

Dyson-Schwinger-Gleichungen und die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen Eine Einführung

Bachelorarbeit



Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik

eingereicht von: Bettina Johanna Grauel
geboren am: 25. Mai 1989 in Berlin

Betreuung: Prof. Dr. Dirk Kreimer
Dr. Oliver Schnetz

eingereicht am: 30. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Feldtheorie	2
2.1	Quantenfeldtheorie	3
2.2	Feynman-Graphen	4
3	Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	6
3.1	Grundbegriffe	6
3.2	Was ist eine Hopf-Algebra?	8
3.3	Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	9
3.3.1	Das Produkt	11
3.3.2	Das Koprodukt	11
3.3.3	Die Koeins	12
3.3.4	Die Koinverse: Antipode	13
3.3.5	Der Hochschild 1-Kozykel	14
4	Renormierung: Motivation	17
4.1	Feynman-Regeln der QED	17
4.2	Selbstenergie	19
4.3	Divergente Integrale	22
4.3.1	Logarithmische Divergenz	22
4.3.2	Lineare Divergenz	23
5	Dyson-Schwinger Gleichungen	24
5.1	Kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen	24
5.2	Lineare Dyson-Schwinger-Gleichungen	24
5.3	Das Shuffle-Produkt	26
5.4	Lösung in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen	26
6	Wurzelbäume und Feynmangraphen	28
6.1	Renormierung mit Wurzelbäumen	29
6.2	Ausblick: Nichtstörungstheoretischer Ansatz	31
7	Zusammenfassung	35

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, grundlegende Zusammenhänge zwischen physikalischen Vorgängen und mathematischen Formulierungen zu erkennen, zu verwenden und verständlich zu machen. Es soll eine Brücke zwischen Mathematik und theoretischer Physik geschlagen werden, indem zunächst ein Einblick in Quantenfeldtheorie gegeben wird, anschließend wenige fundamentale Begriffe der Mathematik, wie der des Körpers und der Gruppe, erläutert werden und deren Bedeutung analysiert wird. Der Fokus liegt dabei nicht auf Präzision und Knappheit, sondern auf Verständlichkeit und Anwendungsbezug.

Nachdem sowohl physikalisch als auch mathematisch der Grundstein zur Diskussion gelegt ist, werden weiterführend Hopf-Algebren definiert und deren Eigenschaften explizit an der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen aufgezeigt. Hier werden Beispiele vorgerechnet und verschiedene Operationen durchgeführt, um Anwendung nachzuvollziehen.

Anschließend wende ich mich wieder der Physik zu, es erfolgt ein Einstieg in die Renormierung, es wird erklärt, was Renormierung ist und wieso sie vorgenommen werden muss. Dazu werden einfache Beispiele gezeigt und dies auf schwierigere Probleme übertragen. Das Renormierungsschema der minimalen Subtraktion wird kurz erläutert.

Als nächstes erkläre ich den Begriff der Dyson-Schwinger-Gleichungen. Auf eine Erläuterung folgt deren Lösung in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen und zuletzt wird ein Zusammenhang zwischen Wurzelbäumen und Feynman-Graphen hergestellt.

Hauptaugenmerk ist hierbei die Verständlichkeit und Anwendbarkeit der erläuterten Techniken auf Quantenfeldtheorien wie die Quantenelektrodynamik.

2 Feldtheorie

Schon immer wurde die Physik dazu genutzt, Effekte und Phänomene beschreiben, vorhersagen und verstehen zu lernen. Man entdeckte, dass in bestimmten Situationen wie der Bewegung auf einer Kreisbahn oder bei stromdurchflossenen Leitern in Magnetfeldern Kräfte herrschen, die die Körper scheinbar ohne direkten Kontakt zu bewegen versuchen. Dies wurde in Form von Feldern interpretiert, wobei lange Zeit der Begriff der Fernwirkung im Vordergrund stand. Diese besagt, dass Kräfte auf Körper in großer Distanz instantan und direkt aufeinander wirken. Nach dem Relativitätsprinzip können sich Informationen allerdings maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, sodass von der Fernwirkung zur Nahwirkung übergegangen werden muss. Eine Wirkung wird also von einem Ort auf den nächsten benachbarte Ort übertragen, dieser reicht wiederum das Signal weiter auf seinen Nachbarn und so weiter, sodass die Information im Raum fortgetragen wird und nicht von einem Körper direkt auf den anderen gelangt. Der Raum zwischen den Körpern ist von dem jeweiligen Feld ausgefüllt.

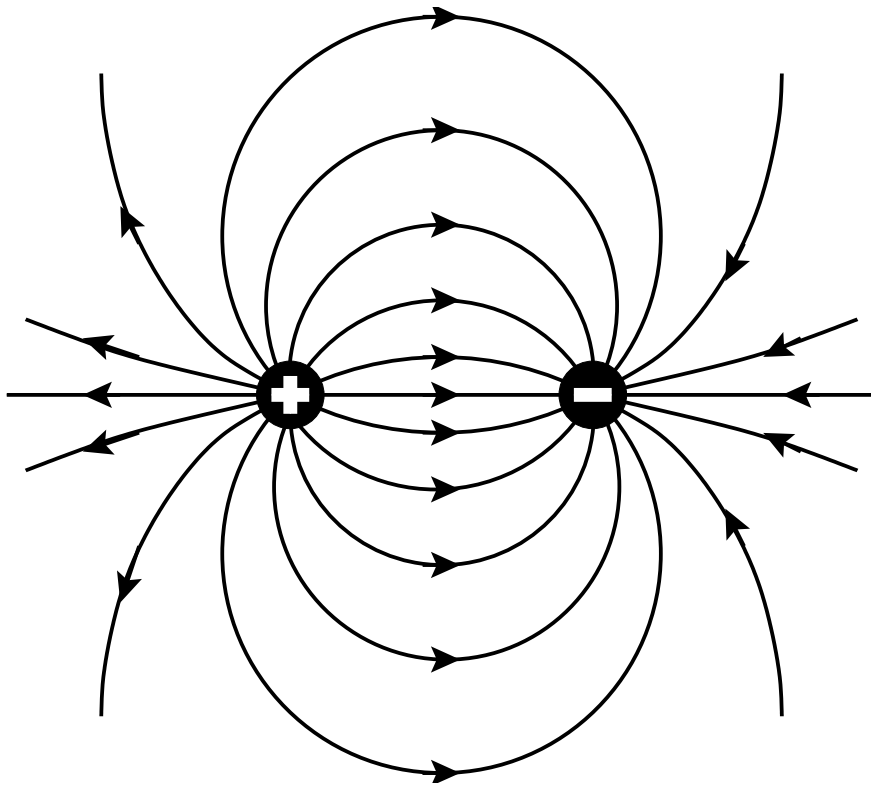


Abbildung 1: Darstellung der Feldlinien des elektrischen Feldes zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln. Die Feldlinien sind in die Richtung orientiert, in die die Kraft auf ein positiv geladenes Teilchen wirken würde, wenn man ein solches in das Feld brächte. Die Pfeilrichtung erfolgt also von der positiv zur negativ geladenen Kugel. Mit den Feldlinien füllt das elektrische Feld den gesamten Raum zwischen den Kugeln und um sie herum aus.

In den klassischen Theorien werden die entsprechenden Kräfte als kontinuierlich angenommen. Es handelt sich dabei um eine Feldtheorie, wenn die beteiligten Kräfte als Felder $\phi_i(x)$ dargestellt werden können. So gibt es beispielsweise in der Mechanik das Gravitationsfeld, im Elektromagnetismus die elektrischen und magnetischen Felder, die im statischen Fall entkoppelt sind, im allgemeinen Fall jedoch gemeinsam als elektromagnetische Felder auftreten. Man beschreibt die Physik mithilfe der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi_i(x), \phi_i'(x))$, die Informationen über die Felder und deren Ableitungen enthält. Hieraus lassen sich die Lagrange-Funktion \mathcal{L} sowie die

Wirkung \mathcal{S} bestimmen, mithilfe derer sich Bewegungsgleichungen formulieren lassen, welche die Dynamik des Systems beschreiben.[QUA08]

2.1 Quantenfeldtheorie

Nimmt man nun an, dass die Energien nicht kontinuierlich sind, sondern quantisiert, dass es also "kleinste Pakete" gibt, die sich nicht weiter aufteilen lassen, so gelangt man von der klassischen Feldtheorie zur Quantenfeldtheorie. Die Lagrange-Dichte lässt sich quantisieren und ebenso die Felder. Die Quanten der Felder haben Teilcheneigenschaften und werden Austauschteilchen genannt. Sie übertragen die Kräfte und ermöglichen die Wechselwirkungen. In der Elektrodynamik handelt es sich hierbei um das Photon. Es hat keine Ruhemasse, wohl aber einen messbaren Impuls und eine seiner Frequenz zugeordnete Energie.[QUA08]

Quantenfeldtheorien stellen eine Erweiterung von klassischen Theorien auf die Quantenmechanik dar. Je nachdem, welcher Zusammenhang oder welches Phänomen beschrieben werden soll, gibt es verschiedene Theorien. Die Quantenelektrodynamik beispielsweise beschreibt die elektrodynamischen Effekte und bezieht dabei alle Teilchen mit ein, die selbst eine elektrische Ladung tragen und somit an das Austauschboson, das Photon, koppeln. Die schwache Kernkraft kann mit der elektrischen Wechselwirkung zur elektroschwachen Wechselwirkung vereinheitlicht werden. Hier werden neben den Teilchen, die ans Photon koppeln, auch solche berücksichtigt, die ein Hyperladung, die mit dem Isospin zusammenhängt, tragen und an die Austauschbosonen W^\pm bzw. Z^0 koppeln. Mithilfe der elektroschwachen Wechselwirkung kann unter anderem der β -Zerfall erklärt werden.[KER84]

Um die starke Kernkraft zu beschreiben, geht man über zur Quantenchromodynamik. Hier geht es um Teilchen, die eine Farbladung tragen, also koppeln sie an Gluonen.

Es gibt aber neben diesen Theorien noch etliche weitere Quantenfeldtheorien, welche Teilgebiete der Physik beschreiben, wie zum Beispiel die Yukawa-Theorie, deren Potential als Spezialfall das Coulomb-Potential hervorbringt.[KER84]

Quantenfeldtheorien machen sich einen wichtigen Effekt zunutze: Der Austausch von Informationen wie z.B. ein Impulsübertrag in Paketen fester Größe kann als Austausch eines Teilchens mit genau diesem Impuls aufgefasst werden. Wenn zwei Elektronen streuen, tauschen sie also ein Photon aus. Innerhalb eines Atomkerns können die Nukleonen Pionen austauschen, was möglich ist, wenn die Energie-Zeit-Unschärfe berücksichtigt wird. Für eine sehr kurze Zeit wird ein Pion erzeugt, übertragen und daraufhin wieder vernichtet.[KER84]

Um eine mathematische Beschreibung zu erhalten, führt man zunächst den Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ ein. Hiermit lässt sich eine Wellenfunktion $\Psi(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t beschreiben, wenn sie zu einem früheren Zeitpunkt t_0 bekannt war.[REN93]

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$$

Der Zeitentwicklungsoperator bringt den Zustand sozusagen in der Zeit voran. In diesem Operator sind alle Informationen über die zeitliche Entwicklung des Systems enthalten. Man kann nun die Heisenberg-Matrix (S -Matrix) aufstellen, in der alle möglichen physikalischen Prozesse und Wechselwirkungen enthalten sind.[REN93] Die S -Matrix lässt sich darstellen mithilfe der Matrixelemente $S_{fi} = \langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle$, dies sind Übergangsamplituden zwischen dem Anfangszustand $|i\rangle$ und dem Endzustand $|f\rangle$, wobei eine unendliche Zeit für die Wechselwirkung vorausgesetzt wird. Dies lässt sich physikalisch so verstehen, dass die Anfangs- und Endzustände von der Wechselwirkung nichts merken, da sie aus dem wechselwirkungsfreien System kommen, welches eine unendliche Zeit zurück liegt. Eine "unendliche" Zeit kann in der Teilchenphysik schon im Bereich von Sekunden liegen, da die Wechselwirkungen auf einer um viele Größenordnungen kleineren Skala ablaufen und jede Zeit, die um viele Dimensionen größer ist,

als unendlich aufgefasst werden kann. Bei der Heisenbergschen S -Matrix, die die Übergangsamplituden zwischen Anfangs- und Endzuständen $|i\rangle$ und $|f\rangle$ enthält, sind immer die gleichen Zustände gemeint, d.h. die Matrix enthält keinerlei Informationen darüber, welche Zerfallsprodukte bei einer Kollision möglich sind. Sie beschreibt stattdessen, welche Interaktionen möglich sind, die von einem festen Anfangs- zu einem festen Endzustand führen.[REN93]

In einigen Fällen mag es sinnvoll sein, die Wechselwirkungen im Zeitentwicklungsoperator als eine Störung des wechselwirkungsfreien Systems zu betrachten und die Heisenbergsche S -Matrix in eine Störungsreihe des ungestörten Systems zu entwickeln. Unter Vernachlässigung von konstanten Vorfaktoren entwickelt sich die Matrix folgendermaßen:[REN93]

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \delta(E_f - E_i) \left\{ V_{fi} + \sum_{\alpha} V_{f\alpha} (E_i - E_{\alpha})^{-1} V_{\alpha i} + \sum_{\alpha, \beta} V_{f\beta} (E_{\alpha} - E_{\beta})^{-1} V_{\beta\alpha} (E_i - E_{\alpha})^{-1} V_{\alpha i} + \dots \right\}$$

