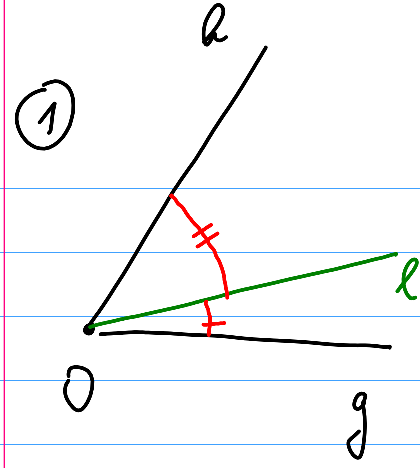
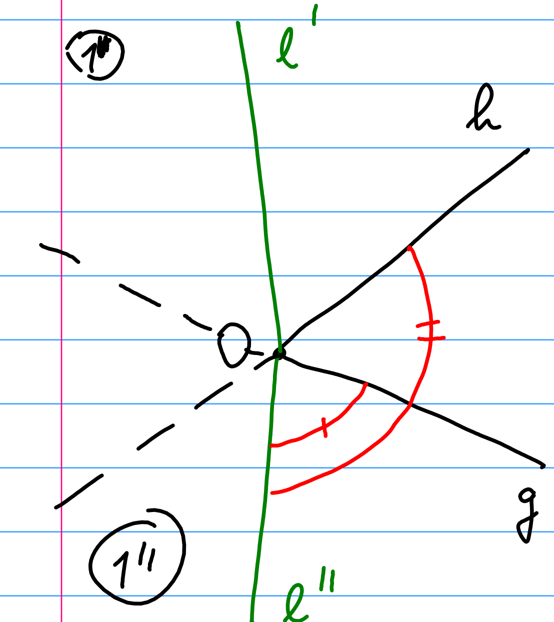


Seien die Strahlen in O bzw. O' ① $\{g; h; l\}$ bzw. $\{g'; h'; l'\}$ in <u>gleicher Konfiguration</u>.

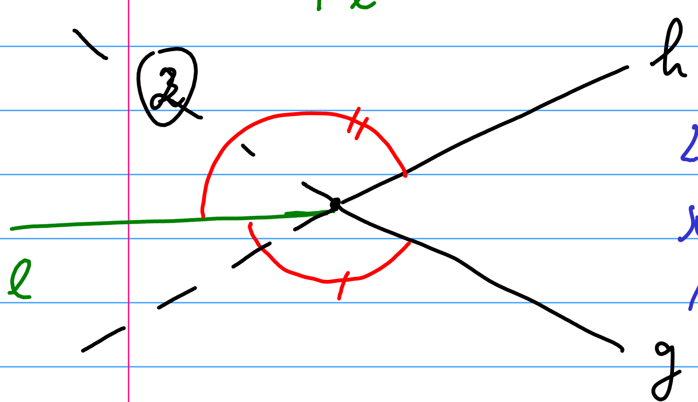
$\{l; h\}$ bzw. $\{l'; h'\}$ liegen beide auf einer oder beide auf verschiedenen Seiten von g.



Dann gilt (1:1) Sind zwei der drei Winkelpaare

$\{\sphericalangle(g,h); \sphericalangle(g',h')\}$
$\{\sphericalangle(g,l); \sphericalangle(g',l')\}$
$\{\sphericalangle(h,l); \sphericalangle(h',l')\}$

kongruent, so ist auch das dritte Paar kongruent.



2) Liegt l im Inneren von $\sphericalangle(g,h)$ so liegt l' im Innern von $\sphericalangle(g',h')$ und umgekehrt.

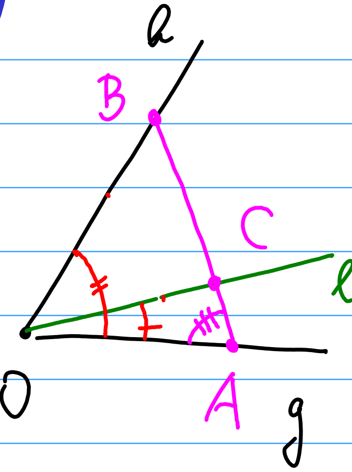
<u>Beweis:</u> Es gibt nur die Fälle ① & ② siehe Skizze.

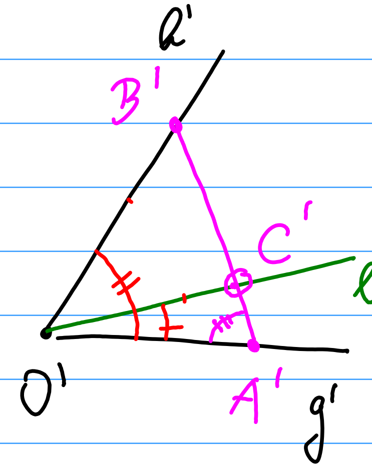
<u>1. Fall:</u>

<u>Konstruktion:</u>

$A \in g$, $A' \in g'$
$B \in h$, $B' \in h'$

(a) $OA \equiv O'A'$
(b) $OB \equiv O'B'$





Da $l \in \sphericalangle(g,h)$ schneidet l AB, sagen wir: in C (Satz 17 (2)).

