Lösung Blatt 1 Aufgabe 3

Zum besseren Verständnis werden die zur y-Achse parallelen Geraden nicht bei ihrem Namen "Gerade" genannt, sondern nur mit

$$G_c := \{ (c,y) \mid y \in \mathbb{R} \} \qquad c \in \mathbb{R}$$

bezeichnet und aus Gründen der Fairness die Parabeln auch nur

$$P_{a,b} := \{ (x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Jetzt geht es evtl. leichter von den Lippen:

- Die Menge der Punkte ist gleich $\mathbb{R}^2$
- Die Menge der Geraden ist gegeben durch die Vereinigung

$$\{ G_c \mid c \in \mathbb{R} \} \cup \{ P_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Inzidenz

a) Seien <u>zwei</u> Punkte (x_1,y_1) & (x_2,y_2) gegeben.
Ist $x_1 = x_2$ (& damit $y_1 \neq y_2$) so gibt es kein Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1,y_1) \in P_{a,b}$ <u>&</u> $(x_2,y_2) \in P_{a,b}$

($P_{a,b}$ ist der Graph einer Funktion!) und es gibt genau ein $c \in \mathbb{R}$, nämlich $c = x_1 (= x_2)$ mit $(x_1,y_1) \in G_c$ & $(x_2,y_2) \in G_c$.
Ist hingegen $x_1 \neq x_2$ so gibt es kein $c \in \mathbb{R}$ mit $(x_1,y_1) \in G_c$ & $(x_2,y_2) \in G_c$ aber genau ein Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ so dass $(x_1,y_1) \in P_{a,b}$ & $(x_2,y_2) \in P_{a,b}$
nämlich: $(x_1,y_1) \in P_{a,b} \Rightarrow$

$$y_1 = (x_1 - a)^2 + b$$
$$= x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + b$$
$$\& \quad y_2 = x_2^2 - 2ax_2 + a^2 + b$$

Subtrahiere Gleichungen $\Rightarrow$

$$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 - 2a(x_2 - x_1).$$

n.V. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 \neq 0$ also

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Einsetzen in erste Gleichung ergibt

$$b = y_1 - \left(x_1 + \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

(Hier kann man aufhören)

$$b = y_1 - \frac{1}{4}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - (x_2 - x_1)\right)^2$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{4}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2}$$

(Dem Ausdruck sieht man die Symmetrie in $(x_1, y_1) \leftrightarrow (x_2, y_2)$ besser an, finde ich)

e) • $(c, 1) \neq (c, -1)$ & $(c, 1), (c, -1) \in G_c$
• $(0, a^2 + b) \neq (1, (a-1)^2 + b)$ & beide liegen auf $P_{a,b}$
• $(-1, 0), (0, 0)$ & $(1, 0)$ verschieden & liegen weder auf einer der Teilmengen G_c noch auf einer $P_{a,b}$

f) Müssen festlegen, was für eine Teilmenge die Strecke PQ sein soll. $P=(x_1,y_1)\neq Q=(x_2,y_2)$.

<u>1. Fall:</u> $x_1=x_2=c$. Dann ist

$$PQ=\{(y,c)\mid y\in[\min(y_1,y_2),\max(y_1,y_2)]\}$$

<u>2. Fall</u> $x_1\neq x_2$. Dann ist (mit a,b wie unter (a) gegeben)

$$PQ=\{(x,(x-a)^2+b)\mid x\in[\min(x_1,x_2),\max(x_2,x_1)]\}$$

Da $\min(y_1,y_2)$, $\max(y_1,y_2)$, $\min(x_1,x_2)$, $\max(x_1,x_2)$ und $a=a(x_1,x_2,y_1,y_2)$ sowie $b=b(x_1,x_2,y_1,y_2)$ unverändert unter Vertauschung $(x_1,y_1)\leftrightarrow(x_2,y_2)$ bleiben, gilt

$$PQ=QP$$

(g) Sei $R=(x_3,y_3)\notin\{P;Q\}$ aber auf der Geraden g durch P & Q.

