormassen) zu lösen. In dieser Methode liegt die wesentliche Schwierigkeit in der Integration über die Inhomogenität, die aus einer Linearkombination von weiteren MIs der Topo- und Subtopologien, multipliziert rationalen Funktionen in den Massen und kinematischen Variablen, besteht.

Welche Voraussetzungen notwendig sein werden, um diese Integration über die Inhomogenität vornehmen zu können, sind schon aus dem vorgestellten Beispiel ersichtlich. Die Grundvoraussetzung ist offensichtlich die Kenntnis der Entwicklung der Inhomogenität bis zu hinreichender Ordnung in ϵ , welche sich in dem betrachteten Beispiel auf die Kenntnis der nicht trivialen Entwicklung von ${}_2F_1$ bis $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ reduzierte.

Ist diese Entwicklung durch iterierte Integrale darstellbar, die einer der angesprochenen Erweiterungen der klassischen Polylogarithmen entsprechen, so kann versucht werden eine Variablentransformation zu finden, welche die Integration über die Inhomogenität in Darstellungen iterierter Integrale höheren Gewichtes überführt.

In dem betrachteten Beispiel führt die ϵ -Entwicklung von ${}_2F_1$ nach [26] auf multiple Polylogarithmen, von denen die Spezialfälle der Logarithmen und Polylogarithmen in Glg. (7.2.3) auftraten. Durch die Variablentransformation

$$t \rightarrow u = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{t}{4m^2 + t}} + 1 \right); \quad 0,5 < u < 1 \quad dt \rightarrow du = \frac{m^2}{\sqrt{t}(4m^2 + t)^{3/2}} dt$$

wurde erreicht, die t -Integration in Darstellungen zyklotomischer harmonischer Polylogarithmen zu überführen. D.h. die rationalen Funktionen, die als Vorfaktoren vor den MIs in den Inhomogenitäten auftreten, werden in Zusammenhang mit der ϵ -Entwicklung und der t -Integration auf Darstellungen iterierter Integrale höheren Gewichtes gebracht, wie in Glg. (7.2.6) dargestellt.

Dabei wurde in dieser skizzenhaften Einführung iterierter Integrale und ihrer Anwendung im Zusammenhang mit der Integration der Inhomogenität eventuell der Eindruck

vermittelt, dass ad hoc Funktionen eingeführt werden, die als Spezialfall klassische Polylogarithmen enthalten und die auftretenden Integrale beschreiben. Allerdings besitzen diese Verallgemeinerungen Eigenschaften, die aus Gleichungen wie Glg. (7.2.3) nicht ersichtlich werden würden. Sie formen z.B. in ihrer Integraldarstellung eine shuffle-Algebra [16] und besitzen Summendarstellungen, die eine quasi-shuffle-Algebra [24] formen. Diese Eigenschaften führen dazu, dass für jede dieser Verallgemeinerungen bereits Implementierungen existieren, mit denen algebraische Manipulationen und numerische Auswertungen vorgenommen werden können (HPLs und 2dHPLs [36, 37] [20], CHPLs [1], MPLs und HYPLs [57] [40]).

Betrachtet man die zentrale DGL (6.1.3) des \mathcal{H} -MI in diesem Zusammenhang, so besteht der wesentliche Punkt offensichtlich in der Integration über die \mathcal{B} - und \mathcal{S} -MIs ($\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ sind integrierbar). Da die Inhomogenität der DGL (6.2.1) des \mathcal{B} -MIs ausschließlich die MIs der \mathcal{S} -Topologie, multipliziert mit rationalen Funktionen in den Massen und der kinematischen Variablen, enthält, wird man, falls eine Lösung der \mathcal{S} -MIs in der Form iterierter Integrale vorliegt, das \mathcal{B} -MI in Form iterierter Integrale höheren Gewichtes darstellen können. Das würde dazu führen, dass auch die DGL des \mathcal{H} -MIs lösbar wird.

