Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Elementargeometrie SS 2011

Abgabe: 27.4.2011

Aufgabe 1
(i) Begründen Sie: Durch je zwei Punkte einer gegebenen Ebene im Raum gibt es genau eine Gerade, auf der die Punkte liegen.
(ii) Falten Sie ein Blatt Papier. Überprüfen Sie mit einem Lineal (siehe Rückseite dieses Blattes), dass der Falz eine Gerade ist. Warum ist das so?
(iii) Wie kann man durch Falten eines Blattes einen rechten Winkel erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2
Sei P ein Punkt in einer Ebene, e ein Strahl in P, e' der von e verschiedene Strahl, der auf derselben Geraden g wie e liegt. Wir definieren die folgende Operation auf der Menge der Strahlen (in P, was wir in Folge stillschweigend voraussetzen). Seien h und k von e und e' verschiedene Strahlen. Wir tragen den Winkel $\angle(e,k)$ an h in der folgenden Weise ab: Liegen h und k auf derselben Seite von g, so tragen wir ihn auf die Seite von h ab, die e' enthält, liegen sie auf verschiedenen Seiten, so tragen wir ihn auf der Seite ab, die e enthält. Den Strahl, den wir dabei erhalten, bezeicnen wir mit $h \cdot k$. Wir setzen für alle Strahlen in P $e \cdot k := k$ und $h \cdot e := h$, sowie $e' \cdot k := k'$ sowie $h \cdot e' := h'$, wobei h' und k' die Strahlen bezeichne, die mit h bzw. k auf einer Geraden liegen, aber verschieden von diesen sind. Fertigen Sie für die verschiedenen Situationen, in denen Winkel abgetragen werden, Skizzen an. Zeigen Sie, dass so auf der Menge S_P der Strahlen in P, $(S_P, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Was passiert, wenn man das Ganze mit einem anderen Strahl f, anstelle von e durchführt?

Aufgabe 3
Anstelle des Raumes betrachten wir im Folgenden nur die "Ebene". Diese sei durch $\mathbb{R}^2$ gegeben, die Parabeln der Form $\{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mit beliebigen reellen Zahlen a und b sowie die zur y–Achse Parallelen Geraden, d.h. die Mengen $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, seien die Geraden.
(i) Überprüfen Sie die zweidimensionalen Grundeigenschaften (in der Vorlesung nummeriert mit (a), (b) usw.) der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene sowie der Anordnung.
(ii) Überprüfen Sie das Parallelenaxiom.

Aufgabe 4
(i) Drei Geraden schneiden sich in einem Punkt. Wieviele verschiedene Winkel können maximal dabei gebildet werden (der gestreckte Winkel zählt hier nicht als Winkel). Zwei der Winkel betragen 25^o bzw. 55^o. Wie lauten die Größen der anderen Winkel? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten.
(ii) Sei eine Gerade g mit einem auf ihr liegenden Punkt P und eine nicht auf ihr liegende Strecke gegeben. Tragen Sie auf g das Vierfache der Strecke nach einer Seite von P mithilfe des Zirkels und so wenig wie möglich Konstruktionsschritten ab. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.

Bitte wenden...

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen vom 18.4.-20.4. besprochen:

- Krummes Lineal? Markieren Sie zwei Punkte auf einem Blatt Papier. Konstruieren Sie mithilfe Ihres Lineals eine Gerade durch diese zwei Punkte. Wie können Sie mit demselben Lineal prüfen, ob es gerade ist?

- Sei O ein Punkt auf einer Geraden g. Wir definieren die folgende Operation auf Punkten von g: Sei P ein beliebiger Punkt auf g und Q ein Punkt auf g, der verschieden von O ist. Bezeichne die Seite von o auf g, die Q enthlt, mit "Q-Seite", die andere mit "Nicht-Q-Seite". Man trage an P die Strecke OQ ab und zwar wie folgt: Liegt P nicht in der Nicht-Q-Seite (beachten Sie, dass dann $P = O$ möglich ist), so trage man die Strecke auf die Seite von P ab, die keine Punkte der Nicht-Q-Seite enthält (warum gibt es genau eine solche Seite?). Liegt P hingegen in der Nicht-Q-Seite, so trage man sie auf die Seite von P ab, die die Q-Seite enthält. Den Punkt, der durch dieses Abtragen bestimmt wird, soll mit "$P + Q$" bezeichnet werden. Für $Q = O$ tue man "nichts" und setze $P+O := P$. Fertigen Sie für die verschiedenen Situationen Skizzen an (behandlen Sie dabei die Fälle $P = O$ extra. Zeigen Sie, dass $(g, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Was passiert, wenn man das Ganze mit einem anderen Punkt, O', anstelle von O durchführt?

- Anstelle des Raumes betrachten wir im Folgenden nur die "Ebene". Überprüfen Sie die zweidimensionalen Grundeigenschaften (in der Vorlesung nummeriert mit (a), (b) usw.) der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene, der Anordnung sowie das Parallelenaxiom, wenn die Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und die Kreise und Geraden, die durch die 0 gehen (der Durchschnitt dieser mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) die Geraden sind. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, benutzen.

- Zeichnen Sie zwei Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden und einen Winkel von 19^o einschließen unter Zuhilfenahme eines Winkelmessers. Zeichnen Sie einen Kreis um P, der beide Geraden je zweimal schneidet. Bestimmen Sie nun nur unter Zuhilfenahme des Zirkels einen Punkt Q auf dem Kreis, so dass die Gerade durch P und Q mit einer der beiden anderen Geraden einen Winkel von 1^o einschließt. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.