<u>1. Fall:</u> $g=G_c$ für ein $c\in\mathbb{R}$ $(x_1=x_2=x_3)$.

Dann ist für eine Permutation $\sigma:\{1;2;3\}\to\{1;2;3\}$

$$y_{\sigma(1)}<y_{\sigma(2)}<y_{\sigma(3)} \quad \text{(da verschieden n.V.)}$$

$$\left.\begin{array}{lll}\sigma(2)=1 & \Rightarrow & P\in QR\\ \sigma(2)=2 & \Rightarrow & Q\in PR\\ \sigma(2)=3 & \Rightarrow & R\in PQ\end{array}\right\}\ \star$$

<u>2. Fall:</u> $g = P_{a,b}$ für ein $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Da $P_{a,b}$ Graph einer Funktion bzw. wegen (a) x_1, x_2, x_3 verschieden. Dann gibt es σ wie im 1. Fall mit

$$x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(3)}$$

und es gilt wieder ☆.

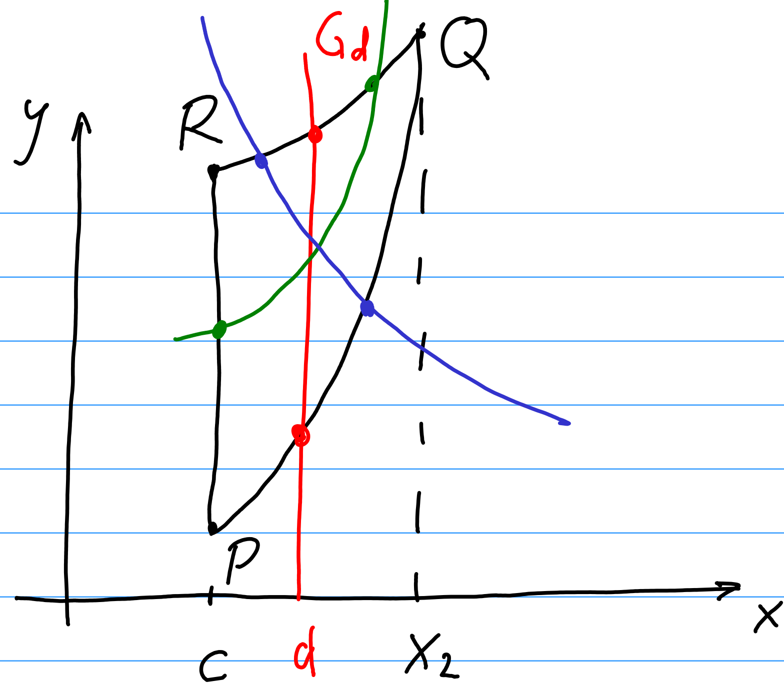
Für gegebene Permutation kann also nur genau einer der drei Fälle in ☆ auftreten ⇒ Beh. (g)

(h) P, Q wie oben.
<u>1. Fall:</u> $P, Q \in G_c$ für ein $c \in \mathbb{R}$

Wähle $y_3 > \max(y_1, y_2)$

$\Rightarrow R := (c, y_3) \in G_c$ & $Q \in PR$ (wegen ☆)

(i) Pasch-Axiom: Sei ein Dreieck $\Delta(P,Q,R)$ gegeben P, Q, R wie in (g).
Da für $c_1 \neq c_2$ $G_{c_1} \cap G_{c_2} = \emptyset$ kann höchstens eine der drei Seiten eines Dreiecks durch eine Strecke auf G_c für ein $c \in \mathbb{R}$ gebildet werden.
<u>1. Fall:</u> (Genau) eine Seite des Dreiecks sei eine Strecke auf G_c, $c \in \mathbb{R}$. o.B.d.A. sei dies die Strecke RP. Seien $P = (c, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $R = (c, y_3)$ o.B.d.A. sei $x_2 > c$. Schneidet ein G_d nun PQ oder RQ, so gilt $c < d < x_2$ & G_d schneidet auch RQ bzw. PQ



Es bleibt, Paschs Axiom für P_{ab} & beliebige $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ zu prüfen.

