Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 16.5.2012

Betrachten Sie in jeder der folgenden Aufgaben eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt wird.

Aufgabe 1
Zur Erinnerung: Die Existenz des rechten Winkels besagt unter anderem, dass man in jedem Punkt einer Geraden eine "Senkrechte errichten" kann, d.h. genau eine Gerade durch diesen Punkt finden kann, der mit der ersten Gerade 4 rechte Winkel einschließt, d.h. "senkrecht aufeinander stehen".

(a) Sei P ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt. Zeigen Sie, dass man von P das "Lot auf g fällen" kann, d.h. genau eine Gerade durch P finden kann, die g wieder so schneidet, dass beide senkrecht aufeinander stehen.

(b) Sei Q der Schnittpunkt der Lot-Geraden mit g. Zeigen Sie, das die Strecke PQ kleiner ist (im Sinne der Streckenkongruenz) als jede Strecke PR, wobei $R \in g$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden ist, der nicht mit Q übereinstimmt.

Aufgabe 2
Sei $\angle(AOB)$ ein Winkel und P ein beliebiger Punkt im Inneren von $\angle(AOB)$. Wir bezeichnen mit A' bzw. B' den Schnittpunkt der Lot-Gerade durch P mit der Gerade $G(O, A)$ bzw. $G(O, B)$. Zeigen Sie: P liegt auf der Winkelhalbierenden genau dann, wenn die Strecken PA' und PB' kongruent sind.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ schneiden sich in einem Punkt. Hinweis: Zeigen Sie dafür, dass die Winkelhalbierenden sich paarweise schneiden. Die in Aufgabe 2 gezeigte Aussage ist hier hilfreich.

Aufgabe 4
Beweisen Sie den Kongruenzsatz [WWS], der besagt dass zwei Dreiecke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ kongruent sind, wenn folgendes gilt: Die Winkel $\angle(C, A, B) \cong \angle(C', A', B')$ sowie die Winkel $\angle(A, B, C) \cong \angle(A', B', C')$ sind kongruent und die Strecken $BC \cong B'C'$ sind kongruent.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Sei g die Mittelsenkrechte einer Strecke AB und $P \notin AB$ ein beliebiger Punkt. Zeigen Sie: $P \in g$ gilt genau dann wenn die Strecken $AP \cong BP$ kongruent sind.
- Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich entweder in einem Punkt oder sind paarweise parallel zueinander. Beweisen Sie, dass aus der Gültigkeit des Parallelenaxioms der erste Fall folgt. Geben Sie ein Beispiel für den zweiten Fall in Lobachevskys oberer Halbebene an. Dreiecke sind dabei, wie in der Vorlesung, nicht entartet, d.h. die Eckpunkte sind verschieden und liegen nicht auf einer Geraden.
- Begründen Sie, dass die Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks kongruent zueinander sind.
- Zeigen Sie, dass für drei Punkte A, B, C die Dreiecksungleichung $AC \leq AB + BC$ gilt.