# Nachklausur

**zur Vorlesung Elementargeometrie**
26.09.2012

Prof. Klaus Mohnke
und Mitarbeiter

| |
|---|
| Nachname, Vorname: |
| Matrikelnummer: |

- Zum Bearbeiten der Klausur haben Sie zwei Stunden Zeit.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Nach- und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer ein.
- Ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt mit Notizen ist zugelassen.
- Sie dürfen einen Taschenrechner nutzen. Beachten Sie, dass die Verwendung von dessen Ergebnissen bei Aufgabe 2 nicht zulässig ist.
- Weitere Hilfsmittel sowie elektronische Geräte sind *nicht zugelassen*. Handys müssen ausgeschaltet sein.
- Wenn nicht anders in der Aufgabenstellung vermerkt, ist jeder Schritt und jedes Resultat zu begründen.
- Die Klausur gilt als bestanden, wenn 30 der regulären Punkte erreicht wurden. Die Punkte aus der Zusatzaufgabe können in diesem Fall die Note verbessern.

*Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur.*

---

| Aufgabe | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *Z* | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| maximale Punktezahl | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *10* | *5* | 60 |
| erreichte Punktezahl | | | | | | | | |
| Korrektor | | | | | | | | |

| Bewertung: | |
|---|---|
| Berlin, den 26.09.2012 | |

**1** (a) Formulieren Sie den Kongruenzsatz [SsW] für Dreiecke.

(b) Gegeben sei ein Winkel in einem Punkt $O$. Führen Sie nur mit einem Lineal die folgende Konstruktion der Winkelhalbierenden aus:

(1) Wählen Sie zwei verschiedene Streckenlängen (z.B. $3cm$ und $5cm$). Bestimmen Sie jeweils auf einem Schenkel die Punkte $A, B$ und $C, D$ mit $OA \equiv OC$ kongruent zur ersten und $OB \cong OD$ zur zweiten Streckenlänge.

(2) Die Strecken $AD$ und $BC$ schneiden sich in einem Punkt, der mit $E$ bezeichnet sei.

(3) Der Strahl in $O$ durch $E$ ist die Winkelhalbierende.

(c) Welches Axiom wird im Schritt (1) benutzt? Begründen Sie jeweils die Behauptungen in (2) und (3). *(10 Punkte)*

**2** (a) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC| = 1$ und $|AB| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Sei $D \in BC$ so dass $\measuredangle(DAB) \cong \measuredangle(ACB)$. Begründen Sie, dass die Dreiecke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(B, D, A)$ ähnlich sind.

(b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $CD$ und weisen Sie nach, dass $|CD| = |AD|$ ist.

(c) Berechnen Sie unter Benutzung von (a) und (b) alle Innenwinkel der beiden Dreiecke. *(10 Punkte)*

**3** Seien $P$, $Q$ bzw. $R$ Punkte auf den Seiten $AB$, $BC$ bzw. $CA$ eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$.

(a) Es seien die Geraden $G(P, Q)$ bzw. $G(P, R)$ parallel zu jeweils $G(A, C)$ bzw. $G(B, C)$. Berechnen Sie mithilfe des Strahlensatzes die Verhältnisse $|PQ| : |AC|$ und $|PR| : |BC|$ in Abhängigkeit von $|PB| : |AB| = x$.

(b) Es seien zusätzlich zu der Voraussetzung in (a) die Geraden $G(R, Q)$ und $G(A, B)$ parallel zueinander. Zeigen Sie: Die Dreiecke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(Q, R, P)$ sind ähnlich.

(c) Zeigen Sie, dass aus den Voraussetzungen der Teilaufgaben (a) und (b) folgt, dass $P$, $Q$ und $R$ die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ sind. Sie dürfen die Aussage von (b) benutzen, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben. *(10 Punkte)*

**4** (a) Wie lautet die allgemeine Gleichung, die die Koordinaten aller Punkte eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ erfüllen?

(b) Seien $m > n$ positive reelle Zahlen und $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, so dass $C \in AB$ und $|AC| = m$ und $|BC| = n$ . Beweisen Sie, dass die Menge aller Punkte $P$ der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, für die $|AP| : |BP| = m : n$ gilt, auf einem Kreis liegen. Sie können annehmen, dass die Koordinaten so gewählt sind, dass $A = (0, 0)$ der Ursprung ist.

(c) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. *(10 Punkte)*

**5** (a) Wir betrachten die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$
$$\varphi_2(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2).$$

Begründen Sie, dass beide Abbildung Isometrien sind. Um welche Art von Isometrie handelt es sich dabei?

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\varphi_2 \circ \varphi_1$ der in Aufgabenteil b) definierten Abbildungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ eine Drehung ist und bestimmen Sie den Drehwinkel. *(10 Punkte)*

**6** (a) Wir sagen, dass sich zwei voneinander verschiedene Kreise $K$ und $L$ in einem gemeinsamen Punkt $P$ berühren, wenn die Tangenten durch $P$ an $K$ und an $L$ übereinstimmen. Begründen Sie, dass dies äquivalent ist zur Bedingung, dass $P$ auf der Geraden durch die Mittelpunkte von $K$ und $L$ liegt.

(b) Sei ein Kreis $K$ mit Mittelpunkt $M$, ein Punkt $A$ auf $K$ sowie ein Punkt $B$ gegeben. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis $L$, der $A$ und $B$ enthält und tangential an $K$ ist. Begründen Sie Ihre Konstruktion. Wieviele Lösungen gibt es? *(10 Punkte)*

**7** **Zusatzaufgabe.** Sei die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) := (x^2, x^3/3 - x)$. Begründen Sie, dass $\gamma$ längenmessbar ist und berechnen Sie deren Länge. *(5 Punkte)*