Übungsblatt 7

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 07.06.2016)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
(i) Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 0, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f_n ist Riemann-integrierbar für jedes n und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0, jedoch ist $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.
(ii) Beweisen Sie: Ist $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ eine monotone Funktion.
(i) Zeigen Sie: Für jedes $x \in (a,b)$ existieren der links- und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x'\to x^-} f(x)$ bzw. $\lim_{x'\to x^+} f(x)$.
(ii) Beweisen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von f abzählbar ist. Was folgt für die Riemann-Integrierbarkeit von f?

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)
(i) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ beschränkt mit $f(x) \geq 0$ für alle x. Zeigen Sie: f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Teilmenge

$$F_f := \{(x,t) : x \in [a,b], t \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$$

Jordan-messbar ist und in diesem Fall gilt $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{vol}(F_f)$.

(ii) Skizzieren Sie die Teilmenge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{\pi^2}x^2 \leq y \leq \sin x\} \subset \mathbb{R}^2,$$

zeigen Sie, dass sie Jordan-messbar ist und berechnen Sie $\mathrm{vol}(M)$.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 31.05-02.06 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Es bezeichne $\mathcal{R}[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist Riemann-inegrierbar}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildung $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ definiert eine Norm auf $\mathcal{R}[0,1]$ und
b) Die Abbildung $\mathcal{R}[0,1] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ ist stetig bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Aufgabe Ü2 Es seien $f, g : [0,1] \to [0,1]$ gegeben, wo f Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie:
(a) Falls g stetig ist, dann ist die Komposition $g \circ f$ Riemann-integrierbar und
(b) Falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $|x - x'| \leq C|g(x) - g(x')|$ gilt für alle $x, x' \in [0,1]$, dann ist $f \circ g$ Riemann-integrierbar.

Aufgabe Ü3 Zeigen Sie: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, dann ist auch $A \setminus B$ Jordan-messbar. Falls zusätzlich $B \subset A$ gilt, dann ist $\mathrm{vol}(A \setminus B) = \mathrm{vol}(A) - \mathrm{vol}(B)$.

Aufgabe Ü4 Zeigen Sie, dass die Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar ist und berechnen Sie ihr Volumen, auch Fläche genannt.
Hinweis: Sie können das Ergebnis von Aufgabe 3(i) als bekannt voraussetzen. Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass für $x \in (-1,1)$ gilt:

$$\sqrt{1-x^2} = \left(\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)'.$$