(1) Sei (c) $\sphericalangle(g,h) \equiv \sphericalangle(g',h')$ & (d) $\sphericalangle(g,l) \equiv \sphericalangle(g',l')$

$\overset{SWS}{\Longrightarrow}$ $\Delta(O,A,B) \equiv \Delta(O',A',B') \Rightarrow$ (e) $AB \equiv A'B'$

(f) $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B'$

(g) $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A'$

(d) & (f) $\Rightarrow$ Strahlen l' und $\overrightarrow{A'B'}$ schneiden sich

Denn: Trage AC an A' auf $\overrightarrow{A'B'}$ ab $\rightarrow C'$

[SWS] $\Rightarrow \Delta(O,A,C) \equiv \Delta(O',A',C')$ ☆

$\Rightarrow \sphericalangle(g',l') \equiv \sphericalangle(g,l) \equiv \sphericalangle(AOC) \equiv \sphericalangle(A'O'C')$

$\Rightarrow C' \in l'$

e) & $AC \equiv A'C'$ & $C \in AB \Rightarrow C' \in A'B' \Rightarrow l' \in \sphericalangle(g,h)$

☆ $\Rightarrow \sphericalangle(OCB) \equiv \sphericalangle(O'C'B') \xrightarrow[\text{Satz 22}]{\text{Nebenwinkelsatz}}$ (h) $\sphericalangle(BCO) \equiv \sphericalangle(B'C'O')$

☆ $\Rightarrow$ (i) $OC \equiv O'C'$

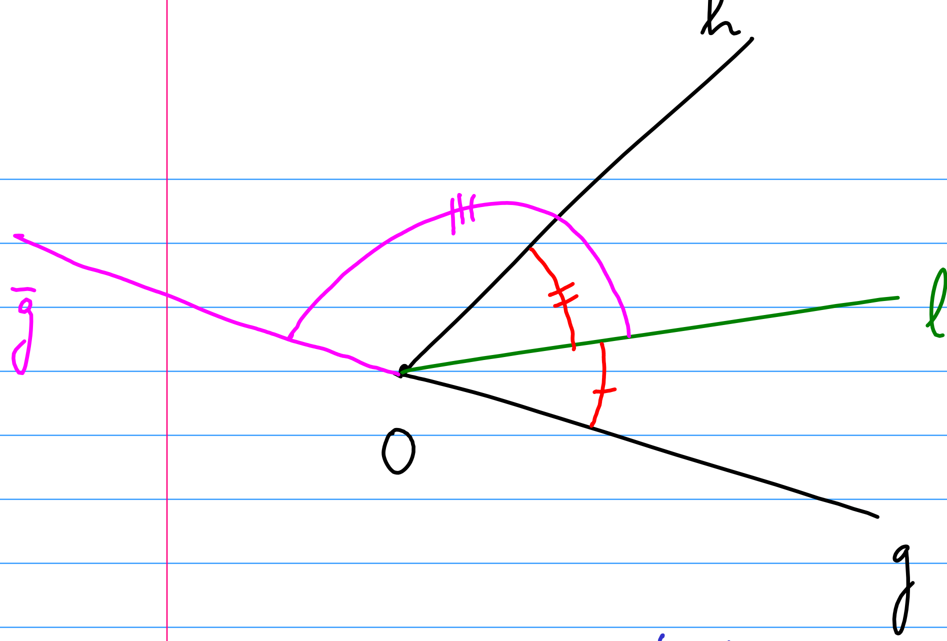
(h), (i), (b) & (g) $\overset{SsW}{\Longrightarrow} \Delta(O,C,B) \equiv \Delta(O',C',B')$

(da unbekannt, ob $OC > OB$ sind beide Winkel ermittelt) $\Rightarrow \underset{\sphericalangle(h,l)}{\underset{\|}{\sphericalangle(BOC)}} \equiv \underset{\sphericalangle(h',l')}{\underset{\|}{\sphericalangle(B'O'C')}}$

Ende (1)

2) Sei (c) $\sphericalangle(g,l) \equiv \sphericalangle(g',l')$ & d) $\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l')$

Betrachten stattdessen Tripel $\langle \bar{g}; h; l \rangle$ wobei $\bar{g}$ der



Strahl ist, der mit g eine Gerade bildet, und vergleichen dies mit $\{\bar{g}', h', l'\}$.

$\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l')$ & (c) $\sphericalangle(\bar{g},l) \equiv \sphericalangle(\bar{g}',l')$ (Nebenwinkelsatz Satz 22)

& h liegt im Innern von $\sphericalangle(\bar{g},l)$.