Die Reihe ist so zu verstehen, dass die S -Matrix in Abwesenheit eines Wechselwirkungspotentials die Form einer Einheitsmatrix, δ_{fi} , annimmt, da hier Anfangs- und Endzustand gleich sein müssen. Ist allerdings ein Potential vorhanden, so ist trotzdem Energieerhaltung gegeben, welche der Term $\delta(E_f - E_i)$ beschreibt. Anschließend kommt es zu unzähligen Formen der Wechselwirkung. V_{fi} beschreibt einen direkten Übergang von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$. $\sum_{\alpha} V_{f\alpha} (E_i - E_{\alpha})^{-1} V_{\alpha i}$ bezieht alle die Fälle mit ein, in denen $|i\rangle$ zunächst in den virtuellen Zwischenzustand $|\alpha\rangle$ übergeht und $|\alpha\rangle$ daraufhin in $|f\rangle$, wobei immer die jeweiligen Wechselwirkungen $V_{\alpha i}$ etc. dafür verantwortlich sind. Der nächste Term beschreibt den Übergang von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ mit zwei virtuellen Zwischenzuständen und so weiter. Es sind beliebig viele virtuelle Zustände denkbar. [REN93] Da es sich bei den Zuständen $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ etc. um Eigenzustände des ungestörten Hamiltonoperators handelt und nicht um Eigenzustände des tatsächlichen, die Wechselwirkung beschreibenden, gibt es keine explizite Energieerhaltung in diesen virtuellen Übergängen. Darüber hinaus können die virtuellen Zustände genau wie der Anfangs- und Endzustand mit freien Teilchen assoziiert werden, wobei sich deren Massen von denen reeller Teilchen unterscheiden können, da virtuelle Teilchen nicht unbedingt auf der Massenschale liegen müssen, wo $E_f = \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$ (Fermionen) bzw. $E = \hbar|\vec{k}|$ (Photonen) gilt. [REN93]

Dieser Vorgang kann graphisch im Form von Feynman-Diagrammen dargestellt werden. Hier werden die verschiedenen Teilchen durch verschiedene Linien gekennzeichnet. Besitzt ein Teilchen eine gerichtete Eigenschaft, wie z.B. elektrische Ladung, wird die Linie zusätzlich mit einem Pfeil belegt, um zu kennzeichnen, in welche Richtung sich die Ladung fortbewegt. Diese Richtung muss nicht mit der Richtung der fortlaufenden Zeit übereinstimmen! Ein sich in der Zeit vorwärts bewegendes negativ geladenes Teilchen sieht in einem Feynman-Diagramm genauso aus wie ein sich in der Zeit rückwärts bewegendes positiv geladenes Teilchen der gleichen Art.

2.2 Feynman-Graphen

Ein Feynman-Graph ist die visuelle Darstellung eines quantenmechanischen Streuprozesses. Es gibt einfallende und auslaufende Teilchen und Prozesse, die während der Streuung ablaufen. Hierbei gibt es immer eine vorgeschriebene Zeitrichtung, sodass Feynman-Diagramme, die aus verschiedenen Richtungen betrachtet werden, unterschiedliche Streuprozesse beschreiben.

Betrachtet man ein Feynman-Diagramm, so kann und sollte man es als Übergang von einem Zustand zu einem anderen auffassen. Es lässt sich jeweils eine Übergangsamplitude ausrechnen, deren Betragsquadrat die Übergangswahrscheinlichkeit für die jeweilige Reaktion darstellt. Im tatsächlichen Experiment sind nur die Anfangs- und Endzustände bekannt: Welche Teilchen zu

welcher Zeit mit welchem Impuls an welchem Ort emittiert und detektiert wurden. Was in der Zwischenzeit passiert, ist völlig unbekannt.

Stellt man sich nun beispielsweise die Streuung zweier Elektronen vor, so kann dies wie oben bereits erläutert durch den Austausch eines Photons geschehen. Es wäre allerdings ebenso denkbar, dass die Elektronen gleich zwei Photonen austauschen. Zusätzlich könnte das Photon für sehr kurze Zeit in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen und gleich wieder rekombinieren, bevor es wieder als Photon von einem der beiden Elektronen absorbiert wird. Natürlich könnte auch ein zweites Photon ausgetauscht werden und ebenso zerfallen und rekombinieren, und so weiter. Die Zahl der denkbaren Feynman-Graphen ist unendlich, und sie alle tragen zur Elektron-Elektron-Streuung bei, jeder mit seiner eigenen Amplitude, sodass sich die tatsächliche Reaktion als eine Überlagerung aller möglichen Zustände präsentieren wird.[REN93]

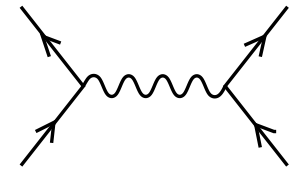


Abbildung 2: Feynman-Diagramm der Fermion-Fermion-Streuung in niedrigster Ordnung

Wichtig hierbei ist, dass der Prozess selbst nicht beobachtbar ist! Der Experimentator kennt nur die Randbedingungen: Mit welchen Impulsen die Elektronen als welchen Orten gestartet sind (im Rahmen der Heisenbergschen Unschärfe) und an welchen späteren Orten zwei Elektronen mit entsprechenden Impulsen detektiert wurden. Was dazwischen passierte, ist virtuell, d.h. es kann nicht beobachtet werden. Jegliche Prozesse überlagern sich, wobei jeder Vertex im Feynman-Diagramm mit der Kopplungskonstante g gewichtet ist, die ein Maß für die Stärke der jeweiligen Kraft darstellt. Berechnet man die Übergangsamplitude, so wird für jeden Vertex die Kopplungskonstante g aufmultipliziert. Ein Graph mit vier Vertizes wird also eine Übergangsamplitude aufweisen, die proportional zu g^4 ist. In der Quantenelektrodynamik und in der schwachen Wechselwirkungen sind diese Kopplungskonstanten sehr klein, sodass Feynman-Graphen mit mehr Vertizes (Feynman-Graphen höherer Ordnung) sehr unwahrscheinlich werden. Nur in der Quantenchromodynamik, die die starke Kernkraft beschreibt, wird bei niedrigen Energien die Kopplung sehr groß, mitunter kommt sie in den Bereich von 1, sodass hier Graphen höherer Ordnung eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen.[VOR11][REN93][QUA08]

Wir wollen uns hier auf die Quantenelektrodynamik beschränken, sodass wir annehmen können, dass die Kopplungskonstante sehr viel kleiner als eins ist. Es liegt also Nahe, die Übergangsamplitude als eine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten g , bzw. deren Quadrat, der Feinstrukturkonstanten α , aufzuschreiben. Die einzelnen Terme dieser Störungsentwicklung sind genau die Feynman-Graphen mit der jeweiligen Anzahl Vertizes.[VOR11]

Um mithilfe dieser bildhaften Vorstellungen beliebige Graphen ausrechnen zu können (damit ist immer gemeint: die dazugehörige Übergangsamplitude ausrechnen), müssen wir die Struktur von Graphen etwas näher verstehen. Wir betrachten hierzu die relativ einfache Struktur von Wurzelbäumen.

3 Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

3.1 Grundbegriffe

Um Wurzelbäume und ihre algebraische Struktur zu verstehen, werden zunächst einige Grundbegriffe wiederholt: Der Körper, die Gruppe und der Vektorraum.

Als **Gruppe** bezeichnet man eine Menge G , wenn auf dieser eine zweistellige Verknüpfung $*$: $G \times G \rightarrow G$ existiert, also dass zwei Elemente der Gruppe verknüpft werden können und das Ergebnis wieder in der Gruppe ist. Die Gruppe ist also abgeschlossen unter der Verknüpfung. Man schreibt: $(a, b) \mapsto a * b$. [TUS08]

Es müssen einige Eigenschaften erfüllt sein: Es muss Assoziativität gelten, d.h. die Reihenfolge, in der bei mehr als zwei Elementen die Verknüpfung ausgeführt wird, ist egal, sofern die Reihenfolge der Elemente selbst beibehalten wird. Zusätzlich existiere in der Gruppe ein neutrales Element, sodass die Verknüpfung eines jeden Gruppenelements mit dem neutralen Element wieder genau dieses Element ergebe. Zuletzt muss außerdem zu jedem Gruppenelement ein inverses Element existieren, sodass die Verknüpfung von Element und dazu inversem Element das neutrale Element ergibt. Es kann zudem sein, dass die Reihenfolge, in der Elemente verknüpft werden, keine Rolle spielt, dass die Verknüpfung also symmetrisch ist. Dies ist keine notwendige Gruppeneigenschaft, tritt aber manchmal auf. Eine Gruppe mit Kommutativität der Verknüpfung nennt man eine abelsche Gruppe. [TUS08]

Definition 1 (Gruppe)

Eine Menge G heißt Gruppe, wenn eine zweistellige Verknüpfung $*$: $G \times G \rightarrow G$ existiert, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G$ gilt $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- neutrales Element: $\exists e \in G$, sodass $\forall a \in G$ gilt $a * e = e * a = a$.
- inverses Element: zu jedem $a \in G \exists a^{-1} \in G$, sodass $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Gilt außerdem Kommutativität, $a * b = b * a$, heißt die Gruppe abelsch.

Beispiel 1 (Gruppe)

1. Rationale Zahlen: Die Verknüpfung ist die Multiplikation, das neutrale Element ist die 1, das inverse Element ist der Kehrwert. Die Gruppe ist abelsch.
2. Menge aller dreikomponentigen reellwertigen Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$: Die Verknüpfung ist die Addition, das neutrale Element ist der Nullvektor, das inverse Element ist der Vektor, in dem alle Einträge mit (-1) multipliziert wurden. Die Gruppe ist abelsch.

Als **Körper** bezeichnet man eine Menge K , sofern Verknüpfungen „+“ und „·“ zwischen Gruppenelementen existieren, die einige Bedingungen erfüllen müssen. Zum Einen muss K mit der Verknüpfung „+“ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 sein, d.h. die Verknüpfung „+“ auf K erfüllt die Gruppeneigenschaften und Kommutativität. Zum Anderen muss $K \setminus \{0\}$ mit der anderen Verknüpfung, „·“, eine abelsche Gruppe bilden, d.h. für alle Elemente von K , mit Ausnahme der 0, gelten die Gruppeneigenschaften einer abelschen Gruppe mit der Verknüpfung „·“. Zuletzt gelte das Distributivgesetz, d.h. die Multiplikation mit einer Summe ist gleich der Summe der Multiplikation mit jedem einzelnen Summanden. [TUS08]

Definition 2 (Körper)

Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot . Dann ist K ein Körper, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0 .
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1 .
- Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in K$ gelte $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Beispiel 2 (Körper)

Reelle Zahlen mit der gewohnten Addition und Multiplikation als $+$ und \cdot .

Man bezeichnet eine Menge V als einen **Vektorraum** V über einem Körper $(K, +, \cdot)$, kurz K -Vektorraum genannt, wenn es sich hierbei um eine additive abelsche Gruppe $(V, +)$ handelt, wobei eine Multiplikation mit einem Skalar aus K definiert sein muss. Es gelten also alle oben genannten Eigenschaften einer Gruppe, außerdem für die Elemente des zugrunde liegenden Körpers natürlich deren Addition und Multiplikation. Es wird nun eine weitere Multiplikation eingeführt, und zwar zwischen den Elementen des Körpers und denen der Gruppe. Wir bezeichnen diese Verknüpfung mit $*$, $*$: $K \times V \rightarrow V$. [TUS08] Hierbei kann die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor, der bereits mit einem anderen Skalar multipliziert wurde, auch als die Körper-Multiplikation beider Zahlen und anschließende Verknüpfung mit dem Vektor geschrieben werden. Die Reihenfolge, in der die Verknüpfungen ausgeführt werden (ob zuerst auf dem Körper und dann in der Gruppe oder anders herum) ist also egal. Außerdem gilt auch für diese Verknüpfung das Distributivgesetz, d.h. wenn eine Summe von Skalaren mit einem Vektor multipliziert wird, ist dies gleich der Summe jedes einzelnen Skalaren, jeweils multipliziert mit dem Vektor. Das gleiche gilt für die Multiplikation eines Skalars mit einer Summe von Vektoren. Zudem soll das neutrale Element des Körpers auch für diese Verknüpfung neutrales Element sein. Damit bettet das neutrale Element bezüglich des Vektorraums den Grundkörper in den Vektorraum ein.

Definition 3 (Vektorraum)

Die additive abelsche Gruppe $(V, +)$ wird Vektorraum V über einem Körper $(K, +, \cdot)$ genannt, wenn eine Multiplikation mit einem Skalar $\in K$, $*$: $K \times V \rightarrow V$, definiert ist, wobei gelte:

- $a * (b * v) = (a \cdot b) * v \quad \forall a, b \in K; v \in V$
- Distributivgesetz: $a * (u + v) = a * u + a * v \quad \forall a \in K; u, v \in V$
sowie $(a + b) * v = a * v + b * v \quad \forall a, b \in K; v \in V$.
- neutrales Element: $1 * v = v$ mit 1 als neutralem Element von (K, \cdot) .

