Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 23.5.2012

Aufgabe 1
(1) Betrachten wir $z, w \in k_{m,r}$ und die euklidischen Strahlen in $(m+r)$ durch z bzw. w. Deren Schnittpunkte mit h_c für ein festes c seien mit z' bzw. w' bezeichnet (siehe Skizze aus der Vorlesung). Zeigen Sie, dass dann für die Doppelverhältnisse (siehe Rückseite) gilt: $\Delta(z, w) = \Delta(z', w')$.
(2) Zeigen Sie, dass für die Streckenkongruenz in der Lobachevsky-Ebene (siehe ebenfalls die Rückseite) das Axiom (K2) erfüllt ist.

Aufgabe 2
Wir betrachten eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz (für Strecken und Winkel) gelten. Beweisen Sie, dass umseitig beschriebene Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke AB allgemein durchführbar ist und tatsächlich auf den Mittelpunkt führt.

Aufgabe 3
(a) Zeigen Sie: Das hyperbolische Axiom (H) und das Parallelenaxiom schließen sich gegenseitig aus. Beachten Sie dabei, dass aus der Tatsache, dass ein Strahl eine gegebene Gerade nicht schneidet, nicht unbedingt und ohne Weiteres folgt, dass die Gerade, auf der er liegt, parallel zur gegebenen Gerade ist.
(b) Beweisen Sie (H) für die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in dem Spezialfall, dass g ein "Halbkreis" ist.

Aufgabe 4 [Satz des Thales]
Seien alle Axiome I,A,K sowie das Parallelenaxiom erfüllt. Beweisen Sie: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse (der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite) kongruent zur halben Hypotenuse. Zeigen Sie, dass umgekehrt für ein Dreieck für dessen eine Seitenhalbierende diese Beziehung gilt, der zugehörige Innenwinkel ein rechter Winkel ist. Die Seitenhalbierende ist die Strecke zwischen Eckpunkt und Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Zur Erinnerung: Zwei Dreiecke heissen kongruent, wenn ihre drei Seiten und Winkel jeweils kongruent sind. In einem Dreieck bezeichnet man als Höhe das Lot eines Eckpunktes auf die gegenüberliegende Seite, und als Seitenhalbierende die Gerade durch einen Eckpunkt sowie den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.
  Betrachten Sie in einem Dreieck die Stecke auf jeder der drei Höhen und der drei Seitenhalbierenden, die im Inneren liegt. Zeigen Sie, dass für zwei kongruente Dreiecke diese sechs Strecken auch jeweils kongruent sind. Zeigen Sie, dass die drei Winkelhalbierenden in zwei kongruenten Dreiecken auch jeweils kongruent sind.

- Sei AB eine Strecke. Man kann zeigen, dass sich der Mittelpunkt M wie folgt konstruieren lässt: Sei C ein Punkt, der nicht auf der Geraden $g := G(A, B)$ liegt. Zeichnen Sie die Strecke AC und den Strahl durch B zur anderen Seite von g, der mit der Strecke BA den Winkel $\angle(CAB)$ bildet. Sei D derjenige Punkt auf diesem Strahl, für den $AC \cong BD$ gilt. Dann schneidet die Gerade $G(C, D)$ die Gerade g in M.
  Skizzieren Sie diese Konstruktion in $\mathbb{R}^2$ sowie im Lobachevsky-Modell $\mathbb{H}$ der oberen Halbebene. Sie dürfen dabei Winkelmesser, Lineal und Zirkel verwenden.

- Betrachten Sie folgendes "hyperbolische" Axiom (H): Für jede Gerade g und jeden Punkt A, der nicht auf g liegt, gibt es zwei von A ausgehende Strahlen h und k, die nicht auf einer Geraden liegen und g nicht schneiden, und für die folgendes gilt: Jeder von A ausgehende Strahl l im Inneren von $\angle(h, k)$ schneidet g.
  Beweisen Sie (H) für die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in dem Spezialfall, dass g eine "senkrechte Halbgerade" ist.

- Für zwei Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ ist das Doppelverhältnis definiert als $\Delta(z, w) := \frac{\beta-z}{\beta-w}\frac{\alpha-w}{\alpha-z}$ falls $z, w \in k_{m,r}$ wobei $\alpha := m-r$, $\beta := m+r$ und $\mathrm{Re}z < \mathrm{Re}w$ bzw. $\Delta(z, w) := \frac{c-w}{c-z}$, falls $z, w \in h_c$ und $\mathrm{Im}z < \mathrm{Im}w$. Die Punkte z, w werden dabei als komplexe Zahlen aufgefasst, da $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$. Für den Fall, dass die umgekehrten Ungleichungen gelten, setzen wir $\Delta(z, w) := \Delta(w, z)$, sowie $\Delta(z, z) := 1$. Beweisen Sie, dass $\Delta(z, w)$ reell ist und $\Delta(z, w) > 1$ für $z \neq w$.

- Zwei Strecken, PQ und RS in der Lobachevsky-Ebene sind kongruent genau dann, wenn $\Delta(P, Q) = \Delta(R, S)$ (P, Q, R, S wieder als komplexe Zahlen aufgefasst). Diskutieren Sie die Gültigkeit des Kongruenzaxioms (K1) (dies wurde in der Vorlesung angedeutet).