! Die $P_{a,b}$ sind für beliebige (a,b) Graphen von Funktionen $p_{a,b}(x) = (x-a)^2+b$ auf ganz $\mathbb{R}$. Nur diese Eigenschaft wird im Folgenden benötigt!

Bezeichne nun $p_1(x), p_2(x)$ die Funktionen, die PQ und RQ beschreiben: $PQ = \{(x, p_1(x)) \mid x \in [c, x_2]\}$ und $QR = \{(x, p_2(x)) \mid x \in [c, x_2]\}$.

Schneide nun $P_{a,b}$ die Seite PR. Dann ist

$$p_1(c) < p_{a,b}(c) < p_2(c).$$

Schneidet $P_{a,b}$ die Seite PQ nicht, so muss wegen des Zwischenwertsatzes

$p_2(c) = p_1(c) < p_{a,b}(x_2)$

sein. Denselben Zwischenwertsatz wegen schneidet $P_{a,b}$ dann QR. Analog folgt: $P_{a,b} \cap QR = \emptyset \Rightarrow P_{a,b} \cap PQ \neq \emptyset$.

Schneide $P_{a,b}$ die Seite PR nicht. Dann ist entweder

$p_1(c) < p_2(c) < p_{a,b}(c)$ oder $p_{a,b}(c) < p_1(c)$

Sei $p_2(c) < p_{a,b}(c)$. Angenommen $P_{a,b}$ schneidet QR. Da sich die Geraden wie in (a) gezeigt höchstens einmal schneiden, ist

$$p_{a,b}(x) < p_2(x) \quad \text{für} \quad x > x_0$$

wobei $(x_0, p_2(x_0)) = (x_0, p_{a,b}(x_0))$ der Schnittpunkt $QR \cap P_{a,b}$ sei. Insbesondere, da $(x_0, p_2(x_0)) \in QR$ und folglich $x_0 \in [c, x_2)$, ist

$$p_{a,b}(x_2) < p_2(x_2) = p_1(x_2)$$

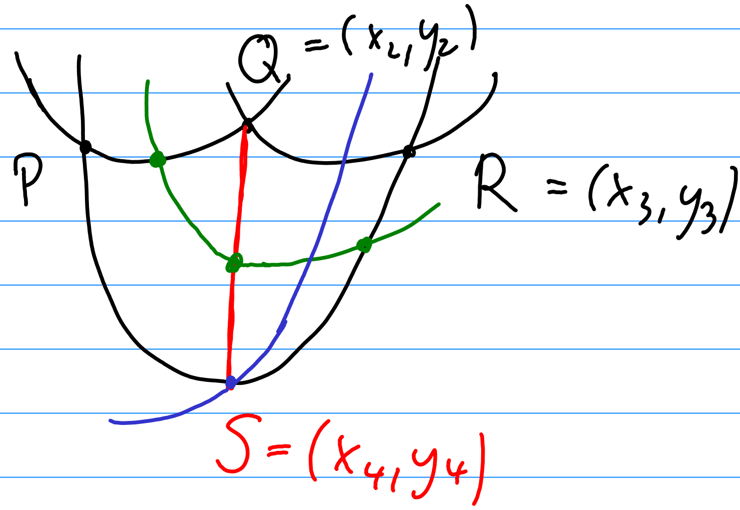
Nach Zwischenwertsatz folgt dann, dass $P_{a,b}$ auch PQ schneidet. Derselbe Argument liefert Pasch, falls $P_{a,b}$ PQ schneidet und auch falls $p_{a,b}(c) < p_1(c)$.

2. Fall: Die drei Seiten werden durch Parabeln geliefert. Die x-Koordinaten von P, Q, R sind dann alle verschieden. Sei o.B.d.A.

