Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 17.05.2016)

Aufgabe 1 (2+2+6 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie: Der durch Einschränkung der Metrik auf A gegebene metrische Raum $(A, d|_A)$ ist genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist.
(b) Geben Sie zwei homöomorphe metrische Räume an, so dass der eine vollständig ist und der andere nicht.
(c) Wir betrachten den reellen Vektorraum

$$\ell^1 = \left\{ \mathbb{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

Darauf betrachten wir die beiden Normen

$$\|\mathbb{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

und

$$\|\mathbb{x}\|_\infty = \sup\{|x_k| \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Zeigen Sie: $(\ell^1, \|.\|_1)$ ist ein Banachraum, während $(\ell^1, \|.\|_\infty)$ nicht vollständig ist.
Hinweis: Die Norm-Eigenschaften sind sowohl für $\|.\|_1$ als auch $\|.\|_\infty$ vorausgesetzt.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Sei (X, d_X) ein kompakter metrischer Raum und (Y, d_Y) ein weiterer metrischer Raum. Zeigen Sie:
(i) Ist $f : X \to Y$ eine stetige und bijektive Abbildung, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig, d.h. f ist ein Homöomorphismus. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls X nicht kompakt ist.
(ii) Jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist **gleichmäßig stetig**, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt: Wenn $d_X(x, x') < \delta$ ist, dann ist $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. (Hinweis: Benutzen Sie, dass f stetig ist.)

Aufgabe 3 (3+5+2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.
(i) Zeigen Sie: Ist (X, d) zusammenhängend, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu beliebigen Punkten $p, q \in X$ endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n$ gibt, sodass $x_1 = p$, $x_n = q$ und $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ für alle $i = 1, ..., n-1$. Die Menge dieser Punkte nennen wir ε–Kette von p nach q.
Hinweis: Sei irgend ein Punkt $x \in X$ gegeben. Betrachten Sie die Menge aller Punkte in X, zu denen es eine ε–Kette von x gibt.
(ii) Zeigen Sie: Ist (X, d) kompakt, so gilt in (i) auch die Umkehrung.
(iii) Geben Sie ein Beispiel eines nicht kompakten metrischen Raumes an, für den die Umkehrung von (i) nicht gilt.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 10.05-12.05 besprochen werden:

Aufgabe Ü1

Sei $C^1([a,b])$ die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$.
(i) Begründen Sie, dass der Raum $(C^1([a,b]), ||\cdot||_\infty)$, mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ nicht vollständig ist.
(ii) Sei auf $C^1([a,b])$ nun die Norm $||\cdot||_{C^1}$ definiert durch

$$||f||_{C^1} := ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

Zeigen Sie, dass der Raum $(C^1([a,b]), ||\cdot||_{C^1})$ vollständig ist.

Aufgabe Ü2

(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, das für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ der metrische Raum $(K, d|_{K\times K})$ vollständig ist.
(ii) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen wieder kompakt ist.

Aufgabe Ü3

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Behauptungen:
(i) $A \subset X$ zusammenhängend und $B \subset X$ so, dass $A \subset B \subset \bar{A}$ gilt. Dann ist auch B zusammenhängend.
(ii) Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie zusammenhängender Mengen. Ist $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, so ist die Menge

$$A := \bigcup_{i\in I} A_i$$

zusammenhängend.
(iii) Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine größte zusammenhängende Menge Z, die x enthält, d.h. jede zusammenhängende Menge M, die x enthält ist Teilmenge von Z. Diese Mengen bilden die **Zusammenhangskomponenten** von X. Zeigen Sie, dass diese Zusammenhangskomponenten immer abgeschlossen sind. Sind sie auch immer offen? Prüfen Sie das anhand von Beispielen.

Aufgabe Ü4

Sei (X,d) ein metrischer Raum. X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ gibt, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. γ wird auch **Weg von** x **nach** y genannt. Zeigen Sie:
(i) Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.
(ii) Jede zusammenhängende offene Menge U in $\mathbb{R}^n$, die mit der euklidischen Metrik versehen ist, ist wegzusammenhängend.
Hinweis: Sei irgend ein Punkt $x \in U$ gegeben. Betrachten Sie die Menge aller Punkte in U zu denen es einen stetigen Weg von x aus gibt.
Bemerkung: Es gibt zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die nicht wegzusammenhängend sind (siehe https://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Topologie:_Zusammenhang).