Beispiel 3 (Vektorraum)

1. Menge der zweikomponentigen reellwertigen Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$
2. Menge der Polynome in der Variablen t bis zum Grad n

3.2 Was ist eine Hopf-Algebra?

Eine **Algebra** ist ein mathematisches Konstrukt, welches es mir erlaubt, in einem Vektorraum auf einem Zahlenkörper weitere Rechenoperationen auszuführen. Ein Vektorraum ist zunächst eine additive Gruppe, d.h. es können Vektoren addiert werden, mit einer Multiplikation mit einem Skalar aus dem zugrunde liegenden Körper. Nun wird das Produkt von zwei Vektoren eingeführt, die Verknüpfung von zwei Elementen des Vektorraums, sodass die Verknüpfung wieder Element des Vektorraums ist. Die Verknüpfung nennen wir das "Produkt" m , unabhängig davon, ob es sich dabei um die Multiplikation handelt, die wir intuitiv von den reellen Zahlen kennen. Da eine Algebra die Eigenschaften eines Vektorraums trägt, verfügt sie natürlich weiterhin über ein neutrales Element ("Eins"), welches bei Verknüpfung jeden Vektor auf sich selbst abbildet. [VOR11]

Definition 4 (Algebra)

Gegeben sei ein Vektorraum A auf einem Körper K . Dann ist A Algebra über K , wenn eine K -bilineare Verknüpfung $m : A \otimes A \rightarrow A$ ("Produkt") existiert.

Bilinearität bedeutet:

- $m((x + y), z) = m(x, z) + m(y, z) \quad \forall x, y, z \in A$
- $m(x, (y + z)) = m(x, y) + m(x, z) \quad \forall x, y, z \in A$
- $\lambda \cdot m(x, y) = m((\lambda \cdot x), y) = m(x, (\lambda \cdot y)) \quad \forall x, y \in A; \lambda \in K$

Im Gegensatz zu den bisherigen Verknüpfungen verfügt das Produkt über die Fähigkeit, zwei Vektoren zu multiplizieren. Im Vektorraum konnten bisher nur Skalare mit Vektoren multipliziert oder Vektoren miteinander addiert werden. Jetzt ist auch eine Multiplikation unter Vektoren möglich. Auch hier gebe es ein neutrales Element, d.h.: Es existiere ein $e \in A$ mit $m(e, a) = m(a, e) = a \quad \forall a \in A$.

Kann also eine Menge als Algebra identifiziert werden, so stehen automatisch alle oben genannten Rechenoperationen zur Verfügung, um Elemente der Algebra miteinander zu verknüpfen, also Summe, Produkte etc. zu bilden.

Befindet man sich allerdings in der schwierigen Situation, ein äußerst kompliziertes Problem lösen zu wollen, wie beispielsweise die Berechnung eines Feynman-Graphen von beliebig hoher Ordnung, so hilft einem die Algebra allein nicht mehr weiter. Man braucht etwas, das es einem erlaubt, etwas großes kompliziertes in viele kleine, weniger komplizierte Teile zu zerlegen, etwa wie die Primfaktorisation von natürlichen Zahlen. Man benötigt die dualen Rechenoperationen zu denen in der Algebra: Anstatt aus zwei Elementen eins zu machen, möchten wir gern zu einem Element jede mögliche Kombination von zwei Elementen aus dem gleichen Raum wissen, deren Verknüpfung das ursprüngliche Element ergibt. Diese duale Algebra nennen wir eine **Koalgebra**. Anstelle von Produkt, Eins und Inversem gibt es in der Koalgebra Koprodukt, Koeins und Koinverse. [QGR95]

Die Funktionsweise des Koprodukts haben wir bereits qualitativ eingeführt, es ist die Aufspaltung eines Elements in mehrere. Die Koeins bildet jedes Element des Vektorraums, das nicht die Eins oder ein Vielfaches der Eins ist, auf die Null im Zahlenkörper ab. Die Eins bezüglich des Vektorraums wird auf die Eins bezüglich des Zahlenkörpers abgebildet, ebenso Vielfache der Eins. Mit der Koeins kann man sozusagen Bialgebraelemente, die nicht trivial sind, herausfiltern, und nur das einfachste Element behalten.

Definition 5 (Koalgebra)

Gegeben sei ein Vektorraum C auf einem Körper K . Dann ist C Koalgebra über K , wenn die Vektorraumhomomorphismen $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, und Koeins, $\epsilon : C \rightarrow K$, existieren, sodass

1. $(id. \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id.) \circ \Delta$ (Koassoziativität)
2. $(id. \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes id.) \circ \Delta = id.$ (Koeins)

Sobald ein Vektorraum sowohl Algebra als auch Koalgebra ist, nennt man ihn **Bialgebra** und kann die Antipode definieren, um eine **Hopf-Algebra** zu erhalten.[QGR95]

In einer Hopf-Algebra \mathcal{H} gibt es das Produkt und Koproduct, die Eins und Koeins, sowie die Antipode, eine Abbildung von der Bialgebra in die Bialgebra, welche in den hier behandelten Hopf-Algebren die Eigenschaften hat, dass die zweimalige Anwendung der identischen Abbildung entspricht, und dass die Antipode von Produkten von Hopfalgebraelementen gleich dem Produkt der Antipoden ist. Weiterhin ist die Antipode linear.[VOR11]

Eine Bialgebra wird Hopf-Algebra genannt, wenn verschiedene Diagramme kommutieren, d.h. wenn die Wahl des Weges, der von einem zu einem anderen Punkt führt, egal ist. Beispielsweise kommutiert das folgende Diagramm:[VOR11]

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m \otimes id.} \\ \xleftarrow{\Delta \otimes id.} \end{array} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\
 \begin{array}{c} \uparrow id. \otimes \Delta \\ \downarrow id. \otimes m \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \Delta \\ \downarrow m \end{array} \\
 \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ \xleftarrow{\Delta} \end{array} & \mathcal{H}
 \end{array}$$

Das Diagramm beschreibt die Koassoziativität und liest sich folgendermaßen: Beginnend in der linken oberen Ecke bei drei Elementen der Hopf-Algebra kann ich nach rechts gehen und die ersten beiden multiplizieren, während ich das dritte zunächst belasse. Das Produkt ist Element der Hopf-Algebra. Anschließend multipliziere ich die beiden verbleibenden Elemente (Produkt und drittes) und erhalte ein einziges. Ich kann auch, von der linken oberen Ecke beginnend, nach unten gehen und das erste Element unangerührt lassen, wobei ich das zweite mit dem dritten multipliziere. Anschließend multipliziere ich das erste Element mit dem Ergebnis der Multiplikation und erhalte ebenso ein Element. Dies sind die Rechenoperationen der Algebra. Beginne ich in der rechten unteren Ecke, so kann ich von dem einen Hopf-Algebra-Element das Koproduct bilden und erhalte zwei Elemente. Hierbei kann ich entweder vom ersten das Koproduct bilden und das zweite belassen, oder anders herum. So oder so gelange ich unter Benutzung der Rechenoperationen der Koalgebra zu drei Hopf-Algebra-Elementen.

3.3 Die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

Wir wollen uns nun mit einer bestimmten Hopf-Algebra befassen, nämlich der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen, da diese später dabei helfen wird, Graphen allgemein und Feynman-Diagramme im Speziellen besser zu verstehen. Zuerst müssen einige wichtige Begriffe eingeführt werden. Ein **Vertex** ist ein Punkt oder Knoten, der zu einem Graphen gehört. Eine **Kante** oder **Linie** ist an ihrem Ende mit einem Vertex verbunden. Innere Kanten eines Graphen verbinden zwei Vertices miteinander, äußere Kanten sind an einem Ende in einem Vertex fest, mit dem anderen

Ende ragen sie aus dem Graphen heraus.[VOR11] Beispielsweise stellt das Streckennetz der U-Bahn einen Graphen dar, wobei die Gleise die Kanten, die Bahnhöfe die Vertizes ausmachen. Wir betrachten nun eine sehr einfache Form von Graphen: Bäume. Sie sind zusammenhängend und es gibt keine geschlossenen Linien, das heißt, dass kein Weg wieder zur Ausgangsposition zurückführt, genauso wie bei keinem biologischen Baum die Zweige wieder in den Stamm hineinwachsen. Es gibt weiterhin nur innere Kanten und demnach bei n Vertizes genau $n - 1$ Kanten. Mit anderen Worten hat jede Kante an jedem Ende genau einen Vertex.

Gibt es dazu noch einen ausgezeichneten Vertex, den wir als Wurzel bezeichnen wollen, und sind alle Kanten von der Wurzel weg gerichtet (oder alle zu ihr hin, dies betrachten wir im folgenden jedoch nicht), so nennen wir den Baum einen **Wurzelbaum**. Als Beispiel dient hier die Stammbaumtafel einer Familie. Konventionell wird die Wurzel immer nach oben gezeichnet, sodass alle anderen Kanten nach unten gerichtet sind.[VOR11]

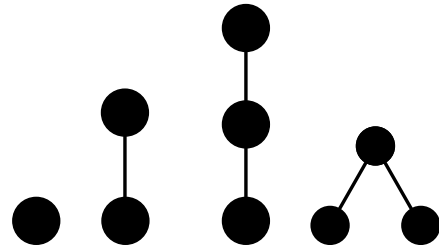


Abbildung 3: Wurzelbäume mit einem, zwei und drei Vertizes

Allgemein bezeichnen wir Bäume mit T (**tree**), Vertizes mit $T^{[0]}$ und Kanten mit $T^{[1]}$.

Wurzelbäume können über die Anzahl ihrer Vertizes klassifiziert werden. Es gibt nur einen Wurzelbaum mit einem Vertex, nämlich gerade den Baum, der nur aus der Wurzel besteht und keine weiteren Kanten oder Vertizes besitzt. Ebenso gibt es nur einen Wurzelbaum mit zwei Vertizes. Es gibt bereits zwei Wurzelbäume mit drei Vertizes und vier Wurzelbäume mit vier Vertizes. Die disjunkte Vereinigung von Bäumen nennen wir einen Wald. Es gibt also zwei Wälder mit zwei Vertizes: Der Baum mit zwei Vertizes sowie zwei Bäume mit einem Vertex. Auf Wäldern existiert demzufolge eine Graduierung, nämlich die Anzahl Vertizes im Wald. Der Baum ohne Vertex, also mit Graduierung Null, sei mit \mathbb{I} bezeichnet.[VOR11]

Mithilfe dieser Graduierung kann die Hopf-Algebra von Wurzelbäumen formal eingeführt werden als direkte Summe der Vektorräume mit fester Vertexzahl. Es ist demnach

Definition 6 (Hopf-Algebra von Wurzelbäumen)

$$\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}^{(i)}$$

mit

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{I}$$

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathbb{Q} \cdot \bullet$$

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathbb{Q} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \oplus \mathbb{Q} \cdot \bullet \bullet$$

$$\vdots$$

Produkt: $m : \mathcal{H}^{(i)} \cdot \mathcal{H}^{(j)} \subset \mathcal{H}^{(i+j)}$
 Koproduct: $\Delta : \mathcal{H}^{(k)} \rightarrow \bigoplus_{j=0}^k \mathcal{H}^{(j)} \otimes \mathcal{H}^{(k-j)}$

3.3.1 Das Produkt

Um das Produkt von zwei Wurzelbäumen zu bilden, so schreibt man sie einfach nebeneinander. Die Multiplikation besteht also darin, aus Wurzelbäumen einen Wald zu machen. Analog können natürlich auch Wälder multipliziert werden. Dazu schreibt man eben die Wälder nebeneinander und erhält einen größeren Wald. Das Produkt der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen ist also durch direktes Hinschauen und Aufschreiben auszuführen.

3.3.2 Das Koproduct

Um das **Koproduct** für Wurzelbäume explizit auszurechnen, überlegt man sich, was das Koproduct eigentlich genau tun soll. Oben wurde ganz allgemein formuliert, man wolle "etwas großes, kompliziertes, in viele kleine, einfache Dinge zerlegen". Dies lässt sich bildhaft umsetzen, indem man einen Wurzelbaum natürlich durch Entfernen mindestens einer Kante in zwei oder mehr Bäume zerschneidet. Hierbei wird immer genau ein Teil übrig bleiben, in dem die ursprüngliche Wurzel enthalten ist, und mindestens ein Teil ohne Wurzel.[VOR11]

Allerdings gibt es Regeln bei der Bildung des Koproducts. Nicht jeder Schnitt darf auch durchgeführt werden. Als **zulässige Schnitte** wollen wir genau die Schnitte C bezeichnen, bei denen jeder Pfad von einem Vertex zur Wurzel maximal eine zu zerschneidende Kante durchläuft.[VOR11]

Es kann also bei einem Baum zu mehreren Möglichkeiten führen, wie er zerschnitten werden kann. Die verschiedenen Kombinationen werden dann einfach aufaddiert. Den Teil des Baumes, der weiterhin an der Wurzel (**root**) hängt, wollen wir mit $R^C(T)$ nennen. Der abgeschnittene Teil ist allgemein nicht mehr zusammenhängend und wird daher als **Polynom** in Wurzelbäumen dargestellt. Wir nennen ihn $P^C(T)$. Außerdem beziehen wir noch den trivialen Fall mit ein, dass keine Kante abgetrennt wurde. Demnach berechnet man das Koproduct eines Wurzelbaums T wie folgt:[VOR11]

$$\Delta(T) := T \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T + \sum_{\substack{\text{alle zulässigen Schnitte } C \\ C \neq 0}} (P^C(T) \otimes R^C(T))$$

$$\Delta(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$$

Beispiel 4 (Zulässige Schnitte)

- Zulässige Schnitte von 

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\} \quad (1)$$

- Verbotene Schnitte von 

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\} \quad (2)$$

gekennzeichnet sind:

$$\begin{aligned}\epsilon : \mathcal{H} &\rightarrow K \\ \epsilon(\mathbb{I}_{\mathcal{H}}) &= 1_K \\ \epsilon(h) &= 0 \quad \forall h \in \mathcal{A}ug\end{aligned}$$

Die Koeins vernichtet jedes nichttriviale Element in der Hopf-Algebra.[VOR11]

Beispiel 7 (Koeins)



$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbb{I}) &= 1 \\ \epsilon\left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\right) &= 0\end{aligned}$$

3.3.4 Die Koinverse: Antipode

Ich fasse nochmal kurz zusammen, was in der obigen Definition der Koalgebra bereits über die Antipode \mathcal{S} geschrieben wurde. Sie bildet von der Hopf-Algebra in die Hopf-Algebra ab, sie ist linear, und ihre zweifache Anwendung führt auf die identische Abbildung.