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Die Seite $PR = \{ (x, p_3(x)) \mid x \in [x_1, x_3] \}$, wobei $p_3(x)$ das zur Parabel von PR gehörende quadratische Polynom ist.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{G_{x_2} \cap PR}_{} \neq \emptyset$$
$$= \{(x_2, p_3(x_2))\}. \qquad S := (x_2, p_3(x_2)).$$



$$p_1(x_2) = p_2(x_2) = y_2$$
$$> p_3(x_2)$$

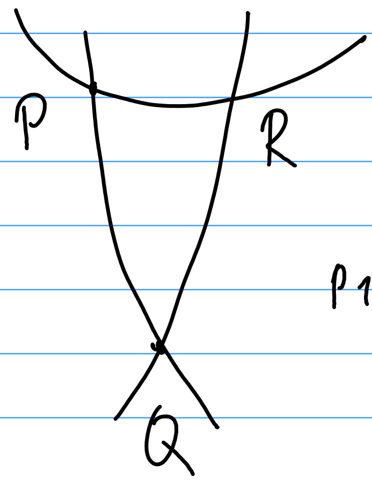
Schneidet nun eine Gerade PQ, so schneidet sie wegen dem 1. Fall PS oder QS. $PS \subset PR$ dann schneidet sie PR oder QS. Schneidet sie QS so schneidet sie wegen 1. Fall QR oder $RS \subset PR$ also QR oder PR. Analog, falls sie QR schneidet, PS schneidet oder RS schneidet. Letzter verbleibender Fall: die Gerade schneidet PR genau in S. Wegen der Voraussetzung bei Pasch (Gerade enthält nicht P, Q oder R), kann diese nicht G_{x_1} sein, muss also durch Graph eines Polynoms $p_4(x)$ gegeben sein. Da sich nach (a) alle Geraden nur einmal schneiden gilt

$$p_4(x) > p_3(x) \quad \text{für } x > x_4 \text{ oder für } x < x_4$$

Also $p_4(x_3) > y_3 = p_2(x_3)$ (p_2 beschreibt QR)
oder $p_4(x_2) > y_2 = p_1(x_2)$ (p_1 beschreibt PQ).
Andererseits $p_4(x_4) = y_4 < p_2(x_4)$

Zwischenwertsatz liefert wieder, dass die Gerade QR schneidet.

Analog geht



$$p_1(x_2) = p_2(x_2) = y_2 < p_3(x_2)$$

(iv) Parallelenaxiom.

Man sieht oder rechnet einfach nach

$P_{a,b}$ ist nicht parallel zu G_c
G_c ist parallel zu $G_{c'}$ für alle $c, c' \in \mathbb{R}$
$P_{a,b}$ ist nicht parallel zu $P_{a',b'}$, falls $a \neq a'$
$P_{a,b}$ ist parallel zu $P_{a,b'}$ für alle $b, b' \in \mathbb{R}$.

G_c : Sei $P = (x_0, y_0) \notin G_c \Rightarrow x_0 \neq c \Rightarrow P \in G_{x_0} \neq G_c$
und x_0 & damit G_{x_0} eindeutig durch P bestimmt

$P_{a,b}$: Sei $P = (x_0, y_0) \notin P_{a,b}$. Dann ist

$$P \in P_{a,\, y_0 - (x_0 - a)^2} \neq P_{a,b}$$

wieder eindeutig bestimmt.

<u>Bemerkung</u>: Die hier beschriebene "Welt" (Geometrie) ist die uns vertraute Euklidische Welt; sie wird durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y+x^2)$$

"verzerrt" (wie durch eine "Lupe"). Die "echten" Geraden im $\mathbb{R}^2$ werden dabei entweder auf ein G_c oder auf ein $P_{a,b}$ abgebildet, nämlich

$$\{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = G_c \longrightarrow \{(c, y+c^2) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = G_c$$

$$\{(x, ax+b) \mid x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \{(x, x^2+ax+b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x, (x+\tfrac{a}{2})^2 + (b-\tfrac{a^2}{4})) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= P_{-\frac{a}{2},\, b-\frac{a^2}{4}}$$