Allerdings sind die sunrise-MIs insofern hervorzuheben, dass sie die ersten und einfachsten Integrale sind, die sich durch keine der bereits benannten Verallgemeinerungen klassischer Polylogarithmen darstellen lassen [6].

Jedoch führen sowohl der Grenzfall gleicher [10, 32], als auch die Betrachtung bei beliebigen Massen [4–6, 39] auf eine elliptische Verallgemeinerung klassischer Polylogarithmen [10] [5, 6]. Dabei ist es gelungen, die \mathcal{S} -MIs für unterschiedliche Massen bis $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ durch diese elliptischen Polylogarithmen darzustellen [6], für die eine Darstellung als iteriertes Integral existiert (Glg. (92) in [6]).

In diesem Zusammenhang ist die aufgestellte DGL für das MI der \mathcal{H} -Topologie, neben der an Beispielen verdeutlichten Betrachtung bekannter Methoden, als zentraler Punkt dieser Arbeit zu verstehen. Denn mit ihr wird gezeigt, dass die Erforschung elliptischer Polylogarithmen in Bezug auf eine weitere massive 2-Schleifen Topologie relevant ist.

Anhang A

A.1 Berechnung des Tadpole-Integrals

In der folgenden wird die Tadpole-Topologie \mathcal{I}_n in Minkowskimetrik berechnet.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_n &= \int \frac{dk^D}{(k^2 - m^2)^n} \stackrel{\text{Wick-R.}}{=} i(-1)^n \int \frac{dK^D}{(K^2 + m^2)^n} \stackrel{\text{sph. K.}}{=} i(-1)^n \int_0^\infty \frac{K_e^{D-1}}{(K_e^2 + m^2)^n} dK_e \cdot \int d\Omega_D \\
 &= i(-1)^n \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})(m^2)^n} \int_0^\infty \frac{K_e^{D-1}}{(\frac{K_e^2}{m^2} + 1)^n} dK_e \stackrel{s=K_e^2/m^2}{=} i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})(m^2)^{\frac{2n-D}{2}}} \int_0^\infty ds \frac{s^{\frac{D-2}{2}}}{(s+1)^n}
 \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

Die Beta-Funktion ist definiert durch (vgl. z.B. [3], S. 258)

$$B(z, w) \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{(t+1)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0) . \tag{A.1.2}$$

Ein Vergleich von Glg. (A.1.1) mit Glg. (A.1.2) zeigt, dass es sich bei der s Integration um die Beta-Funktion mit $z = D/2$ und $w = n - D/2$ handelt, wobei sich $\Gamma(z)$ mit der Gamma-Funktion aus der Integration über die D-Sphäre kürzt. Es gilt somit

$$\mathcal{I}_n = i \frac{(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(m^2)^{n - \frac{D}{2}} \Gamma(n)} . \tag{A.1.3}$$

Durch Wick-Rotation gemäß $\mathcal{I}_n \xrightarrow{W.R.} i(-1)^n \mathcal{I}_n^E$ erhält man

$$\mathcal{I}_n^E = \int \frac{dK}{(K^2 + m^2)^n} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(m^2)^{n - \frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} . \tag{A.1.4}$$

Anhang B

B.1 Polynome und DGLs der \mathcal{B} und \mathcal{H} -MIs

B.1.1 Polynome

In den folgenden Polynomen bezeichnet s keinen Massenindex sondern gibt das Impulsquadrat an. Somit ist eine Vertauschung von $s \leftrightarrow \text{Massenindex}$ äquivalent zur Vertauschung der Masse mit \sqrt{s} .