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \mathcal{S}\left(\prod_i T_i\right) &= \prod_i \mathcal{S}(T_i) \\ \mathcal{S} \circ \mathcal{S} &= \text{id}.\end{aligned}$$

Die Antipode in der Hopf-Algebra der Wurzelbäume hat folgende Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(T) &:= -T - \sum_{C \text{ zul.}} \mathcal{S}(P^C(T))R^C(T) \\ \mathcal{S}(\mathbb{I}) &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

Die Zulässigkeit der Schnitte ist die selbe wie bei der Berechnung des Koprodukts.

Beispiel 8 (Antipode)

$$\begin{aligned}
 S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) &= -\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} - 2 \cdot \underbrace{S(\bullet)}_{=-\bullet} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - \underbrace{S(\bullet \bullet)}_{=S(\bullet)S(\bullet)} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\right) \bullet \\
 &= -\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - \bullet \bullet \bullet - \left(-\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} - 2 \cdot S(\bullet) \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - S(\bullet \bullet) \bullet\right) \bullet \\
 &= -\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \bullet \bullet \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \bullet + \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) &= -\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \underbrace{S(\bullet)}_{=-\bullet} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \underbrace{S(\bullet \bullet)}_{=+\bullet \bullet} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - \underbrace{S(\bullet \bullet \bullet)}_{=(S(\bullet))^3} \bullet \\
 &= -\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \cdot \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 S \circ S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) &= -S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) + 3 \cdot S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) - 3 \cdot S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) + S(\bullet \bullet \bullet \bullet) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \cdot \bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet \bullet \bullet\right) + 3 \cdot S(\bullet) S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) - \\
 &\quad - 3 \cdot S(\bullet) S(\bullet) S\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) + S(\bullet) S(\bullet) S(\bullet) S(\bullet) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \cdot \bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet \bullet \bullet\right) - 3 \cdot \bullet \left(-\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - \bullet \bullet \bullet\right) - \\
 &\quad - 3 \cdot \bullet \bullet \left(-\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \bullet\right) + \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 &= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \cdot \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \cdot \bullet \bullet \bullet - \bullet \bullet \bullet \bullet + 3 \cdot \bullet \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 6 \cdot \bullet \bullet \bullet + 3 \cdot \bullet \bullet \bullet \bullet + \\
 &\quad + 3 \cdot \bullet \bullet \bullet - 3 \cdot \bullet \bullet \bullet \bullet + \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 &= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}
 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die zweimalige Anwendung der Antipode der identischen Abbildung gleichkommt.

3.3.5 Der Hochschild 1-Kozykel

Es gibt eine weitere Möglichkeit, das Koproduct zu definieren. Hierzu wird zunächst der anschauliche Operator B_+ in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen definiert, den wir **Shift-Operator** nennen: B_+ ist genau die Operation, die alle Wurzeln von Bäumen in einem Wald zu einer einzigen, neuen Wurzel verbindet. Man kann also mithilfe von B_+ Bäume zusammenkleben. Definiert man weiterhin, dass B_+ auf \mathbb{I} angewandt einen Vertex ohne Kanten erzeugt, so wird klar, dass B_+ von der Hopf-Algebra ins Augmentation Ideal abbildet. Da B_+ jedes Mal einen Vertex hinzufügt, bildet es einen Baum oder Wald jedes Mal in die nächsthöher graduierte Sub-Hopf-

$$\begin{aligned}
 B_+ : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{A}ug \\
 T \in \mathcal{H}^{(k)} &\Rightarrow B_+(T) \in \mathcal{H}^{(k+1)} \\
 B_+\left(\prod_{i=1}^k T_i\right) &= \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{k-1} \quad T_k \end{array} \\
 B_+(\mathbb{I}) &= \bullet
 \end{aligned}$$

Nun kann eine weitere Definition des Koproduktes angegeben werden: Sei $T = B_+(t)$. Dann gilt:

$$\Delta(T) = B_+(t) \otimes \mathbb{I} + (\text{id.} \otimes B_+) \Delta(t)$$

Dass dieser Ausdruck dem obigen äquivalent ist, lässt sich für den Fall, dass t ein Baum ist und kein Wald, durch vollständige Induktion leicht zeigen:

1. Induktionsanfang: $\Delta(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$

$$\begin{aligned}
 \Delta(B_+(\mathbb{I})) &= \Delta(\bullet) \stackrel{\text{Def.1}}{=} \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet \\
 &\stackrel{\text{Def.2}}{=} B_+(\mathbb{I}) \otimes \mathbb{I} + (\text{id.} \otimes B_+) \Delta(\mathbb{I}) \\
 &= \bullet \otimes \mathbb{I} + (\text{id.} \otimes B_+)(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \\
 &= \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet
 \end{aligned}$$

2. Induktionsschritt: Sei $T = B_+(t)$.

$$\begin{aligned}
 \Delta(t) &= \mathbb{I} \otimes t + t \otimes \mathbb{I} = \sum_{\text{zul. C}} P^C(t) \otimes R^C(t) \\
 \Delta(B_+(t)) &= \Delta(T) \stackrel{\text{Def.1}}{=} \mathbb{I} \otimes T + T \otimes \mathbb{I} + \sum_{\text{zul. C}} P^C(T) \otimes R^C(T) \\
 &\stackrel{\text{Def.2}}{=} B_+(t) \otimes \mathbb{I} + (\text{id.} \otimes B_+) \Delta(t) \\
 &= T \otimes \mathbb{I} + (\text{id.} \otimes B_+) \left(\mathbb{I} \otimes t + t \otimes \mathbb{I} = \sum_{\text{zul. C}} P^C(t) \otimes R^C(t) \right) \\
 &= T \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T + t \otimes B_+(\mathbb{I}) + \sum_{\text{zul. C}} P^C(t) \otimes B_+(R^C(t))
 \end{aligned}$$

Allerdings ist $(t + \sum_{\text{zul. C}} P^C(t))$ genau $\sum_{\text{zul. C}} P^C(T)$, da in $P^C(t)$ alle Polynome in Wurzelbäumen enthalten sind, die von T durch zulässige Schnitte abgetrennt werden können, mit Ausnahme von t selbst. Weiterhin ist $B_+(R^C(t))$ genau $R^C(T) \setminus B_+(\mathbb{I})$, da B_+ an t eine neue Kante mit neuer Wurzel hinzufügt und in $B_+(R^C(t))$ somit alle Bäume, die nach dem zulässigen Schneiden noch an der Wurzel von T hängen, enthalten sind, mit Ausnahme von diesem einen Vertex $\bullet = B_+(\mathbb{I})$, welcher mitsamt durchzuschneidender Kante erst durch $T = B_+(t)$ hinzugefügt wird.

$$\Rightarrow \Delta(B_+(t)) = T \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T + \sum_{\text{zul. C}} P^C(T) \otimes R^C(T) \quad \square$$

Für den Beweis des allgemeineren Falls, dass t ein Wald ist, sei an geeignete Stelle verwiesen. B_+ ist nichttrivialer 1-Kozykel in der Hochschild-Kohomologie von H .

Beispiel 9 (Hochschild 1-Kozykel)

$$\begin{aligned}
 B_+(\bullet) &= \bullet \\
 B_+(\bullet\bullet) &= \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\
 B_+(\bullet\bullet\bullet) &= \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\
 B_+(\bullet\bullet\mathbb{I}) &= \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array}
 \end{aligned}$$

Beispiel 10 (Koprodukt (2))

$$\begin{aligned}
 \Delta(\bullet) &= \Delta(B_+(\mathbb{I})) = B_+(\mathbb{I}) \otimes \mathbb{I} + (id. \otimes B_+) \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \\
 &= B_+(\mathbb{I}) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes B_+(\mathbb{I}) \\
 &= \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) &= \Delta\left(B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right)\right) = B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + (id. \otimes B_+) \Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \\
 &= B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + (id. \otimes B_+)\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet \\
 &= B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes B_+(\mathbb{I}) + \left(\mathbb{I} \otimes B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right)\right) + (\bullet \otimes B_+(\bullet)) \\
 &= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) = \Delta\left(B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right)\right) = B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + (id. \otimes B_+) \Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right)$$

mit $\Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) = \Delta(\bullet) \Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right)$

$$= \left(\bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet\right) \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet$$

$$= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) = B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + (id. \otimes B_+)\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}\right) \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \otimes \bullet + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Der Vergleich mit Beispiel 6 bestätigt, dass es sich um das gleiche Koprodukt handelt.

4 Renormierung: Motivation

Machen wir nun einen kleinen Ausflug in die Quantenfeldtheorie. Die oben bereits erwähnten Feynman-Graphen stellen eine Veranschaulichung der an Streuprozessen beteiligten Vorgänge dar. Hierbei handelt es sich bei einem Streuprozess immer um die Überlagerung aller möglicher Vorgänge, die jeweils mit einer eigenen Amplitude beitragen. Ist die Kopplungskonstante klein gegenüber eins, so spielen die Feynman-Graphen mit einer geringen Zahl an Vertizes eine dominante Rolle und es ist durchaus sinnvoll, die gesamte Übergangsamplitude in eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten zu entwickeln. Graphen höherer Ordnung dürfen allerdings im Allgemeinen nicht ignoriert werden, da auch sie wichtige Veränderungen in den Berechnungen herbeiführen können.

4.1 Feynman-Regeln der QED

In jeder Quantenfeldtheorie gibt es bestimmte, feste Regeln, nach denen Feynman-Graphen gezeichnet und berechnet werden. In der Hopf-Algebra der Quantenelektrodynamik gibt es nur drei Elemente: Die Photonlinie, die Fermionlinie und den Photon-Fermion-Fermion-Vertex. [DSE06]

$$\mathcal{R}^{QED} = \left\{ \text{wavy line}, \text{arrowed line}, \text{vertex} \right\}$$

Unter der Annahme, dass die einzigen beteiligten Teilchen Elektronen (bzw. Positronen) und Photonen sind, reicht es aus, die Linien zu zeichnen. Wichtig ist die Einhaltung der Orientierungen der Fermionpfeile am Vertex, da diese gerichtet sind. Ein nach rechts laufender Pfeil entspricht einem Fermion, ein nach links zeigender einem Antifermion.

Für den Fall, dass neben den Elektronen noch weitere Fermionen wie beispielsweise Myonen miteinbezogen werden, müssen diese unterscheidbar von den Elektronen gekennzeichnet werden, da sonst die Leptonfamilienzahlerhaltung in den Vertizes nicht ohne weiteres überprüft werden kann. Man schreibt hierzu an die Linie die Bezeichnung des Teilchens. Ob es sich um ein Teilchen oder ein Antiteilchen handelt, wird aus der Orientierung der Kanten ersichtlich, daher wird nur die Familie an die Kante geschrieben. Das Photon ist das einzige Austauschboson der Quantenelektrodynamik, daher wird die Photonlinie im allgemeinen nicht genauer gekennzeichnet. Geht man von der elektrischen Wechselwirkung zur elektroschwachen über, so kommen drei weitere Austauscheteilchen hinzu (das Z^0 -Boson sowie die W^\pm -Bosonen), sodass hier eine Kennzeichnung oder eine andere Linienwahl entscheidend ist. Wir wollen im Folgenden von einer Kennzeichnung der Linien absehen, da wir die Struktur der Graphen untersuchen wollen und nicht die Unterschiede zwischen verschiedenen Streuprozessen gleichartiger Teilchen.

Alle Feynmangraphen der Quantenelektrodynamik lassen sich wie Puzzle aus den drei Elementen von \mathcal{R}^{QED} zusammenfügen. Weitere Elemente sind entweder verboten, so wie der Vertex mit zwei einlaufenden Fermionen oder mit zwei Photonlinien statt einer, oder sie sind schlicht physikalisch unsinnig, wie zum Beispiel eine Fermionlinie ohne Pfeil. [REN93]

Zur Berechnung eines Feynman-Graphen gibt es ebenso Regeln wie zur Konstruktion.

Die einzelnen Teilchenlinien sind als Propagatoren zu verstehen. Ein Propagator beschreibt die Bewegung eines Teilchen von einem Ort x_1 zu einer Zeit t_1 and einen anderen Ort x_2 zu einer späteren Zeit t_2 . Der Propagator ist also verantwortlich für die Teilchenbewegung und daher entsprechen die Linien den Propagatoren, da die Linien genau die Dynamik des Systems repräsentieren. Photon- und Fermionlinien haben natürlich unterschiedliche Propagatoren, da sie

sich in Spin, Ruhemasse etc. unterscheiden.

