Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 04.07.2012

Aufgabe 1.
(i) Es seien D, E und F die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und CA eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$. Zeigen Sie, dass ein Dreieck $\Delta(P,Q,R)$ existiert, dessen Seiten kongruent sind zu den Strecken AE, BF bzw. CD.
Hinweis: Sei S der Schnittpunkt von AE, BF und CD. Verlängern Sie AE, um einen Punkt T zu finden mit $E \in ST$ und $SE \simeq ET$. Betrachten Sie $\Delta(B,S,T)$.
(ii) Seien nun drei Strecken PQ, RS und TU gegeben. Geben Sie eine Konstruktion eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ an, so dass $AE \cong PQ$, $BF \cong RS$ und $CD \cong TU$ sind. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit (in Abhängigkeit der gegebenen Strecken).

Aufgabe 2.
(i) Es seien $P \in AB$, $Q \in BC$ bzw. $R \in CA$ die Berührungspunkte mit AB, BC bzw. CA des Inkreises des Dreiecks $\Delta(A,B,C)$. Berechnen Sie die Längen der Teilsrecken, in welche P, Q und R die Seiten des Dreiecks zerlegen, in Abhängigkeit von $|AB| = c$, $|BC| = a$ und $|CA| = b$.
(ii) Ein rechtwinkliges Dreieck heißt *Pythagoreisch*, wenn seine Seitenlängen ganze Zahlen sind. Zeigen Sie: Der Inkreisradius eines Pythagoreischen Dreiecks ist ganzzahlig.

Aufgabe 3.
Es seien ϕ_1 und ϕ_2 die folgenden linearen Abbildungen der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ in sich:

$$\phi_1\colon (x_1,x_2) \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2),$$

$$\phi_2\colon (x_1,x_2) \mapsto (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Bestimmen Sie, welche der Abbildungen Isometrien sind. In dem Fall, dass die Abbildung eine Isometrie ist, entscheiden Sie, ob sie eine Spiegelung oder eine Drehung ist und bestimmen Sie die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.

Aufgabe 4. (Schwerpunkt eines Dreiecks)
(i) Gegeben seien die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems in der Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes, d.h. des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden.
(ii) Sei S der Schwerpunkt im Dreieck $\Delta(A,B,C)$ und g eine Gerade, die S enthält und so dass A und B auf einer Seite von g liegen. Beweisen Sie: Die Summe der Abstände von A und B zu g, d.h. der Längen der Höhen von A und B auf g, ist gleich dem Abstand von C zu g. Welche Aussage gilt in dem Fall, wenn B auf g liegt?

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit vorgegebenen Längen der Hypothenuse AB und der Höhe CD ($D \in AB$ ist also der Fußpunkt des Lotes von C auf AB).

- Im Inneren eines Winkels $\angle(h, k)$ sei ein Punkt P gegeben. Konstruieren Sie einen Kreis, der tangential zu h und k ist und den Punkt P enthält.

- Es sei $n \in \mathbb{R}^2$, $\langle n, n\rangle = 1$. Zeigen Sie, dass die durch

  $$\phi : x \mapsto x - 2\langle x, n\rangle n$$

  gegebene Abbildung von $\mathbb{R}^2$ eine Isometrie ist. Zeigen Sie, dass ϕ eine Spiegelung ist an einer Geraden, die den Ursprung enthält und bestimmen Sie eine analoge Darstellung für die Spiegelung an einer beliebigen Geraden $L_{p,v} = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$, wo $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$.

- Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Isometrien sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel:

  $$\phi_1 \colon (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 - \sqrt{2}\right),$$

  $$\phi_2 \colon (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 - \sqrt{2}\right).$$

- Helfen Sie Jogi Löw: Gesucht ist ein optimaler Weg eines dribbelstarken Stürmers wie Mesut Özil. Dabei soll sich der Öffnungswinkel zum Tor zu jedem Zeitpunkt optimal vergrößern, da nicht vorhersagbar ist, wann der Spieler so attackiert wird, dass er gezwungen ist, auf das Tor zu schießen. Überlegen Sie sich zunächst wie die Mengen von Punkten aussehen, von denen aus der Winkel gleich groß ist. Özils Weg müsste nun immer senkrecht zu diesen "Isoangularen" verlaufen. Die Inversion an einem bestimmten Kreis ist hier nützlich (zusammen mit dessen Eigenschaften wie winkeltreu zu sein und Kreise und Geraden in Kreise oder Geraden zu überführen). Viel Spaß beim Lösen!!