Übungsblatt 3

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 3 (3+7 Punkte)
(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstant. Zeigen Sie: Jede Lösung $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von $x'(t) = Ax(t)$ hat genau dann konstante Norm, wenn A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A = -A^T$.

(ii) Gesucht ist die allgemeine zweimal differenzierbare Lösung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(t) = 2f(t) + 2tf'(t). \tag{1}$$

Dabei nutze man, dass man eine Lösung direkt erraten kann, nämlich $g(t) = e^{t^2}$ und für jede weitere Lösung f die sogenannte Wronski-Determinante $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} g(t) & f(t) \\ g'(t) & f'(t) \end{pmatrix}$$

bis auf konstanten Faktor bestimmt werden kann.

Lösung

(i) x hat genau dann konstante Norm, wenn gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}||x(t)||^2 &= \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle \\ &= \langle x'(t), x(t)\rangle + \langle x(t), x'(t)\rangle \\ &= \langle Ax(t), x(t)\rangle + \langle x(t), Ax(t)\rangle \\ &= \langle Ax(t), x(t)\rangle + \langle A^T x(t), x(t)\rangle \\ &= \langle (A + A^T)x(t), x(t)\rangle. \end{aligned}$$

Also hat x genau dann konstante Norm, wenn $A + A^T = 0$, d.h. wenn A schiefsymmetrisch ist.

(ii) (1) ist eine DGL 2. Ordnung und lässt sich sich umformen in eine DGL 1. Ordnung im $\mathbb{R}^2$. Diese hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2t \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Gesucht ist ein Fundamentalsystem aus Lösungen von (1), wobei offensichtlich $g(t) = e^{t^2}$ eine Lösung ist. Sei f eine zweite von g linear unabhängige Lösung. Dann hat die Wronski-Determinante nach dem Satz von Liouville die Form

$$w(t) = Ce^{\int trA(t)dt} = Ce^{\int 2tdt} = e^{t^2}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Mit $g(t) = e^{t^2}$ gilt aber auch:

$$Ce^{t^2} = w(t) = \det \begin{pmatrix} e^{t^2} & f(t) \\ 2te^{t^2} & f'(t) \end{pmatrix} = e^{t^2} f'(t) - 2te^{t^2} f(t).$$

Umgeformt ergibt sich die inhomogene lineare DGL

$$f'(t) = C + 2tf(t). \tag{3}$$

f bildet also genau dann ein Fundamentalsystem mit g zur DGL (1), wenn f (3) löst. Es bleibt also nur noch eine Lösung für (3) zu finden.
Eine Lösung f_h der zugehörigen homogenen linearen DGL ist gegeben durch $f_h(t) = Ke^{t^2}$ mit $K \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL kann man mittels Variation der Konstanten finden: Sei $f(t) = K(t)e^{t^2}$. $K(t)$ hat dann die Form

$$K(t) = \int Ce^{-\int 2tdt}dt = C\int e^{-t^2}dt.$$

Also ist die allgemeine Lösung f von (3) gegeben durch

$$f(t) = Ce^{t^2}\int e^{-t^2}dt.$$

g und f bilden dann ein Fundamentalsystem zu (1) und alle Lösungen von (1) sind Linearkombinationen von f und g.