Es ist für viele Zwecke sinnvoll, die Propagatoren im Impulsraum aufzuschreiben. Für manche Betrachtungen ist der Konfigurationsraum (Ortsraum) zielführender, jedoch wird diese Arbeit sich auf den Impulsraum beschränken.

Der Photonpropagator wird mit $D_F^{\mu\nu}$ bezeichnet und hat die Form $D_F^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\eta}$. Mit $g^{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor des Minkowskiraums gemeint und μ und ν beziehen sich auf die beiden Orte, zwischen denen das Photon ausgetauscht wird. Der Fermionpropagator wird mit S_F bezeichnet und lautet $S_F = (\gamma \cdot p - m_0 + i\eta)^{-1}$. Das γ ist der Dirac-Matrizen-Vierervektor, eine Art Vektor mit den Dirac-Matrizen als Einträgen. Diese Matrizen kommen aus der Dirac-Gleichung, die die Bewegung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im elektrischen Feld beschreibt. Weiterhin ist p der Viererimpuls des Fermions, m_0 die Fermionmasse aus dem Hamiltonian, und η ein künstlich hinzugefügter Parameter, der verhindern soll, dass die Propagatoren singularär werden. [REN93] Die Feynman-Rechenregeln besagen: Für jeden Photon-Fermion-Fermion-Vertex schreibe man den Faktor $-ie\gamma^\mu$ hin. Für jede Photonlinie schreibe man den Faktor $iD_F^{\mu\nu}$ auf. Für jede Fermionlinie notiere man den Faktor iS_F . Den äußeren Linien sind freie Spinoren und Polarisationsvektoren zugeordnet. Die Spinorfaktoren werden für jede Fermionlinie derart angeordnet, dass man der Pfeilrichtung folgt, während man von rechts nach links liest. An jedem Vertex erfüllen die Viererimpulse der beteiligten Linien sowohl die Energie- als auch die Impulserhaltung. Über alle freien, d.h. durch die Viererimpulserhaltung nicht festgelegten Impulse im Diagramm muss integriert werden, wobei der Phasenraumfaktor $\frac{1}{(2\pi)^4}$ berücksichtigt werden muss. [QUA08]

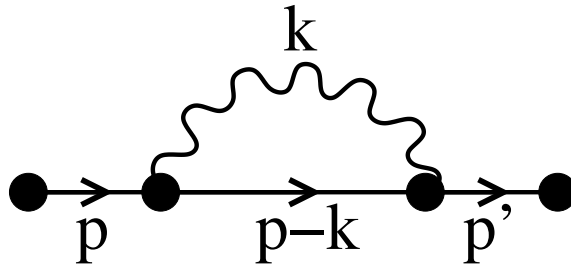
Graph	Bedeutung	Feynman-Regel zur Berechnung
	Vertexfunktion	$-ie\gamma^\mu \delta^4(p' - p - k)$
	Photon-Propagator, Impuls k	$iD_F^{\mu\nu}(k)$, $D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\eta}$
	Fermion-Propagator, Impuls p	$iS_F(p)$, $S_F(p) = (\gamma \cdot p - m_0 + i\eta)^{-1}$
	einfallendes Fermion, Impuls p	$u(p)$
	auslaufendes Fermion, Impuls p	$\bar{u}(p)$
	einfallendes Antifermion, Impuls p	$v(p)$
	auslaufendes Antifermion, Impuls p	$\bar{v}(p)$
	einfallendes Photon, Impuls k	$w^{\lambda*}(k)$
	auslaufendes Photon, Impuls k	$w^\lambda(k)$

Die Zeit wird jeweils von links nach rechts gelesen, d.h. Linien, die links mit keinem Vertex verbunden sind ("offene Kanten", "externe Kanten") bezeichnen die einlaufenden Teilchen, also den Anfangszustand $|i\rangle$, analog stehen Linien, die rechts an keinen Vertex anschließen, für auslaufende Teilchen, die den Endzustand $|f\rangle$ charakterisieren.

Die Funktionen $u(p)$, $\bar{u}(p)$, $v(p)$ und $\bar{v}(p)$ sind die vier Lösungen der Dirac-Gleichung, welche Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen beschreibt. Bei den Funktionen $w^{\lambda*}(k)$ und $w^\lambda(k)$ handelt es sich um Polarisationsvektoren, die also den Zustand der jeweiligen Photonen kennzeichnen. [QUA08]

Beispiel 11 (Berechnung eines Feynman-Graphen)

Wir betrachten den folgenden Graphen:



Wenden wir die obigen Feynman-Regeln an, so erhalten wir als Übergangsamplitude G :

$$\begin{aligned}
 G &= \iint d^4 p d^4 k i S_F(p) (-i) e \gamma_\mu \delta^4(p - (p-k) + k) i S_F(p-k) i D_F^{\mu\nu}(k) (-i) e \gamma_\nu \delta^4(-k + (p-k) - p') i S_F(p') \\
 &= -e^2 \iint d^4 p d^4 k S_F(p) \gamma_\mu S_F(p-k) D_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu S_F(p') \delta^4(2k) \underbrace{\delta^4(-k + (p-k) - p')}_{\Rightarrow 2k=p-p'} \\
 &= -e^2 \int d^4 k S_F(p) \gamma_\mu S_F(p-k) D_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu S_F(p') \delta^4(p-p') \\
 &= -e^2 \delta^4(p-p') S_F(p) \gamma_\mu \int d^4 k S_F(p-k) D_F^{\mu\nu}(k) \gamma_\nu S_F(p') \\
 &=: \delta^4(p-p') S_F(p) \Sigma(p) S_F(p)
 \end{aligned}$$

Mithilfe der Delta-Funktion konnte eine der beiden Integrationen einfach ausgeführt werden. Dadurch reduziert sich der Term auf eine einzige Integration über den Photonimpuls und weitere Terme (Fermionpropagatoren), die nicht vom Photonimpuls k abhängen. Den zu integrierenden Teil nennen wir Selbstenergie $\Sigma(p)$.

4.2 Selbstenergie

Die Feynman-Regeln bieten ein stabiles Gerüst, um die Berechnungen von Diagrammen auszuführen. Bei den Berechnungen kann es dennoch zu Schwierigkeiten führen, die auf ein Phänomen zurückzuführen sind, welches **Selbstenergie** genannt wird. Beispielweise lässt sich bereits der einfache Subgraph, also Teil eines größeren Graphen,

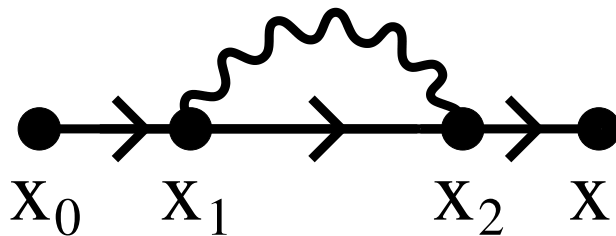


Abbildung 4: Subgraph mit Singularität bei $x_1 = x_2$.

nicht mehr ohne Singularitäten berechnen, wenn $x_1 = x_2$ gesetzt wird. Dies ist der gleiche Graph wie im Beispiel eben, diesmal allerdings mit der Beschriftung aus dem Konfigurationsraum, um die Singularität besser zu veranschaulichen.

Das Auftreten der Singularität bedeutet nicht, dass die Quantenelektrodynamik nicht stimmt oder auf falsche Ergebnisse führt. Vielmehr müssen wir uns erinnern, dass Feynman-Graphen Terme einer Störungsreihe sind und keine separat beobachtbaren physikalischen Effekte beschreiben. Es liegt also vielmehr an der Formulierung, dass die Integrale divergieren, als an der Physik. Jedoch stößt man bereits in so einfachen Graphen auf diese undefinierten Terme. Rein intuitiv sollte es doch möglich sein, die Emission und Reabsorption ein- und desselben Photons immer weiter zusammenschieben und zu verkürzen, bis die Interaktion ganz verschwindet. Rechnet man das jedoch aus, so stößt man auf etwas ganz ähnliches wie die ultravioletten Divergenzen der schwarzen Strahler: ein Integral, das plötzlich divergiert, was sich physikalisch nicht anders erklären lässt, als dadurch, dass der Effekt noch nicht komplett verstanden ist und daher noch nicht richtig beschrieben wird.

Im Feynmandiagramm werden diese Prozesse als schraffierte Kreise dargestellt.

Man spricht von der **Photon-Selbstenergie**, wenn man miteinbezieht, dass das Photon als Aus-

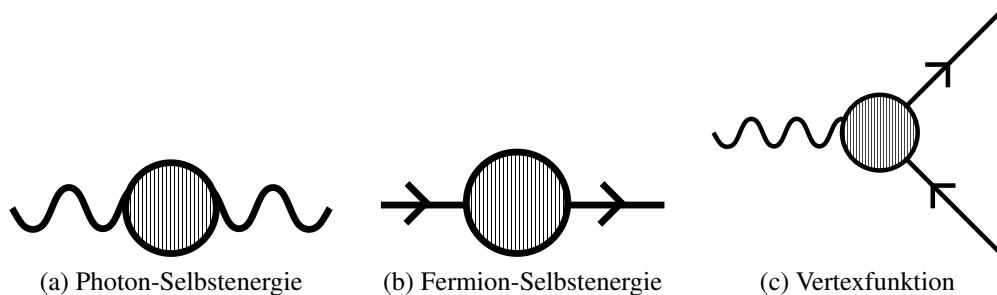


Abbildung 5: Selbstenergien der Photon- und Fermionlinie sowie Vertexfunktion

tauschboson der elektrischen Wechselwirkung ständig an elektrisch geladene Teilchen koppelt, wobei diese Teilchen nicht immer reell sein müssen. So ist jedes Photon ständig von einer Wolke virtueller Elektronen und Positronen umgeben. Dies nennt man Vakuumpolarisation und lässt sich als ständige Paarbildung und Rekombination beschreiben. Diese Vorgänge finden zu jeder Zeit, aber auf unglaublich kleinem Maßstab statt, da nur bei sehr kleinen Distanzen aufgrund der Heisenberg'schen Unschärfe die Energieunschärfe groß genug ist, um genügend Energie für die Paarerzeugung zur Verfügung zu stellen. [REN93]

$$\text{wavy line with shaded circle} := \text{wavy line} + \text{wavy line with fermion loop} + \text{wavy line with fermion loop and photon loop} + \dots$$

Analog zur Photon-Selbstenergie bezeichnet man mit **Fermion-Selbstenergie** die Photonwolke um Fermionen, da diese ständig virtuelle Photonen emittieren und sofort wieder absorbieren. Diese virtuellen Photonen können natürlich auch ständig wieder in weitere virtuelle Elektron-Positron-Paare zerfallen und so weiter.

$$\text{straight line with shaded circle} := \text{straight line} + \text{straight line with photon loop} + \text{straight line with photon loop and fermion loop} + \dots$$

Weiterhin beinhaltet die **Vertexfunktion** virtuelle Austauschprozesse, die innerhalb eines Vertex stattfinden. Dies beinhaltet nicht die Selbstenergien der beteiligten Photon- und Fermionlinien! Es sind vielmehr Vorgänge gemeint, die sich nicht vom Vertex abspalten lassen.

$$\text{shaded circle vertex} := \text{bare vertex} + \text{vertex with fermion loop} + \text{vertex with photon loop} + \text{vertex with fermion loop and photon loop} + \dots$$

Ein "realistischer" Vertex würde also vielmehr so aussehen:

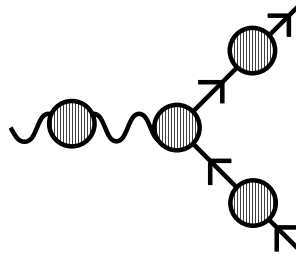


Abbildung 6: Ein Photon-Fermion-Fermion Vertex mit Energiekorrekturen an den Linien sowie im Vertex.

