Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 8

## Elementargeometrie SS 2011

### Abgabe: 15.6.2011

**Aufgabe 1.** Sei ein Trapez $ABCD$ in einer Ebene gegeben, d.h. $AB$ ist parallel zu $CD$ und $ABCD$ ist ein sich nicht überschlagendes Viereck. Sei $S$ der Schnittpunkt der Diagonalen $AC$ und $BD$.
(i) Zeigen Sie die Gleicheit der Flächeninhalte der Dreiecke $F(A,S,D) = F(B,S,C)$.
(ii) Seien $M$ und $N$ die Schnittpunkte mit $AD$ und $BC$ der Parallelen zu $AB$ und $CD$, die durch $S$ geht. Berechnen Sie die Länge der Strecke $MN$ in Abhängigkeit der Längen $a := |AB|$ und $b := |CD|$.

**Aufgabe 2.** [Die Kreise des Apollonius]
(i) Begründen Sie, dass die Menge der Punkte, deren kartesische Koordinaten $(x, y)$ bzgl. eines Koordinatensystems die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 6x + 8y$$

erfüllen, ein Kreis ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.
(ii) Seien $m > n > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Seien zwei Punkte $P$ und $Q$ in der Ebene gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte in der Ebene, für die sich das Verhältnis der Abstände zu $P$ und $Q$ wie $m : n$ verhält, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.
Eine kleine Herausforderung (freiwillig): Versuchen Sie einmal, diesen Sachverhalt geometrisch, d.h. ohne Verwendung von Koordinaten zu beweisen. Tipp: Betrachten Sie die analytisch errechneten Werte für den Kreis und stellen Sie eine Hypothese auf. Versuchen Sie dann, diese zu beweisen.

**Aufgabe 3.**
(i) Zeigen Sie das Additionstheorem für $\cos(x + y)$. Zeigen Sie dies zunächst wieder für den Fall, dass $x, y \geq 0$ und $x + y \leq \pi$ und erweitern Sie dann auf den allgemeinen Fall, indem Sie die Eigenschaften aus Satz 7 der Vorlesung benutzen.
(ii) Beweisen Sie die Formel

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}).$$

**Aufgabe 4.**
Berechnen Sie die folgenden Werte exakt, d.h. drücken Sie die Werte aus, indem Sie nur rationale Zahlen, die Grundrechenarten und Quadratwurzeln benutzen (z.B. $\frac{1}{5}\sqrt{2+\sqrt{7}}$):

$$\sin(\frac{\pi}{2}), \cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{4}), \cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{6}), \cos(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{12}), \cos(\frac{\pi}{12}),$$

sowie

$$\tan(\frac{\pi}{4}), \tan(\frac{\pi}{3}), \tan(\frac{\pi}{6}).$$

Begünden Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden...

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen vom 6.6.-8.6. besprochen:

- Es schneide im Dreieck $\Delta(A, B, C)$ eine zu $AC$ parallele Gerade die Seiten $AB$ und $BC$ in $M$ bzw. $N$ derart, dass $AM \equiv BN$. Berechnen Sie die Länge der Strecke $MN$ in Abhängigkeit der drei Seitenlängen $a := |BC|, b := |AC|$ sowie $c := |AB|$.

- Einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Länge $a$ und $b$ sei ein Quadrat einbeschrieben, so dass es sich einen rechten Winkel mit dem Dreieck teilt und alle 4 Eckpunkte auf den Seiten des Dreiecks liegen. Wie kann man ein solches Quadrat konstruieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die Seitenlänge des Quadrates in Abhängigkeit von $a$ und $b$.

- Zeigen Sie das Additionstheorem für $\sin(x + y)$ für allgemeine Werte von $x$ und $y$ (in der Vorlesung wurde nur der Beweis für $x, y \geq 0$ und $x + y \leq \pi$ besprochen). Hinweis: Benutzen Sie die Periodizität von Sinus und Cosinus sowie die Symmetrien $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ und $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ geeignet.

- Berechnen Sie den exakten Wert von $\sin(18^o)$ (siehe Aufgabe 4). Hinweis: Die Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck mit Basiswinkel von $72^o$ trennt ein Dreieck ab, dass ähnlich zum Ausgangsdreieck ist.