Nennerpolynome

$$\begin{aligned} N_1^{i,j,s} &= ((m_i - m_j)^2 - s)((m_i + m_j)^2 - s) \\ N_2^{i,j,k,l,n,s} &= m_i^4 m_l^2 + m_i^2 (m_j^2 (m_k^2 - m_l^2 - m_n^2) - m_k^2 (m_l^2 + s) + (m_l^2 - m_n^2)(m_l^2 - s)) \\ &\quad - s((m_j^2 - m_k^2)(m_k^2 - m_l^2) + m_n^2 (m_j^2 + m_k^2)) \\ &\quad + m_n^2 (m_j^2 - m_k^2)(m_j^2 - m_l^2) + m_j^2 m_n^4 + m_k^2 s^2 \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- $N_1^{i,j,s}$: Vollständig symmetrisch in i, j
- $N_2^{i,j,k,l,n,s}$: Symmetrisch unter gleichzeitiger Vertauschung ($i \leftrightarrow j, l \leftrightarrow n$) sowie ($i \leftrightarrow n, j \leftrightarrow l$)

Zählerpolynome

$$Z^{i,j,k,l,n,s} = m_i^2 (m_j^2 + m_l^2 - s) - m_j^4 + m_j^2 (m_k^2 + m_l^2 - 2m_n^2 + s) + m_k^2 (s - m_l^2)$$

B.1.2 DGLs spezieller Massenkongfigurationen des \mathcal{H} -MI

Die folgenden Massenkongfigurationen des MI der \mathcal{H} -Topologie werden als Skalarintegrale in 2-Schleifen Korrekturen zum Propagator in QED und QCD auftreten. Dabei bezeichnen gewellte Linien masselose Teilchen. Die massiven Propagatoren besitzen gleiche Massen m . Die DGLs (B.1.1),(B.1.2),(B.1.3) geben Korrekturen zum Gluonpropagator, die DGLs (B.1.4),(B.1.5) zum Quarkpropagator. Die DGLs (B.1.3)/(B.1.4) werden ebenso

in der QED als NNLO-Korrekturen des Photon-/ Fermionenpropagators auftreten.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \text{diagram}_1 &= \frac{(D-6)}{2s} \text{diagram}_2 + \frac{(D-3)}{s(4m^2-s)} \text{diagram}_3 + \frac{(2m^2+s)}{s^2(4m^2-s)} \text{diagram}_4 \\
&+ \frac{(2-D)}{2m^2s(4m^2-s)} \left(\text{diagram}_5 + \text{diagram}_6 \right) + \frac{(D-4)(2m^2+s)}{8(D-3)m^2s(m^2-s)} \text{diagram}_7 \\
&- \frac{(3D-8)(4m^4-8m^2s+s^2)}{8m^2s^2(4m^4-5m^2s+s^2)} \text{diagram}_8 + \frac{(D-2)^2(2m^2-5s)}{8(D-3)m^2s^2(4m^4-5m^2s+s^2)} \text{diagram}_9
\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