Will man nun die Übergangsamplitude eines Feynman-Graphen berechnen, wobei man die Selbstenergien miteinbeziehen möchte, so ist das Resultat unendlich. Dieses Ergebnis ist physikalisch unsinnvoll, da das Betragsquadrat einer Amplitude niemals größer als eins sein kann (was einem Übergang mit nur einem möglichen Endzustand entsprechen würde, in den der Anfangszustand immer übergeht). Es ist die Aufgabe der Renormierung, diese divergenten Integrale endlich zu machen. Auf den ersten Blick mag dies unphysikalisch erscheinen. Tatsächlich aber liegen die Unendlichkeiten nicht in der Physik selbst, sondern in unphysikalischen, nicht experimentell bestimmbareren Größen, sodass sie durch geschickte Subtraktionen oder andere Methoden beseitigt werden können, ohne die Physik zu verändern.[VOR11]

Die Idee hinter der Renormierung ist, dass die Physik unempfindlich gegenüber Prozessen mit sehr hohen Energien ist. Daher müssten sich auch diese Prozesse mit unter normalen Bedingungen messbaren Größen beschreiben lassen. Wenn Summen über Feynman-Graphen divergieren, so liegt es an unphysikalischen, nicht beobachtbaren Konstanten und nicht an Observablen. Alles, was nicht beobachtet werden kann, kann grundsätzlich auch nicht quantifiziert werden, also können an diesen Stellen Einschnitte vorgenommen werden, ohne das physikalisch Beobachtbare zu verändern. Ein sehr einfaches Beispiel ist die Wahl der freien Phase bei der quantenmechanischen Wellenfunktion. Diese verschwindet, wenn das Betragsquadrat gebildet wird, welches die physikalische Observable darstellt und nicht die Wellenfunktion. Ein weiteres Beispiel kann den Vorgang der Renormierung anschaulicher machen.[REN93]

4.3 Divergente Integrale

4.3.1 Logarithmische Divergenz

Um zu veranschaulichen, wie das Divergieren eines Integrals nur von einer uninteressanten Konstanten abhängen kann, betrachten wir folgende Funktion einer Variablen x :

$$f(x) := \int_1^{\infty} \frac{dy}{x+y}.$$

Offenbar ist $f(x)$ undefiniert für jeden Wert von x . Betrachtet man allerdings die Differenz von f zwischen zwei verschiedenen Werten von x , zum Beispiel x und 0 , so ist das Resultat endlich:

$$f(x) - f(0) = \int_1^{\infty} dy \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} \right) = \int_1^{\infty} dy \frac{-x}{y(x+y)} =: \tilde{f}(x)$$

Da $\tilde{f}(x)$ konvergent ist, kann nun $f(x)$ über $\tilde{f}(x)$ ausgedrückt werden[REN93]:

$$f(x) = \tilde{f}(x) + f(0) = \tilde{f}(x) + \text{const.} =: \tilde{f}(x) + A.$$

Offenbar ist die Divergenz von $f(x)$ allein in einer unendlichen Konstanten begründet und nicht in der x -Abhängigkeit der Funktion. Es ist also zweckmäßig, $f(x)$ an zwei verschiedenen Stellen zu betrachten und die Differenz zu berechnen. Dabei geht keinerlei Information über die x -Abhängigkeit von f verloren. Physikalisch betrachtet müssen zwei Messungen durchgeführt und verglichen werden, um ein konvergentes Integral zu erhalten. Diese Art der Divergenz wird logarithmische Divergenz genannt, da der Nennergrad der Variablen, über die integriert werden soll, um eins größer ist als der Zählergrad.

4.3.2 Lineare Divergenz

Wir betrachten im Folgenden eine linear divergente Funktion. Hierbei ist der Zählergrad der Integrationsvariablen gleich dem Nennergrad.

$$g(x) = \int_1^{\infty} dy \frac{y}{x+y}.$$

$g(x)$ ist wie schon $f(x)$ divergent, allerdings divergiert $g(x)$ wegen des zusätzlichen Faktors y im Zähler stärker als $f(x)$. Betrachten wir nun die Differenz von $g(x)$ für zwei Werten von x , erhalten wir [REN93]

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \int_1^{\infty} dy \left(\frac{y}{x+y} - 1 \right) = \int_1^{\infty} dy \left(\frac{-x}{x+y} \right) = \\ &= -x \int_1^{\infty} dy \left(\frac{1}{x+y} \right) = -x \cdot f(x) = -x(\tilde{f}(x) + A) \\ \Rightarrow \quad g(x) &= g(0) - Ax - x\tilde{f}(x) =: B - Ax + \tilde{g}(x) \end{aligned}$$

Wir haben an der passenden Stelle einen Term in $g(x)$ mithilfe von $f(x)$ ausgedrückt. Von $f(x)$ wissen wir, dass es in $\tilde{f}(x)$, welches endlich ist, und in A , welches konstant, aber unendlich ist, aufgeteilt werden kann. So erhalten wir für die x -Abhängigkeit von g den gleichen Zusammenhang wie für f , allerdings mit einem weiteren linearen Summanden, welcher über die unendliche Konstante verknüpft ist. Der Wert dieser Konstanten kann nicht bestimmt werden, aber die Natur des Zusammenhangs ist vollständig geklärt.

5 Dyson-Schwinger Gleichungen

Bei einer Dyson-Schwinger-Gleichung handelt es sich um eine Bewegungsgleichung. Bewegungsgleichungen beschreiben die Dynamik eines Systems und sind aus der Mechanik, z.B. anhand eines Pendels, oder aus der Elektrodynamik, z.B. in Form eines Schwingkreises, bekannt. Die genannten Beispiele stellen relativ einfache Systeme dar, in der Natur sind beliebig komplizierte Systeme anzutreffen.

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen beschreiben die Dynamik der Propagatoren in der Quantenfeldtheorie. Sie sind also die Bewegungsgleichungen der Photon- und Fermionpropagatoren, oder allgemeiner ausgedrückt beschreiben sie die Wechselwirkungen, die in einem bestimmten System auftreten können. Allgemein handelt es sich bei Dyson-Schwinger-Gleichungen um ein System von unendlich vielen gekoppelten Differentialgleichungen.[QUA08] Wir wollen uns hier auf einfache Beispiele beschränken.

5.1 Kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen

In der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen lassen sich allerhand Fixpunktgleichungen definieren, die die Entwicklung eines Systems von Wurzelbäumen beschreiben sollen. Gesucht werden Reihen $X(\alpha) \in [[\mathcal{H}]]$, $0 < \alpha \ll 1$, also im allgemeinen unendliche Reihen in der Hopf-Algebra \mathcal{H} und mit unendlichen Polen, die Fixpunktgleichungen in Hochschild-Kohomologien lösen sollen.[VOR11] Mit dem Shift-Operator B_+ haben wir bereits einen einfachen Hochschild-1-Kozykel kennen gelernt und im Rahmen dieser Arbeit werde ich mich auf diesen beschränken. Beispiele für solche Fixpunktgleichungen sind:

Beispiel 12 (Dyson-Schwinger-Gleichungen)

$$\begin{aligned} X_1(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha B_+(X_1(\alpha)) \\ X_2(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha B_+(X_2^2(\alpha)) \\ X_3(\alpha) &= \alpha B_+\left(\frac{1}{\mathbb{I} - X_3(\alpha)}\right) + \alpha^2 B_+\left(\frac{1}{(\mathbb{I} - X_3(\alpha))^2}\right) \end{aligned}$$

Bei der ersten Reihe handelt es sich um eine lineare, bei der zweiten und dritten um nichtlineare Dyson-Schwinger-Gleichungen. Die Brüche in X_3 sind hierbei als geometrische Reihen zu verstehen. Diese Gleichungen sind iterativ zu lösen.

5.2 Lineare Dyson-Schwinger-Gleichungen

In der Hopf-Algebra der linearen Wurzelbäume lässt sich jeder Wurzelbaum sehr einfach mithilfe des Shift-Operators B_+ darstellen: Da es bei linearen Wurzelbäumen keine Verzweigungen gibt, ist ein Wurzelbaum mit n Vertices genau der n -Mal auf \mathbb{I} angewandte Shift-Operator.[ETU06] Bezeichnet man mit t_n den linearen Baum mit genau n Vertices, so ist [ETU06]

$$t_n = \underbrace{B_+ \circ B_+ \circ \cdots \circ B_+}_{n\text{-Mal}} \mathbb{I}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} B_+(t_i) &= t_{i+1} \\ t_i &= B_+^i(\mathbb{I}) \end{aligned}$$

Beispiel 13 (Lineare Wurzelbäume)

$$\bullet = B_+(\mathbb{I}) ; \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = B_+(\bullet) = B_+^2(\mathbb{I}) ; \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = B_+\left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}\right) = B_+^3(\mathbb{I})$$

Betrachten wir nun die formale Reihe in einer Variablen α :

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha B_+(X(\alpha)) \\ &= \mathbb{I} + \alpha B_+(\mathbb{I} + \alpha B_+(X(\alpha))) \\ &= \mathbb{I} + \alpha B_+(\mathbb{I} + \alpha B_+(\mathbb{I} + \alpha B_+(X(\alpha)))) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Offenbar lässt sich hier mithilfe von $B_+(\mathbb{I}) = \bullet$ die gesamte Hopf-Algebra der linearen Wurzelbäume erzeugen:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha \bullet + \alpha^2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \alpha^3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \alpha^4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \alpha^5 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \dots$$

Bei der Reihe $X(\alpha)$ handelt es sich um die einfachste lineare Dyson-Schwinger-Gleichung in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen. Hierbei wurde angenommen, dass nur ein einziger Shift-Operator existiert. Man kann sich aber ohne weiteres vorstellen, dass es verschiedene Vertizes gibt, die unterschiedlich gekennzeichnet werden, z.B. mit einer 1 oder einer 2.[VOR11] Dann könnte die lineare Dyson-Schwinger-Gleichung folgendermaßen aussehen:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+^{(1)}(X(\alpha)) + \alpha^2 B_+^{(2)}(X(\alpha))$$

Die Vertizes sind nun gewichtet. Die Graduierung in dieser Hopf-Algebra entspricht nicht mehr der Anzahl Vertizes, sondern dem Gewicht des Baums, welches sich als die Summe der Gewichte der Vertizes berechnet. Innerhalb einer Potenz in α in der Dyson-Schwinger-Gleichung müssen also nicht unbedingt alle Bäume die gleiche Anzahl Vertizes aufweisen.

Mithilfe von

$$\begin{aligned} B_+^{(1)}(\mathbb{I}) &= \bullet 1 \\ B_+^{(2)}(\mathbb{I}) &= \bullet 2 \end{aligned}$$

schreibt sich $X(\alpha)$ also folgendermaßen:

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha \bullet 1 + \alpha^2 \underbrace{\left(\begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} + \bullet 2 \right)}_{=: \delta_2} + \alpha^3 \underbrace{\left(\begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 2 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 2 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} \right)}_{=: \delta_3} + \alpha^4(\dots) + \dots$$

Um den Koeffizienten von α^4 , δ_4 , zu bestimmen, wird nun $B_+^{(1)}$ auf δ_3 angewandt und $B_+^{(2)}$ auf δ_2 . Demnach ist

$$\delta_4 = \begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 2 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 2 \\ | \\ \bullet 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 1 \\ | \\ \bullet 1 \\ | \\ \bullet 2 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet 2 \\ | \\ \bullet 2 \end{array} .$$

Augenscheinlich enthält jeder Koeffizient von α^n jeden linearen Baum, dessen Vertizes so graduieren sind, dass die Summe der Graduierungen gerade n ergibt. Hierbei ist jede Permutation der Vertizes vertreten. Dies lässt sich durch das Shuffle-Produkt sehr gut darstellen.

5.3 Das Shuffle-Produkt

Das **Shuffle-Produkt** (engl: to shuffle = mischen, durchmischen) beschreibt eine besondere Art der Multiplikation, bei der zwei Mengen derart durchmischt werden, dass in beiden Mengen die ursprüngliche Reihenfolge erhalten bleibt, wie beim Durchmischen von zwei Kartendecks, die man mit dem Daumen ineinandergleiten lässt. Das Shuffle-Produkt wird mit dem Symbol \sqcup ausgedrückt und unterliegt einigen Rechenregeln, auf die hier nur marginal eingegangen werden soll. Bedingung für die Shuffle-Multiplikation ist, dass die Menge, auf der das Shuffle-Produkt definiert sein soll, geordnet ist, d.h. dass alle Elemente dieser Menge durch die Relationen $\{<, >, =\}$ nebeneinandergestellt werden können und immer genau eine der drei Relationen zutrifft. Die Graduierung kann wie oben über die Anzahl Vertizes erfolgen, möglicherweise in Verbindung mit einer Gewichtung, sie kann aber auch in einer Menge von Buchstaben durch deren Position im Alphabet gegeben sein. Hierbei ergibt sich die Algebra von Wörtern, deren Graduierung man sich wie ein Wörterbuch denken kann. Weiterhin existieren Lyndon-Wörter, die so definiert sind, dass das Wort an jeder beliebigen Stelle getrennt werden kann, sodass das vorangehende Wort immer "kleiner" als das nachfolgende sein, also im alphabetischen Lexikon weiter vorn stehen muss. *best* ist ein Lyndon-Wort, *worst* dagegen nicht. Das Wort *best* ist durch Multiplikation von *b*, *e*, *s* und *t* entstanden. Eine Multiplikation entspricht also dem einfachen Nebeneinanderschreiben von Buchstaben (= Algebraelementen). [SHU00]

Definition 7 (Shuffle-Produkt)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ und A eine endliche, graduierte Menge. Das Shuffle-Produkt \sqcup ist rekursiv definiert durch

$$aw_1 \sqcup bw_2 = a(w_1 \sqcup bw_2) + b(aw_1 \sqcup w_2) \quad a, b \in A, w_1, w_2 \text{ Wörter}$$

Beispiel 14 (Shuffle-Produkt)

Sei $w_1 = x$ und $w_2 = y$. Dann ist das Shuffle-Produkt

$$\begin{aligned} ax \sqcup by &= a(x \sqcup by) + b(ax \sqcup y) = \\ &= a(xby + bxy + byx) + b(axy + ayx + yax) = \\ &= axby + abxy + abyx + baxy + bayx + byax \end{aligned}$$

Es ist deutlich zu sehen, dass *a* niemals hinter *x* und *b* niemals hinter *y* steht.

5.4 Lösung in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen

Kommen wir nun zurück zu den linearen Dyson-Schwinger-Gleichungen. Diese Gleichungen sind nur dann einfach zu lösen, wenn die Hopf-Algebra-Struktur bekannt ist. Insbesondere der Hochschild-Kozykel und dessen Verwendung sollten bekannt sein. Ist erst ein Hochschild-1-Kozykel gefunden, so reicht die Kenntnis darüber aus, um die Gleichung in der entsprechenden Hopf-Algebra zu lösen. Wir wissen, wie der Hochschild-Kozykel B_+ , der Shift-Operator, funktioniert, und können daher die Lösungen iterativ in der Hopf-Algebra von linearen Wurzelbäu-

men bestimmen.

