Das Spektrum des Dirac-Operators auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomie

Momsen Reincke

27.06.2011

Der Diracoperator D einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit hat gute Eigenschaften, die weitreichende Konsequenzen für sein Spektrum haben. Ist die zugrunde liegende Riemannsche Mannigfaltigkeit z.B. geschlossen, so ist D elliptisch und wesentlich selbstadjungiert. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass das Spektrum von D in diesem Fall nur aus reellen isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht.

Im Fall einer semi-Riemannschen Metrik gelten diese Sätze nicht mehr. So kann der Dirac-Operator einer geschlossenen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit echt komplexe und Eigenwerte unendlicher Vielfachheit haben.

Im Vortrag werden wir Lorentz-Mannigfaltigkeiten studieren, deren Holonomiegruppe einen nicht-trivialen, isotropen Unterraum invariant lässt. Solche Mannigfaltigkeiten lassen ein globales nicht-verschwindendes paralleles lichtartiges Vektorfeld zu.

Wir konstruieren bestimmte Beispielmannigfaltigkeiten, welche homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F$ oder $S^1 \times S^1 \times F$ sind, wobei (F, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Auf diesen Beispielmannigfaltigkeiten berechnen wir den Dirac-Operator, um anhand einiger Beispiele die Probleme beim Berechnen des Spektrums der entsprechenden Dirac-Operatoren zu sehen.

Dazu werden wir außerdem einige Begrifflichkeiten und Ergebnisse aus der Spektraltheorie von selbstadjungierten Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik (J-Räumen) benötigen.