Übungsblatt 14

Analysis II* SS 2016

(Ohne Abgabe)

Die Aufgaben können in den Übungen vom 19.07.-21.07. besprochen werden

Aufgabe 1
Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante Polynom p mit komplexen Koeffizienten besitzt Nullstellen. Zeigen Sie dafür die folgenden Teilbehauptungen:
(a) Die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch das Polynom definiert wird, hat höchstens endlich viele kritische Punkte gegeben durch $C = \{z | p'(z) = 0\}$.
(b) Das Komplement endlich vieler Punkte in $\mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend.
(c) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ definiert durch $\Gamma = p^{-1}(p(C))$. Dann ist das Bild der Einschränkung $p|_{\mathbb{C}\setminus\Gamma}$ offen.
(d) Weiterhin gilt: das Urbild jeder beschränkten Menge ist wieder beschränkt. Daraus folgt, dass das Bild auch abgeschlossen ist in $\mathbb{C} \setminus p(C)$.
(e) p ist surjektiv.

Aufgabe 2
Berechnen Sie

$$\int\limits_{\{(x,y)|(x-a)^2+y^2\leq r^2\}} (x^2+y^2)dxdy$$

sowie

$$\int\limits_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 1\}} x^2 dxdydz.$$

Aufgabe 3*
Beweisen Sie folgende Formel für $x, y > 0$:

$$\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Wenden Sie dafür die Transformationsformel auf folgendes Integral

$$\int\limits_{(0,\infty)\times(0,\infty)} u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}e^{-v}dudv$$

mit dem Diffeomorphismus $\Phi : (0,\infty)\times(0,1) \to (0,\infty)\times(0,\infty)$ gegeben durch $\Phi(s,t) = (s-st, st)$ an.