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+(X(\alpha)) \quad \Rightarrow \quad X(\alpha) = \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i t_i \quad \text{mit } t_i = B_+^i \mathbb{I}$$

Kommt in der Dyson-Schwinger-Gleichung mehr als ein Hochschild-Kozykel vor, so wird das Ergebnis mithilfe des Shuffle-Produkts angegeben.

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha B_+^{(1)}(X(\alpha)) + \alpha^2 B_+^{(2)}(X(\alpha)) \quad \Rightarrow \quad X(\alpha) = \mathbb{I} + \sum_{\substack{n=1 \\ i_1+2i_2=n}}^{\infty} \alpha^n \left((B_+^{(1)})^{i_1} \sqcup (B_+^{(2)})^{i_2} \right)$$

Es werden alle die Bäume aufsummiert, die aus Shuffeln von Vertizes bestehen, die mit 1 oder mit 2 gewichtet sind und wo die Summe über alle Gewichtungen der Vertizes genau n ergibt. Die lässt sich natürlich verallgemeinern auf den Fall, dass in der linearen Dyson-Schwinger-Gleichung k verschiedene Shift-Operatoren vorkommen, $k \in \mathbb{N}$, $k < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \mathbb{I} + \alpha B_+^{(1)}(X(\alpha)) + \alpha^2 B_+^{(2)}(X(\alpha)) + \dots + \alpha^k B_+^{(k)}(X(\alpha)) \\ \Rightarrow X(\alpha) &= \mathbb{I} + \sum_{\substack{n=1 \\ i_1+2i_2+\dots+ki_k=n}}^{\infty} \alpha^n \left((B_+^{(1)})^{i_1} \sqcup (B_+^{(2)})^{i_2} \sqcup \dots \sqcup (B_+^{(k)})^{i_k} \right) \end{aligned}$$

bzw. verkürzt sich der Ausdruck mit der Bezeichnung $\sigma := \sum_{j=1}^k j \cdot i_j$ und der Definition

$$\bigsqcup_{j=1}^k (B_+^{(j)})^{i_j} := (B_+^{(1)})^{i_1} \sqcup (B_+^{(2)})^{i_2} \sqcup \dots \sqcup (B_+^{(k)})^{i_k}$$

als das Shuffle-Produkt von allen $(B_+^{(j)})^{i_j}$, $1 \leq j \leq k$, zu

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \sum_{\substack{n=1 \\ \sigma=n}}^{\infty} \alpha^n \left(\bigsqcup_{j=1}^k (B_+^{(j)})^{i_j} \right)$$

6 Wurzelbäume und Feynmangraphen

Um zu verdeutlichen, wie Wurzelbäume und Quantenfeldtheorie zusammenhängen, betrachten wir ein einfaches Beispiel aus der masselosen Yukawa-Theorie.[KRE11] In dieser Theorie gibt es ein Boson (Spin-1-Teilchen), welches im Feynman-Diagramm durch eine ungerichtete durchgezogene Linie dargestellt wird, und ein Fermion (Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen), welches im Feynman-Diagramm durch eine gerichtete durchgezogene Linie (mit Pfeil) dargestellt wird. Nehmen wir weiterhin an, dass ein Fermion Bosonen nur in der umgekehrten Reihenfolge, in der es sie emittiert hat, absorbieren kann. Der Grund für diese Annahme wird später klar. Das Fermion könnte sich also ohne jegliche Emissionen durch die Raumzeit bewegen, es könnte auch ein Boson emittieren und absorbieren, es könnte jedoch auch zwei Bosonen emittieren und so weiter. Jede Emission bzw. Absorption sei mit der Kopplungskonstanten g gewichtet, dann ergibt jede Paarung von Emission und Absorption einen Faktor $g^2 =: \alpha$. Die Bewegungsgleichung $X(\alpha)$ sieht also folgendermaßen aus:

$$X(\alpha) = \longrightarrow + \alpha \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} + \alpha^2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \longrightarrow \end{array} + \alpha^3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \downarrow \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} + \dots$$

Darin ist sofort die Struktur der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen erkennbar: Um jede Emission-Absorption wird eine Box gezeichnet, welche am oberen Ende mit einem Kreis versehen wird. Werden diese Kreise vertikal verbunden, so werden sie zu Vertizes und die Verbindungen zu Kanten. Die reine Fermion-Linie ohne Wechselwirkungen wird mit der \mathbb{I} assoziiert.

$$X(\alpha) = \mathbb{I} + \alpha \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} + \alpha^2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \uparrow \downarrow \\ \longrightarrow \end{array} + \alpha^3 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \uparrow \downarrow \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} + \dots$$

$$\simeq \mathbb{I} + \alpha \bullet + \alpha^2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \alpha^3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \dots$$

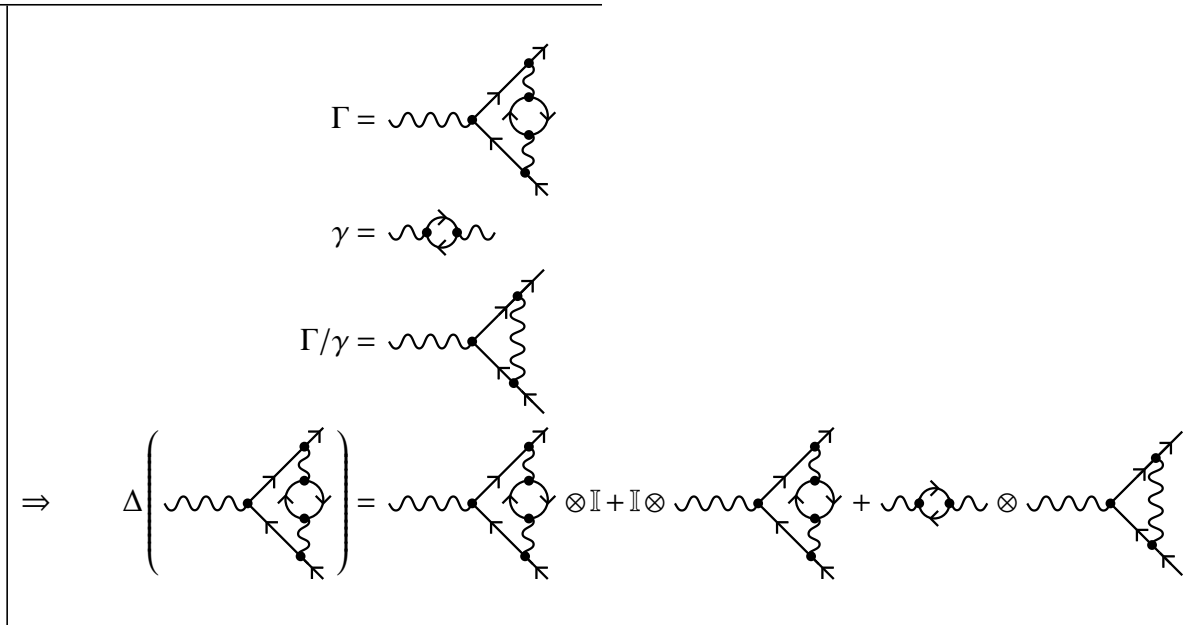
Offensichtlich ist diese Art der Yukawa-Wechselwirkung isomorph zu einer bestimmten Klasse von Wurzelbäumen, den linearen Wurzelbäumen, da sich deren Bewegungsgleichung (Dyson-Schwinger-Gleichung) als Reihe in der Kopplungskonstanten α mit Wurzelbäumen als Koeffizienten darstellen lässt. Durch die Konvention, dass ein Emissions-Absorptions-Vorgang von einer Box umrandet und am oberen Ende mit einem Vertex markiert wird, gehen keinerlei Informationen verloren, sodass beide Darstellungen gleichwertig sind.[KRE11] Ich habe also gezeigt, dass den Feynman-Graphen der linearen Yukawa-Theorie die Hopf-Algebra-Struktur der linearen Wurzelbäume zugrunde liegt. Dann lässt über das Koprodukt aussagen:

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet$$

$$\Leftrightarrow \Delta \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array}$$

Es zeigt sich, dass es zweckmäßig ist, das Koprodukt von Feynman-Graphen mithilfe von Residuen auszudrücken. Ein Residuum ist in diesem Fall ein Graph, bei dem ein Subgraph (also eine Struktur innerhalb des Graphen) auf einen Punkt zusammengeschrumpft worden ist. Anstelle der Summe $\sum P^C(T) \otimes R^C(T)$ bei den Wurzelbäumen schreibt man nun $\sum \gamma \otimes \Gamma / \gamma$, wobei Γ den kompletten Graphen und γ den zu schrumpfenden Subgraphen bezeichnen möge. Γ / γ ist dann der ursprüngliche Graph, bei dem γ auf einen Punkt geschrumpft worden ist. [DSE06] Dies ist allgemein und nicht auf lineare Substrukturen beschränkt.

Beispiel 15 (Koprodukt von Feynman-Graphen)



6.1 Renormierung mit Wurzelbäumen

Wie definieren nun die Abbildung ϕ aus der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen in Polynome in einer Variablen z mit endlichen Polen.

$$\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \left[z^{-1}, z \right] = V$$

Die linke Klammer bedeutet, dass die Laurent-Reihe endlich ist, d.h. dass die Pole endlicher Ordnung sind. Die beiden Klammern auf der rechten Seite bedeuten, dass die Funktion als Taylorreihe unendlich hoher Ordnung geschrieben werden kann.

Wir setzen nun explizit[KRE11]

$$\begin{aligned} \phi(\mathbb{I}) &= 1 \\ \phi_a(\bullet) &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-z}}{x+a} \quad ; \quad a \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(a) > 0 ; z > 0 \\ &= a^{-z} B(z, 1-z), \end{aligned}$$

wobei $B(z, 1-z)$ die Beta-Funktion sei mit der Definition

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad ; \quad \Gamma : \text{Gammafunktion} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(1+x) &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Offenbar ist ϕ_a singularär bei $z = 0$. Der Pol ist von erster Ordnung. Daher lässt sich $\phi_a(\bullet)$ entwickeln zu

$$\begin{aligned} \phi_a(\bullet) &\propto \frac{a^{-z}}{z} (1 + \mathcal{O}(z)) \\ &= \frac{1}{z} (1 - z \ln a + \mathcal{O}(z^2)) (1 + \mathcal{O}(z)) \\ &= \frac{1}{z} - \ln a + \mathcal{O}(z) \end{aligned}$$

Der erste Term ist zwar nicht definiert für $z = 0$, allerdings ist er unabhängig von a und kann deshalb entfernt werden, indem zusätzlich zu ϕ_a an einer weiteren Stelle ϕ_b berechnet wird und die Ergebnisse subtrahiert werden. Physikalisch entspricht das einer zweifachen Messung. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
 \phi_a \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) &= \iint_0^\infty dx_1 dx_2 \frac{x_2^{-z}}{x_2 + x_1} \frac{x_1^{-z}}{x_1 + a} \\
 &= B(z, 1-z) \int_0^\infty dx_1 \frac{x_1^{-2z}}{x_1 + a} \\
 &= a^{-2z} B(2z, 1-2z) B(z, 1-z) \\
 &\propto a^{-2z} \cdot \frac{1}{2z} (1 + \mathcal{O}(z)) \cdot \frac{1}{z} (1 + \mathcal{O}(z)) \\
 &\propto (1 - 2z \ln a + \mathcal{O}(z^2)) \cdot \frac{1}{2z} (1 + \mathcal{O}(z)) \cdot \frac{1}{z} (1 + \mathcal{O}(z)) \\
 &= \frac{1}{2z^2} - \frac{\ln a}{z} + \mathcal{O}(1)
 \end{aligned}$$

Hier wurde zunächst nach x_2 integriert und anschließend nach x_1 . Die Beschriftung der Integrationsparameter x_i entspricht einer Durchnummerierung der Vertizes. Es werden genau so viele Integrationen vorgenommen wie Vertizes im Baum vorhanden sind. Diesmal ist das Ergebnis in einer Form divergent, die durch einfache Subtraktion an einer zweiten Stelle b nicht zu beseitigen ist.

