Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Elementargeometrie SS 2011

Abgabe: 25.5.2011

Aufgabe 1
Zeigen Sie: In jedem Viereck $ABCD$ bilden die Mittelpunkte, M, N, P, Q, der Seiten AB, BC, CD bzw. AD ein Parallelogramm. Sie dürfen annehmen, dass es sich um ein nicht überschlagendes Viereck handelt. Für welche Vierecke ist das Parallelogramm $MNPQ$ (a) ein Rechteck, (b) ein Rhombus, (c) ein Quadrat?

Aufgabe 2
In einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ schneide die Winkelhalbierende des Innenwinkels in A die Seite BC im Punkt D, die zur Seite AC parallele Gerade durch D schneide AB im Punkt E, die zu BC parallele Gerade durch E schneide AC im Punkt F. Zeigen Sie, dass die Strecke AE zur Strecke FC kongruent ist.

Aufgabe 3
In einem Dreieck, $\Delta(A, B, C)$ seien mit a, b und c die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB bezeichnet. Weiterhin seien die Längen der Lote (die "Höhen) von A auf die Gerade durch B und C mit h_a, von B auf die Gerade durch A und C mit h_b und von C durch die Gerade durch A und B mit h_c bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl der Seite ist, d.h.

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Aufgabe 4
(a) In einem gleichschenkligen Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit $AC \equiv BC$ sei ein Punkt D auf der Basis AB gegeben. Seien E bzw. F die Fußpunkte der Lote von D auf die Gerade durch A und C bzw. durch B und C. Sei weiterhin G der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade durch B und C. Zeigen Sie, dass

$$DE + DF \equiv AG.$$

(b) Was ändert sich an der Formel, wenn D auf der Geraden durch A und B aber außerhalb der Strecke AB liegt? Stellen Sie eine Vermutung auf uund beweisen Sie diese.
Hinweis: Es gibt eine Lösung, die nur die Sachverhalte der Vorlesung benutzt. Sollten Sie mit Flächeninhalten und Zerlegungen des Dreiecks in kleinere Dreiecke argumentieren, so müssten Sie sich Gedanken darüber machen, warum für die in Aufgabe 3 erwähnte Flächenformel gilt, dass die Summe der Flächeninhalte der kleineren Dreiecke den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks ergibt.

Bitte wenden...

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen vom 17.5.-23.5.. besprochen:

- Begründen Sie die Umkehrung des Strahlensatzes:
  (a) Seien g und h zwei Strahlen in O, die nicht auf einer Geraden liegen. Seien k und l zwei parallele Geraden, die g in A_1 bzw. A_2 und h in B_1 bzw. B_2 schneiden. Es gelte:
  $$\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|}.$$
  Dann sind k und l parallel.
  (b) In der Konfiguration in (a) gelte anstelle der dortigen die Gleichung:
  $$\frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|OA_2|}{|A_2B_2|}.$$
  Dann sind k und l parallel.

- Beweisen Sie die Umkehrung von Lemma 40 der Vorlesung: Sind für ein sich nicht überschlagendes Viereck die gegenüberliegenden Seiten kongruent, so ist dieses Dreieck ein Parallelogramm.

- In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen, d.h. der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Mittelpunkt beider beteiligten Strecken.
  Gilt umgekehrt, dass sich die Diagonalen eines Vierecks so schneiden, dass der Schnittpunkt beide beteiligten Strecken halbiert, so ist das Viereck ein Parallelogramm.