
Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 23.04.2012

Aufgabe 1

- (i) Begründen Sie: Durch je zwei Punkte einer gegebenen Ebene im Raum gibt es genau eine Gerade, auf der die Punkte liegen.
- (ii) Falten Sie ein Blatt Papier. Überprüfen Sie mit einem Lineal (siehe Rückseite dieses Blattes), dass der Falz eine Gerade ist. Warum ist das so?
- (ii) Wie kann man durch Falten eines Blattes einen rechten Winkel erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Menge der Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 und definiere als die Geraden alle Teilmengen der Form $\{(x, (x - a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$, wo a und b beliebige reelle Zahlen sind sowie alle Teilmengen der Form $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, wo c eine beliebige reelle Zahl ist.

- (i) Überprüfen Sie die in der Vorlesung eingeführten Axiome der Inzidenz und Anordnung.
- (ii) Überprüfen Sie das Parallelenaxiom.

Aufgabe 3

Eine *Inzidenzgeometrie* besteht aus einer Menge, deren Elemente Punkte genannt werden, zusammen mit Teilmengen, genannt Geraden, welche die Axiome der Inzidenz erfüllen. Wieviele verschiedene Inzidenzgeometrien mit vier Punkten gibt es? Welche von ihnen erfüllen das Parallelenaxiom?

Aufgabe 4

Folgern Sie aus den Axiomen der Inzidenz und Anordnung, dass für zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte A und B ein dritter, von A und von B verschiedener Punkt C existiert, der $C \in \overline{AB}$ erfüllt. Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Hinweis: Benutzen Sie das Paschaxiom, um eine Gerade zu finden, welche einen gemeinsamen Punkt mit \overline{AB} hat, aber weder A noch B enthält.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 16.04.-18.04. besprochen werden:

- Krummes Lineal? Markieren Sie zwei Punkte auf einem Blatt Papier. Konstruieren Sie mithilfe Ihres Lineals eine Gerade durch diese zwei Punkte. Wie können Sie mit demselben Lineal prüfen, ob es gerade ist?
- Überprüfen Sie (unter Benutzung der Axiome der reellen Zahlen), dass die reelle Zahlenebene \mathbb{R}^2 zusammen mit der üblichen Definition von Geraden und Geradenabschnitten die Anordnungsaxiome inklusive dem Paschaxiom erfüllt.
- Überprüfen Sie die Axiome der Inzidenz, der Anordnung sowie das Parallelenaxiom, wenn die Menge der Punkte durch $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben ist und die Geraden gegeben sind durch die Durchschnitte mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von denjenigen Kreisen und Geraden in \mathbb{R}^2 , welche den Ursprung enthalten. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, benutzen.
- (Inzidenzaxiome und das Parallelenaxiom) Wir betrachten auf den Geraden einer Inzidenzgeometrie (siehe Aufgabe 3) die Relation “ l ist parallel zu m ”. Geben Sie ein Beispiel für eine Inzidenzgeometrie, so dass dies keine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass diese Relation genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn das Parallelenaxiom erfüllt ist.