Wir nutzen nun aus, dass sich die Abbildung $\phi : \mathcal{H} \rightarrow V$ Gruppenstruktur hat und sich die Gruppenverknüpfung $*$ mittels

$$\phi_1 * \phi_2 = m_V (\phi_1 \otimes \phi_2) \underbrace{\Delta}_{\substack{\in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \in V \otimes V \\ \in V}}$$

schreiben lässt.[KRE11]

Weiterhin verwenden wir die Antipode[VOR11]

$$\phi_a^{-1} * \phi_b = m_V (\phi_a \circ \mathcal{S} \otimes \phi_b) \Delta =: \phi_a^b$$

Physikalisch lässt sich die Antipode interpretieren als die zweifache Messung eines Experiments, einmal mit den Parametern a , ein zweites Mal mit den Parametern b , nur dass die Ergebnisse nun nicht nur subtrahiert, sondern mittels Verknüpfung etwas subtiler verglichen werden. Wegen

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet$$

folgt für ϕ_a^b :

$$\begin{aligned}
\phi_a^b &= m_V(\phi_a \circ \mathcal{S} \otimes \phi_b) \Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) \\
&= m_V(\phi_a \circ \mathcal{S} \otimes \phi_b) \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \otimes \bullet \right) \\
&= m_V \left(\phi_a \left(\mathcal{S} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) \right) \otimes \phi_b(\mathbb{I}) + \phi_a(\mathcal{S}(\mathbb{I})) \otimes \phi_b \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) + \phi_a(\mathcal{S}(\bullet)) \otimes \phi_b(\bullet) \right) \\
&= \phi_a \left(\mathcal{S} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) \right) \underbrace{\phi_b(\mathbb{I})}_{=1} + \phi_a \underbrace{(\mathcal{S}(\mathbb{I}))}_{=1} \phi_b \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) + \phi_a \underbrace{(\mathcal{S}(\bullet))}_{=-\bullet} \phi_b(\bullet) \\
&= \phi_a \left(- \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \bullet \bullet \right) + \phi_b \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) - \phi_a(\bullet) \phi_b(\bullet) \\
&= \phi_b \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) - \phi_a \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right) + \phi_a(\bullet) (\phi_a(\bullet) - \phi_b(\bullet)) \\
&= \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{\ln b}{z} + \mathcal{O}(1) \right) - \left(\frac{1}{2z^2} - \frac{\ln a}{z} + \mathcal{O}(1) \right) + \left(\frac{1}{z} - \ln a + \mathcal{O}(z) \right) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{z} - \ln a + \mathcal{O}(z) \right) - \left(\frac{1}{z} - \ln b + \mathcal{O}(z) \right) \right\} \\
&= -\frac{\ln b}{z} + \frac{\ln a}{z} + \frac{1}{z} \{ \ln b - \ln a \} + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{1}{z} \left\{ \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\} + \mathcal{O}(1) \\
&= \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

Alle Terme wie $\frac{\ln a}{z}$ fallen weg! Folglich hat das Ergebnis keine Singularitäten mehr, sondern ist endlich bei $z = 0$. Das Integral ist mithilfe der Antipode renormiert worden, das Ergebnis ist nun endlich und hängt von den Parametern a, b der Experimente ab. Dieses Verfahren ist zu jeder Ordnung Störungstheorie möglich. [KRE11]

6.2 Ausblick: Nichtstörungstheoretischer Ansatz

Wir befassen uns hier noch einmal mit der masselosen Yukawa-Theorie. Die lineare Dyson-Schwinger-Gleichung wurde in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen gelöst und ebenso in der graphischen Darstellungen der Interaktionen, da gezeigt wurde, dass beide isomorph sind. Wendet man nun die Feynman-Regeln ϕ an, so erhält man, ausgehend von der graphischen Darstellung, einen analytischen Ausdruck.

$$B_+^{\curvearrowright}(\mathbb{I}) = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} k \\ \bullet \rightarrow \rightarrow \bullet \\ q \quad q+k \quad q \end{array}$$

Die Greensche Funktion ist gegeben durch die Feynman-Regeln, angewandt auf die Dyson-Schwinger-Gleichung[ETU06]: $G(\alpha, L) = \phi_L(X(\alpha))$. L bezeichnet die Konfiguration des Systems in Form eines Logarithmus von zwei Größen, $L = \ln \frac{q^2}{\mu^2}$. Unter Berücksichtigung der Impulserhaltung im Vertex erhält man mit $\frac{1}{k}$ als Fouriertransformierte der Dirac-Gleichung für die Feynman-Regeln:

$$\phi \left(\ln \frac{g^2}{\mu^2} \right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \end{array} \right) = g^2 \int d^4k \frac{1}{k+k} \frac{1}{k^2} = g^2 \not{q} F(q^2) \mathbb{1}_{4 \times 4}$$

Hier impliziert μ einen Renormierungsparameter, den wir erst später verwenden werden. Das Integral folgt aus den Feynman-Regeln für masselose Yukawa-Theorie. Es transformiert sich wie ein Spinor, weshalb das Ergebnis proportional zu \not{q} sein muss. Die Proportionalität kann sich nur in einer skalaren Funktion wiederfinden, da \not{q} jedoch ein Spinor ist, ist eine funktionale Abhängigkeit von Quadrat, q^2 , naheliegend.[KRE11] $\mathbb{1}$ bezeichne hier die (4×4) -Einheitsmatrix.

Wir müssen also $F(q^2)$ bestimmen, um die Gleichung zu lösen. Hierzu multiplizieren wir die Gleichung von rechts mit $\frac{\not{q}}{q^2}$.

$$\begin{aligned} F(q^2)\mathbb{1}_{4 \times 4} &= \frac{1}{q^2} \int d^4k \frac{1}{\not{k} + \not{q}} \frac{1}{k^2} \not{q} \\ &= \frac{1}{q^2} \int d^4k \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \frac{1}{k^2} \not{q} \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde $\frac{1}{\not{k} + \not{q}}$ mit $\not{k} + \not{q}$ erweitert. Da $F(q^2)$ mit der Einheitsmatrix multipliziert ist, bilden wir nun die Spur. Hierbei beachten wir, dass die Spur zyklisch vertauschbar ist und dass in einer Clifford-Algebra gilt $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2ab$. [KRE11]

$$\begin{aligned} 4F(q^2) &= \frac{1}{q^2} \int d^4k \frac{\text{Sp}\left(\left(\not{k} + \not{q}\right)\not{q}\right)}{(k+q)^2} \frac{1}{k^2} \\ \text{Sp}\left(\left(\not{k} + \not{q}\right)\not{q}\right) &= (k+q)q = \frac{1}{2}\left((k+q)^2 + q^2 - k^2\right) \\ \Rightarrow 4F(q^2) &= \frac{1}{q^2} \int d^4k \frac{\frac{1}{2}\left((k+q)^2 + q^2 - k^2\right)}{k^2(k+q)^2} \end{aligned}$$

Der Integrand besteht aus drei Summanden, von denen der erste und dritte ein quadratisch divergentes Integral liefern würden. Der zweite Teil ist "nur" logarithmisch divergent. Wir befassen uns zunächst damit, diesen zu lösen. Hierzu führen wir sphärische Koordinaten ein.

$$\int d^Dk = \int d|k| |k|^{D-1} \int \Omega_{\hat{k}}$$

$\Omega_{\hat{k}}$ bezeichne den Raumwinkel in D Dimensionen, \hat{k} den Einheitsvektor in k -Richtung. Die Oberfläche S der Einheitskugel in D Dimensionen ist bekannt; sie lautet

$$S(D) = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Maßes in Kugelkoordinaten, die sich zeigen lässt, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll, sind also die Terme $\int d^4k \frac{(k+q)^2}{k^2(k+q)^2}$ und $\int d^4k \frac{k^2}{k^2(k+q)^2}$ identisch und heben sich aufgrund des umgekehrten Vorzeichens gerade weg [KRE11]. Es bleibt also nur der logarithmisch divergente Teil.

$$\begin{aligned} 4F(q^2) &= \frac{1}{2q^2} \int d^4k \frac{q^2}{k^2(k+q)^2} \\ \Leftrightarrow 8F(q^2) &= \int d^Dk \frac{1}{k^2(k+q)^2} \end{aligned}$$



Wir substituieren nun $k' = |k| \cdot |q|$ und $q = |q| \cdot \hat{q}$. Dabei sei \hat{q} der Einheitsvektor in q -Richtung.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 8F(q^2) &= (q^2)^{\frac{D-2}{4}} \int d^D k' \frac{1}{k'^2 (k' + \hat{q})^2} \\ &= f(D-4) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(D-4)$ hat ganz offenbar einen Pol bei $D = 4$.

Wir können nun die Dyson-Schwinger-Gleichungen unter Benutzung der Feynman-Regeln hinschreiben und renormieren. Gleichzeitig führen wir, um der Divergenz zu begegnen, eine Subtraktion an einer bestimmten Stelle $q^2 = \mu^2$ durch (Minimale Subtraktion)[ETU06].

$$\begin{aligned} G\left(\alpha, \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)\right) &= 1 + \alpha \text{Sp} \left\{ \frac{1}{q^2} \int d^4 k \frac{(\not{k} + \not{q}) \not{q}}{(k+q)^2 k^2} G\left(\alpha, \ln\left(\frac{(k+q)^2}{\mu^2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{q^2} \int d^4 k \frac{(\not{k} + \not{q}) \not{q}}{(k+q)^2 k^2} G\left(\alpha, \ln\left(\frac{(k+q)^2}{\mu^2}\right)\right) \Big|_{q^2=\mu^2} \right\} \end{aligned}$$

In die Greensche Funktion im Integral wurde jeweils für q^2 nun $(k+q)^2$ eingesetzt, da hier die äußeren Impulse stehen, wobei allerdings nicht die äußeren Impulse der Interaktion gemeint sind, sondern die des Subgraphen: Beim Einsetzen eines  in eine Fermionlinie in  ist der äußere Impuls am Subgraph $(k+q)^2$.

Als Ansatz für die lineare Dyson-Schwinger-Gleichung wählen wir nun[KRE11]

$$G\left(\alpha, \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)\right) = \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)}$$

und müssen nun noch $\gamma(\alpha)$ bestimmen.

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} &= G\left(\alpha, \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)\right) = 1 + \alpha \text{Sp} \left\{ \frac{1}{q^2} \int d^4 k \frac{(\not{k} + \not{q}) \not{q}}{(k+q)^2 k^2} \left(\frac{(k+q)^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{q^2} \int d^4 k \frac{(\not{k} + \not{q}) \not{q}}{(k+q)^2 k^2} \left(\frac{(k+q)^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} \Big|_{q^2=\mu^2} \right\} \\ &= 1 + \alpha \left\{ \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} F(\gamma(\alpha)) - \underbrace{\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} \Big|_{q^2=\mu^2}}_{=1} F(\gamma(\alpha)) \right\} \end{aligned}$$

Die Dyson-Schwinger-Gleichung vereinfacht sich also zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} &= 1 + \alpha \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} F(\gamma(\alpha)) - \alpha F(\gamma(\alpha)) \\ \Leftrightarrow \left[\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} - 1 \right] &= \alpha F(\gamma(\alpha)) \left[\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\gamma(\alpha)} - 1 \right] \\ \Rightarrow F(\gamma(\alpha)) &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} F(\gamma(\alpha)) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)(1-\gamma(\alpha))} \\ \Rightarrow \gamma^2(\alpha) - \gamma(\alpha) + \alpha &= 0 \\ \Rightarrow \gamma(\alpha) &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen wurde entsprechend gewählt, da bei dem wechselwirkungsfreien Fall ($\alpha = 0$) der Exponent $\gamma(\alpha)$ verschwinden soll, da dann die Greensche Funktion die Form der identischen Abbildung hat.

7 Zusammenfassung

Ich habe nicht nur gezeigt, wie sich lineare Dyson-Schwinger-Gleichungen in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen lösen lassen, sondern habe zusätzlich einen Ausblick auf die Renormierung in der Quantenfeldtheorie gegeben. Hierbei wurde ersichtlich, dass Feynman-Graphen eine Hopf-Algebra-Struktur aufweisen und dass die Kenntnis über die Vorzüge einer Hopf-Algebra, insbesondere die Antipode, das Rechnen mit Feynman-Graphen stark erleichtern können.

Weiterhin habe ich das Shuffle-Produkt untersucht und mithilfe dessen eine allgemeine Lösung für lineare kombinatorische Dyson-Schwinger-Gleichungen in der Hopf-Algebra von Wurzelbäumen angegeben. Weiterhin habe ich angedeutet, wie sich dies auf Feynman-Graphen übertragen lassen kann, und dies an einem Beispiel aus der masselosen Yukawa-Theorie erläutert, wobei das Renormierungsschema der minimalen Subtraktion angeschnitten worden ist.

Die untersuchten Dyson-Schwinger-Gleichungen sind linear, jedoch können die angewandten Verfahren auf nicht-lineare Gleichungen ausgeweitet werden.

Literatur

- [REN93] Laurie M. Brown, Editor: Renormalization - From Lorentz to Landau (and Beyond), 1993, Springer-Verlag, New York
Robert Mills: Tutorial on Infinities in QED
- [QUA08] Franz Schwabl: Quantenmechanik für Fortgeschrittene, 2008, Springer-Verlag, Heidelberg
- [QGR95] Christian Kassel: Quantum Groups, 1995, Springer-Verlag, New York
- [DSE06] Dirk Kreimer: Dyson-Schwinger-Equations: From Hopf algebras to Number Theory, 2006 American Mathematical Society, [arXiv:hep-th/0609004v2]
- [SHU00] Michael E. Hoffman: Quasi-Shuffle Products, 2000, Journal of Algebraic Combinatorics 11 (2000), 49-68, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands
- [ETU06] Dirk Kreimer: Etude for linear Dyson-Schwinger Equations, 2006, IHES/P/06/23
- [HOP05] Kurusch Ebrahimi-Fard, Dirk Kreimer: Hopf algebra approach to Feynman diagram calculations, 2005, [arXiv:hep-th/0510202v2p7]
- [VOR11] Dirk Kreimer: Kombinatorische Hopf-Algebren mit Anwendungen in der Physik, Vorlesung, Humboldt-Universität zu Berlin, SS2011
- [KER84] Theo Mayer-Kuckuk: Kernphysik, 1984, Teubner Studienbücher, Stuttgart
- [TUS08] Hans-Peter Tuschik: Analysis I, Vorlesung, Humboldt-Universität zu Berlin, WS2008/09
- [KRE11] Dirk Kreimer, persönliche Notizen und Gespräch

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Berlin, den