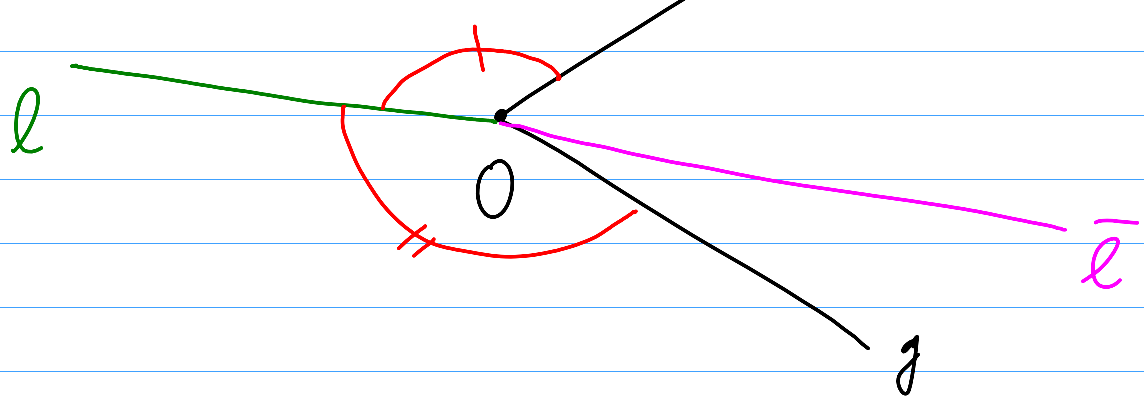
(1) $\Rightarrow$ $\sphericalangle(\bar{g},h) \equiv \sphericalangle(\bar{g}',h')$ &
h' liegt im Innern von $\sphericalangle(\bar{g}',l')$.

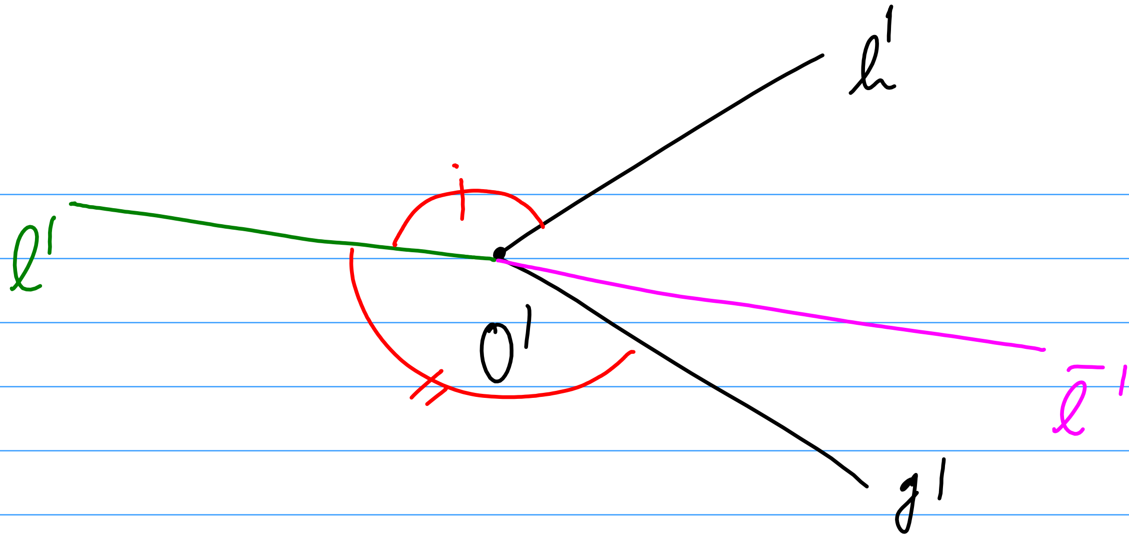
Da h' & l' auf derselben Seite von g' liegen
& $\sphericalangle(\bar{g}',l')$ der Nebenwinkel von $\sphericalangle(g',l')$ ist,

folgt: l' liegt im Innern von $\sphericalangle(g',h')$ &

$\sphericalangle(g,h) \equiv \sphericalangle(g',h')$ (Nebenwinkelsatz).

2. Fall





Die 3 verschiedenen Möglichkeiten zwei Winkelpaar auszuwählen sind äquivalent. Sei also

$$\sphericalangle(h,l) \equiv \sphericalangle(h',l') \qquad \sphericalangle(g,l) \equiv \sphericalangle(g',l')$$

Seien $\bar{l}$ & $\bar{l}'$ die entgegengesetzte Strahl auf der durch l bzw. l' bestimmten Geraden.

$\Rightarrow \bar{l} \in \sphericalangle(g,h)$ (im Innern)

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle(g,\bar{l}) \equiv \sphericalangle(g',\bar{l}') \\ \sphericalangle(h,\bar{l}) \equiv \sphericalangle(h',\bar{l}') \end{array}\right\} \text{Nebenwinkelsatz}$$

Fall 1 (2) $\Rightarrow \bar{l}' \in \sphericalangle(g',h') \Rightarrow l' \notin \sphericalangle(g',h')$

$$\sphericalangle(g',h') \equiv \sphericalangle(g,h).$$

$\square$