$$\frac{d}{ds} \text{diagram}_{10} = -\frac{2(D-5)(D-3)}{(D-4)s^2} \text{diagram}_{11} + \frac{2(D-5)(9(D-6)D+80)}{(D-4)^2s^3} \text{diagram}_{12} \tag{B.1.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \text{diagram}_{13} &= -\frac{2(D-3)((D-5)s+4m^2)}{(D-4)s(s-4m^2)^2} \text{diagram}_{14} \\
&+ \frac{(D-2)(4(D-2)m^2+(D-6)s)}{(D-4)s(ms-4m^3)^2} \text{diagram}_{15} \\
&+ \frac{(8(D-5)m^4+4(13-4D)m^2s-(D-6)s^2)}{4(D-3)m^2s(4m^4-5m^2s+s^2)} \text{diagram}_{16} \\
&- \frac{(3D-8)(2Dm^2+(D-6)s)}{4(D-4)m^2s(4m^4-5m^2s+s^2)} \text{diagram}_{17} \\
&+ \frac{(D-2)^2(4(D+2)m^2+(5D-26)s)}{4(D-4)(D-3)s(m^2-s)(ms-4m^3)^2} \text{diagram}_{18}
\end{aligned} \tag{B.1.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \text{---} \text{---} \text{---} &= \left(\frac{D-4}{s-m^2} + \frac{1-\frac{D}{2}}{s} \right) \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{(3-D)}{(m^2-s)^2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{(D-2)}{(m^3-ms)^2} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&+ \frac{(D-4)(m^2+s)}{4(D-3)m^2s(m^2-s)} \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{(3m^2+s)}{s(m^2-s)^2} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{(3D-8)}{2s(m^2-s)^2} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&- \frac{(8-3D)}{4m^4s-4m^2s^2} \text{---} \text{---} \text{---} - \frac{(D-2)^2}{2(D-3)s(m^3-ms)^2} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (\text{B.1.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \text{---} \text{---} \text{---} &= \frac{2(D-3)((D-3)m^2+(D-5)s)}{(D-4)(m^2-s)^3} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&- \frac{((9(D-6)D+80)m^4+2(11(D-8)D+172)m^2s+(D-6)(D-4)s^2)}{(D-4)^2s(s-m^2)^3} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&+ \frac{(D-2)((D-2)m^4+6(D-4)m^2s+(D-6)s^2)}{2(D-4)m^2s(s-m^2)^3} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&+ \frac{(3D-8)((D-3)(3D-10)m^2+(D(5D-41)+82)s)}{(D-4)^2s(s-m^2)^3} \text{---} \text{---} \text{---} \\
&+ \frac{(D-2)^2((D-3)m^2+(D-5)s)}{2(D-4)(D-3)m^2s(m^2-s)^3} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (\text{B.1.5})
\end{aligned}$$

B.1.3 DGL des β -MI im Grenzfall gleicher Massen

$$\left. \frac{d\mathcal{B}}{ds} \right|_{m_i=m} = -\frac{1}{2s(4m^2-s)} \left(((D-4)s+4m^2) \mathcal{B} + (2-D)\mathcal{S}_0 + (3D-8)\mathcal{S}_1 - 10m^2\mathcal{S}_2 \right)$$

B.2 Polynome und DGLs der sunrise-MIs

B.2.1 Polynome

Die runden Klammern um hochgestellte Indizes zeigen an, das Polynome in Glg. (B.2.2),(B.2.1) symmetrisch unter deren Vertauschungen sind.

Nennerpolynome:

$$N^{(i,j,k)} = s \left((m_i + m_j - m_k)^2 - s \right) \left((m_i - m_j + m_k)^2 - s \right) \left((-m_i + m_j + m_k)^2 - s \right) \left((m_i + m_j + m_k)^2 - s \right) \quad (\text{B.2.1})$$

