Übungsblatt 8

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 14.06.2016)

Aufgabe 1 (1+2+3+4 Punkte)

(i) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale. Geben Sie dazu einen nachvollziehbaren Lösungsweg an.

- $\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx$
- $\int \cosh(e^x)e^{2x}dx$
- $\int \frac{4x-2}{x^2+3x+3}dx$

(ii) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die Folge reeller Zahlen $(I_n)_{n=0}^{\infty}$

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Begründen Sie, warum dies eine monoton fallende Folge ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ und leiten Sie daraus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ und damit einen Ausdruck für π her.

Aufgabe 2 (2+2+2+4 Punkte)

(i) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Geben Sie das Ergebnis in einer geeigneten Form an. Führen Sie einen nachvollziehbaren Lösungsweg an.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sinh x \cos x}{1+x^2}dx$
- $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ mithilfe der Potenzreihe des Integranden
- $\int_1^2 \frac{x-27}{x^3-2x^2-3x}dx$

(ii) Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)|dx \geq \frac{1}{e}.$$

Hinweis: Der Ansatz $f(x) = e^x g(x)$ ist hier hilfreich.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Sei $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Sei $T_n(f, x_0)$ das n-te Taylorpolynom von f der Tayorentwicklung von f in x_0. Zeigen Sie, dass dann für das n-te Restglied

$$R_n(f, x_0)(x) := f(x) - T_n(f, x_0)(x)$$

die folgende Integraldarstellung gilt:

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 07.06.-09.06. besprochen werden:

Aufgabe Ü1 (i) Bestimmen Sie einen Ausdruck für Integrale der Form

$$I_n = \int x^n \log x dx.$$

(ii) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für

$$J_n = \int x^n e^{-x} dx.$$

Aufgabe Ü2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$
- $\int \frac{\log(x^2)}{x^2} dx$
- $\int \cos\left(e^{\sin x}\right) e^{\sin x} \cos x dx$
- $\int \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+6x+12} dx$

Aufgabe Ü3 (i) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

- $\int_0^1 \frac{x^2-6x-7}{(x-2)^2(x^2+1)} dx$
- $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$ mit Hilfe der Potenzreihe für cos.

(ii) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$

existiert und berechnen Sie es für diese Fälle.

Aufgabe Ü4 Wiederholen Sie ihre Kenntnisse über die Taylor-Entwicklung einer n-mal differenzierbaren Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in I$.