Prof. Klaus Mohnke
Viktor Fromm, Ph.D.
Dr. Josua Groeger
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Elementargeometrie SS 2012

Abgabe: 30.5.2012

Aufgabe 1. [Die Kreise des Apollonius]
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den üblichen Definitionen von Geraden, Strecken usw.
Seien $m > n > 0$ zwei positive reelle Zahlen. Seien zwei Punkte P und Q in der Ebene gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte in der Ebene, für die sich das Verhältnis der Abstände zu P und Q wie $m : n$ verhält, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.
Eine kleine Herausforderung (freiwillig): Versuchen Sie einmal, diesen Sachverhalt geometrisch zu beweisen, d.h. unter Benutzung der bekannten Eigenschaften von $\mathbb{R}^2$ aber ohne explizites Rechnen mit Koordinaten. Hinweis: Betrachten Sie die analytisch errechneten Werte für den Kreis und stellen Sie eine Hypothese auf. Versuchen Sie dann, diese zu beweisen.

Aufgabe 2
Wir betrachten eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz gelten. Zwei Kreise heißen tangential, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden.
Gegeben seien zwei Kreise, die mindestens einen Punkt A gemeinsam haben. Zeigen Sie: Die Kreise sind genau dann tangential zueinander, wenn die durch A verlaufenden Tangenten an die Kreise identisch sind.
Hinweis: Seien Sie in Ihrer Argumentation vorsichtig. Z.B. ist von vorn herein nicht klar, dass die Geraden durch A und den Mittelpunkt des ersten bzw. zweiten Kreises identisch sind.

Aufgabe 3
Sei K ein Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt M und $P \neq M$ ein Punkt im Inneren von K. Seien A und B die beiden Schnittpunkte der Lotgeraden in P von $G(M,P)$ mit K, und sei P' der Schnittpunkt der Tangentialgeraden an K in A mit $G(M,P)$. Zeigen Sie, dass P' das Bild von P unter Inversion am Kreis K ist.
Hinweis: Inversion am Kreis wurde in der Vorlesung analytisch (d.h. mit einer Formel) definiert. Zu zeigen ist also, dass die hier beschriebene geometrische Konstruktion dazu äquivalent ist.

Aufgabe 4
(a) Seien K_1 und K_2 zwei Kreise in $\mathbb{R}^2$, die sich in genau zwei Punkten schneiden. K_2 enthalte den Mittelpunkt von K_1. Begründen Sie, dass das Bild von K_2 unter Inversion am Kreis K_1 genau die Gerade ist, die durch beide Schnittpunkte läuft. Beschreiben Sie ferner, wie sich das Bild eines Punktes $P \in K_2$ unter Inversion an K_1 nur mit Hilfe eines Lineals konstruieren lässt.
(b) Seien K_1 und K_2 zwei Kreise in $\mathbb{R}^2$, so dass sich K_1 und K_2 in genau einem Punkt P schneiden, $K_2 \setminus \{P\}$ vollständig im Inneren von K_1 liegt und K_2 den halben Radius wie K_1 hat. Zeigen Sie, dass das Bild von K_2 unter Inversion am Kreis K_1 mit der Tangentialgeraden an K_1 im Punkt P übereinstimmt.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen besprochen werden.

- Begründen Sie, dass die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$, deren kartesische Koordinaten (x, y) bzgl. eines Koordinatensystems die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 6x + 8y$$

  erfüllen, ein Kreis ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. Bestimmen Sie weiterhin die Gleichung für die Tangente in $(0, 0$ an diesen Kreis.

- Wir betrachten eine Geometrie, in der die Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz gelten. Gegeben seien drei Punkte M, N und A, die auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MA tangential zu dem Kreis mit Mittelpunkt N und Radius NA ist.