Zählerpolynome

$$\begin{aligned} P_1^{i,j,k} &= -m_i^6 + m_i^4 \left(3(m_j^2 + m_k^2) + 5s \right) - m_i^2 \left(3m_j^4 + 2m_j^2(m_k^2 + 3s) + 3m_k^4 - 2m_k^2s + 7s^2 \right) \\ &\quad + m_j^6 + m_j^4(s - m_k^2) - m_j^2(m_k^4 - 14m_k^2s + 5s^2) + m_k^6 - 7m_k^4s + 3m_k^2s^2 + 3s^3 \\ P_2^{i,(j,k)} &= 3m_i^8 - 2m_i^6(5(m_j^2 + m_k^2) + 4s) + 2m_i^4(4m_j^2m_k^2 + 3(2(m_j^4 + m_k^4) + s(m_j^2 + m_k^2) + s^2)) \\ &\quad + 2m_i^2 \left(s^2(m_j^2 + m_k^2) - 3(m_j^2 + m_k^2)(m_j^2 - m_k^2)^2 + 2s(m_j^4 - 10m_j^2m_k^2 + m_k^4) \right) \\ &\quad + 2s^3(m_j^2 + m_k^2) - 2s(m_j^2 - m_k^2)^2(m_j^2 + m_k^2) + (m_j^2 - m_k^2)^4 - s^4 \\ Q^{i,(j,k)} &= 8m_j^2m_k^2(m_i^2 - s) + (m_j + m_k)^4(3m_i^2 + 6m_jm_k + s) + 2m_jm_k(m_i^2 - s)(3m_i^2 + s) \\ &\quad + (m_i^2 - s)^3 + (m_j + m_k)^2(-3m_i^4 - 4m_jm_k(3m_i^2 + s) + 2m_i^2s - 8m_j^2m_k^2 + s^2) - (m_j + m_k)^6 \\ R_1^{i,j,k} &= m_i^6 - m_i^4(3m_j^2 + m_k^2 + s) + m_i^2(3m_j^4 - 2m_j^2(m_k^2 + s) - m_k^4 + 10m_k^2s - s^2) \\ &\quad - ((m_j - m_k)^2 - s)(m_j^2 - m_k^2 - s)((m_j + m_k)^2 - s) \\ R_2^{(i,k,j)} &= 2s(m_i^2 + m_j^2 + m_k^2) + (m_i - m_j - m_k)(m_i + m_j - m_k)(m_i - m_j + m_k)(m_i + m_j + m_k) - 3s^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

B.2.2 DGLs der sunrise-MIs im Grenzfall gleicher Massen

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{S}_1}{ds} \right|_{m_i=m} &= \frac{(D-3)\mathcal{S}_1 - m^2\mathcal{S}_2}{s} \\ \left. \frac{d\mathcal{S}_2}{ds} \right|_{m_i=m} &= \frac{(9(8-3D)m^4 + 10(D-2)m^2s + (D-4)s^2)}{2s(s-9m^2)(s-m^2)} \mathcal{S}_2 \\ &\quad + \frac{(D-3)(3D-8)(3m^2-s)}{2s(s-9m^2)(s-m^2)} \mathcal{S}_1 - \frac{(D-2)^2}{2m^2(s-9m^2)(s-m^2)} \mathcal{I}_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] J. Ablinger. Computer Algebra Algorithms for Special Functions in Particle Physics. ArXiv e-prints, 2013.
- [2] J. Ablinger, J. Blümlein, and C. Schneider. Harmonic sums and polylogarithms generated by cyclotomic polynomials. Journal of Mathematical Physics, 52(10):102301, 2011.
- [3] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS. Dover Publications, Inc., 1965.
- [4] Luise Adams, Christian Bogner, and Stefan Weinzierl. The two-loop sunrise graph with arbitrary masses. J. Math. Phys., 54:052303, 2013.
- [5] Luise Adams, Christian Bogner, and Stefan Weinzierl. The two-loop sunrise graph in two space-time dimensions with arbitrary masses in terms of elliptic dilogarithms. J. Math. Phys., 55(10):102301, 2014.
- [6] Luise Adams, Christian Bogner, and Stefan Weinzierl. The two-loop sunrise integral around four space-time dimensions and generalisations of the Clausen and Glaisher functions towards the elliptic case. J. Math. Phys., 56:072303, 2015.
- [7] Mario Argeri and Pierpaolo Mastrolia. Feynman Diagrams and Differential Equations. Int.J.Mod.Phys., A22:4375–4436, 2007.
- [8] Frits A. Berends, Andrei I. Davydychev, and Vladimir A. Smirnov. Small threshold behavior of two loop selfenergy diagrams: Two particle thresholds. Nucl.Phys., B478:59–89, 1996.
- [9] T. Binoth, E.W. Nigel Glover, P. Marquard, and J.J. van der Bij. Two loop corrections to light by light scattering in supersymmetric QED. JHEP, 0205:060, 2002.
- [10] Spencer Bloch and Pierre Vanhove. The elliptic dilogarithm for the sunset graph. 2013.
- [11] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. Nuovo Cim., 12(1):20–26, 1972.
- [12] Michele Caffo, H. Czyz, A. Grzelinska, and E. Remiddi. Numerical evaluation of the general massive 2 loop 4 denominator selfmass master integral from differential equations. Nucl.Phys., B681:230–246, 2004.

- [13] Michele Caffo, H. Czyz, S. Laporta, and E. Remiddi. The Master differential equations for the two loop sunrise selfmass amplitudes. Nuovo Cim., A111:365–389, 1998.
- [14] K.G. Chetyrkin and F.V. Tkachov. Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops. Nucl.Phys., B192:159–204, 1981.
- [15] Andrei I. Davydychev and M. Yu. Kalmykov. New results for the epsilon expansion of certain one, two and three loop Feynman diagrams. Nucl. Phys., B605:266–318, 2001.
- [16] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the Groups $H(\Pi, n)$, I. Annals of Mathematics, 58(1):pp. 55–106, 1953.
- [17] T. Gehrmann and E. Remiddi. Differential equations for two loop four point functions. Nucl.Phys., B580:485–518, 2000.
- [18] T. Gehrmann and E. Remiddi. Two loop master integrals for $\gamma \rightarrow 3$ jets: The Nonplanar topologies. Nucl.Phys., B601:287–317, 2001.
- [19] T. Gehrmann and E. Remiddi. Two loop master integrals for $\gamma \rightarrow 3$ jets: The Planar topologies. Nucl.Phys., B601:248–286, 2001.
- [20] T. Gehrmann and E. Remiddi. Numerical evaluation of two-dimensional harmonic polylogarithms. Comput. Phys. Commun., 144:200–223, 2002.
- [21] A. B. Goncharov. Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes. Math. Res. Lett., 5(4):497–516, 1998.
- [22] A.G. Grozin. Integration by parts: An Introduction. Int.J.Mod.Phys., A26:2807–2854, 2011.
- [23] Andrey Grozin. LECTURES ON QED AND QCD: PRACTICAL CALCULATION AND RENORMALIZATION. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2007. ISBN 9789812569141, 9812569146.
- [24] M. E. Hoffman. Quasi-shuffle products. ArXiv Mathematics e-prints, 1999.
- [25] Tobias Huber and Daniel Maitre. HypExp 2, Expanding Hypergeometric Functions about Half-Integer Parameters. Comput. Phys. Commun., 178:755–776, 2008.
- [26] Mikhail Yu. Kalmykov and Bernd A. Kniehl. Towards all-order Laurent expansion of generalized hypergeometric functions around rational values of parameters. Nucl. Phys., B809:365–405, 2009.
- [27] T. Kinoshita. Mass singularities of Feynman amplitudes. J.Math.Phys., 3:650–677, 1962.
- [28] A.V. Kotikov. Differential equations method: New technique for massive Feynman diagrams calculation. Phys.Lett., B254:158–164, 1991.

- [29] E. E. Kummer. Über die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, page 74–90; 193–225; 328–371, 1840.
- [30] S. Laporta. High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations. Int.J.Mod.Phys., A15:5087–5159, 2000.
- [31] S. Laporta and E. Remiddi. The Analytical value of the electron (g-2) at order α^3 in QED. Phys.Lett., B379:283–291, 1996.
- [32] S. Laporta and E. Remiddi. Analytic treatment of the two loop equal mass sunrise graph. Nucl.Phys., B704:349–386, 2005.
- [33] J. A. Lappo-Danilevski. Théorie algorithmique des corps de Riemann. Matem. Sb., 34:113–148, 1927.
- [34] T.D. Lee and M. Nauenberg. Degenerate Systems and Mass Singularities. Phys.Rev., 133:B1549–B1562, 1964.
- [35] L. Lewin. Structural Properties of Polylogarithms, volume 37 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 1991.
- [36] D Maitre. HPL, a mathematica implementation of the harmonic polylogarithms. Comput. Phys. Commun., 174:222–240, 2006.
- [37] Daniel Maitre. Extension of HPL to complex arguments. Comput. Phys. Commun., 183:846, 2012.
- [38] Sven Moch, Peter Uwer, and Stefan Weinzierl. Nested sums, expansion of transcendental functions and multiscale multiloop integrals. J. Math. Phys., 43:3363–3386, 2002.
- [39] Stefan Müller-Stach, Stefan Weinzierl, and Raphael Zayadeh. Picard-Fuchs equations for Feynman integrals. Commun. Math. Phys., 326:237–249, 2014.
- [40] E. Panzer. Feynman integrals and hyperlogarithms. ArXiv e-prints, 2015.
- [41] G. Passarino and M. Veltman. One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model. Nuclear Physics B, 160(1):151 – 207, 1979.
- [42] W. Pauli and F. Villars. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. Rev. Mod. Phys., 21:434–444, 1949.
- [43] E. Remiddi. Differential equations for the two loop equal mass sunrise. Acta Phys.Polon., B34:5311–5322, 2003.
- [44] E. Remiddi and J. A. M. Vermaseren. Harmonic polylogarithms. Int. J. Mod. Phys., A15:725–754, 2000.
- [45] Ettore Remiddi. Differential equations for Feynman graph amplitudes. Nuovo Cim., A110:1435–1452, 1997.

- [46] M.A. Shpot. A Massive Feynman integral and some reduction relations for Appell functions. J.Math.Phys., 48:123512, 2007.
- [47] Alexander V. Smirnov. FIRE5: a C++ implementation of Feynman Integral REduction. Comput.Phys.Commun., 189:182–191, 2014.
- [48] A.V. Smirnov. Algorithm FIRE – Feynman Integral REduction. JHEP, 0810:107, 2008.
- [49] A.V. Smirnov and A.V. Petukhov. The Number of Master Integrals is Finite. Lett.Math.Phys., 97:37–44, 2011.
- [50] Vladimir A. Smirnov. Analytic Tools for Feynman Integrals. 250. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [51] E. R. Speer. Generalized Feynman Amplitudes. Princeton University Press, 1969.
- [52] C. Studerus. Reduze-Feynman Integral Reduction in C++. Comput.Phys.Commun., 181:1293–1300, 2010.
- [53] Gerard 't Hooft. Dimensional regularization and the renormalization group. Nucl.Phys., B61:455–468, 1973.
- [54] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. Nucl.Phys., B44:189–213, 1972.
- [55] O.V. Tarasov. Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension. Phys.Rev., D54:6479–6490, 1996.
- [56] O.V. Tarasov. Generalized recurrence relations for two loop propagator integrals with arbitrary masses. Nucl.Phys., B502:455–482, 1997.
- [57] Jens Vollinga and Stefan Weinzierl. Numerical evaluation of multiple polylogarithms. Comput. Phys. Commun., 167:177, 2005.
- [58] A. von Manteuffel and C. Studerus. Reduze 2 - Distributed Feynman Integral Reduction. 2012.
- [59] Stefan Weinzierl. The Art of computing loop integrals. pages 345–395, 2006.
- [60] Weisstein, Eric W. Cyclotomic Polynomial. MathWorld—A Wolfram Web Resource.<http://mathworld.wolfram.com/CyclotomicPolynomial.html>, 2002. Besucht: 03-08-2015.
- [61] Kenneth G. Wilson. Quantum field theory models in less than four-dimensions. Phys.Rev., D7:2911–2926, 1973.
- [62] Wolfram Research, Inc. Hypergeometric2F1. <http://functions.wolfram.com/07.23.07.0002.01>, 2001. Besucht: 07-04-2015.
- [63] Wolfram Research, Inc. Mathematica, 2014. Version 10.0, Champaign, IL.