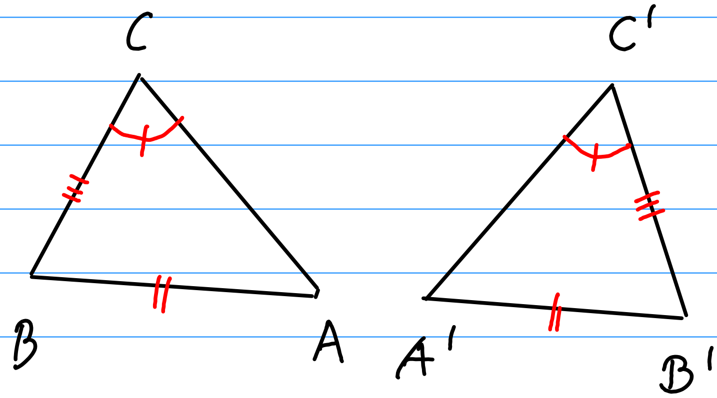
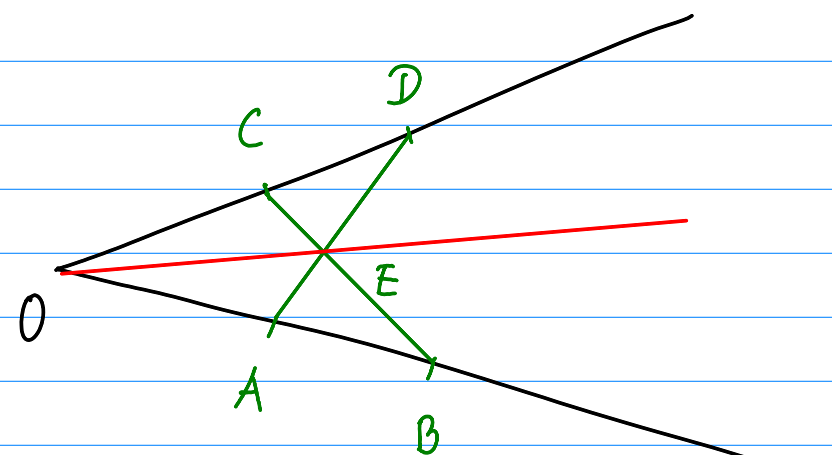
Aufgabe 1 a) In einem Dreieck $\Delta(A,B,C)$ sei $AB > BC$. Sei $\Delta(A',B',C')$ ein beliebiges Dreieck. Dann gilt:

$$\Delta(A,B,C) \cong \Delta(A',B',C') \iff \begin{cases} \bullet\ \sphericalangle(ACB) \cong \sphericalangle(A'B'C') \\ \bullet\ AB \cong A'B' \\ \bullet\ BC \cong B'C' \end{cases}$$



2 Punkte

b)



1 Punkt

c) (1) verwendet Axiom der Streckenabtragung (K1) 1 Punkt

(2) z.z. $AD \cap BC \neq \emptyset$

g.z.z. $G(A,D) \cap BC$ da $G(A,D) \setminus AD$ im Äußeren während BC im Inneren des Winkels liegt

(Fehlen dieser Bemerkung wurde nicht gewertet)

Pasch-Axiom mit $\Delta(O,B,C)$ & $G(A,D)$.

Gerade schneidet Seite OB in A (n.V. $A \in OB$)

Gerade schneidet $G(O,C)$ in D: $D \notin OC$

$\Rightarrow$ • Gerade enthält weder O, B noch C
• Gerade schneidet nicht OC

} zwei Geraden schneiden sich höchstens in einem Punkt

Pasch $\Rightarrow$ $G(A,D)$ schneidet BC. 3 Punkte

(3) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle(AOD) = \sphericalangle(COB) \\ OA \cong OC \\ OB \cong OD \end{array}\right\} \overset{[SWS]}{\Longrightarrow} \Delta(A,O,D) \cong \Delta(C,O,B)$

$$\begin{array}{ccc} & \sphericalangle(OAE) & \sphericalangle(OCE) \\ & \| & \| \\ \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} & \sphericalangle(OAD) \cong & \sphericalangle(OCB) \\ \text{Kongr.} & \sphericalangle(ODA) \cong & \sphericalangle(OBC) \\ & \| & \| \\ & \sphericalangle(ODE) & \sphericalangle(OBE) \end{array}$$

Außerdem $AB \cong CD$ (aus $OA \cong OC$, $OB \cong OD$ & Kongruenzaxiomen)

$\overset{[WSW]}{\Longrightarrow}$ $\Delta(A,B,E) \cong \Delta(C,D,E)$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ Kongr. $AE \cong CE$

$OE = OE$

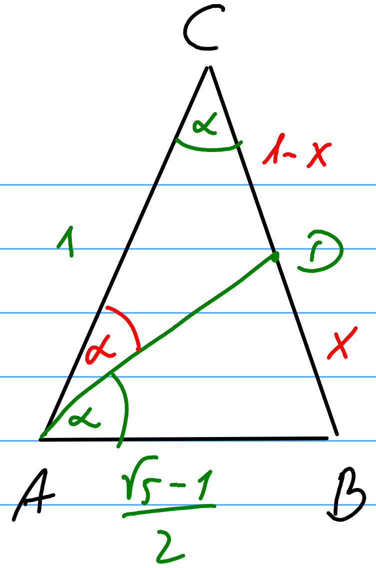
$OA \cong OC$ n.V.

$\overset{[SSS]}{\Longrightarrow}$ $\Delta(A,O,E) \cong \Delta(C,O,E)$

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ Kongr. $\sphericalangle(A,O,E) \cong \sphericalangle(C,O,E)$ = Behauptung

3 Punkte (für halbwegs vollst. Lösung)

Aufgabe 2:



$AC \cong BC$

a) $$\left.\begin{array}{l} \measuredangle(DBA) = \measuredangle(CBA) \\ \measuredangle(DAB) \cong \measuredangle(ACB) \end{array}\right\} \overset{(WWW)}{\Longrightarrow} \Delta(A,B,C) \sim \Delta(D,B,A)$$ (ähnlich)

Insbesondere $AB \cong AD$! 2 Punkte

(Statt dieser zwei Zeilen wurden häufig ein bis zwei Seiten geschrieben. Fehlende Zeit ist die Folge ...)

b) Def. Ähnlichkeit $\Rightarrow \dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$

Einsetzen: $$x = \frac{|AB|^2}{|BC|} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Rightarrow |CD| = 1 - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = |AB| = |AD|$$

4 Punkte

c) Daraus folgt $\measuredangle(CAD) \cong \measuredangle(ACD) \cong \alpha$

Außerdem $\underbrace{\measuredangle(CAB)}_{\cong\, 2\alpha} \cong \measuredangle(CBA)$

} Basiswinkel im gleichsch. Δ

Innenwinkelsumme im Δ:

$$180° = |\sphericalangle(CAB)| + |\sphericalangle(CBA)| + |\sphericalangle(ACB)|$$
$$\qquad\quad \overset{\text{i.}}{=} 2\alpha \quad + \quad \overset{\text{i.}}{=} 2\alpha \quad + \quad \overset{\text{f.}}{=} \alpha \quad = 5\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{180°}{5} = 36° = \sphericalangle(ACB)$$

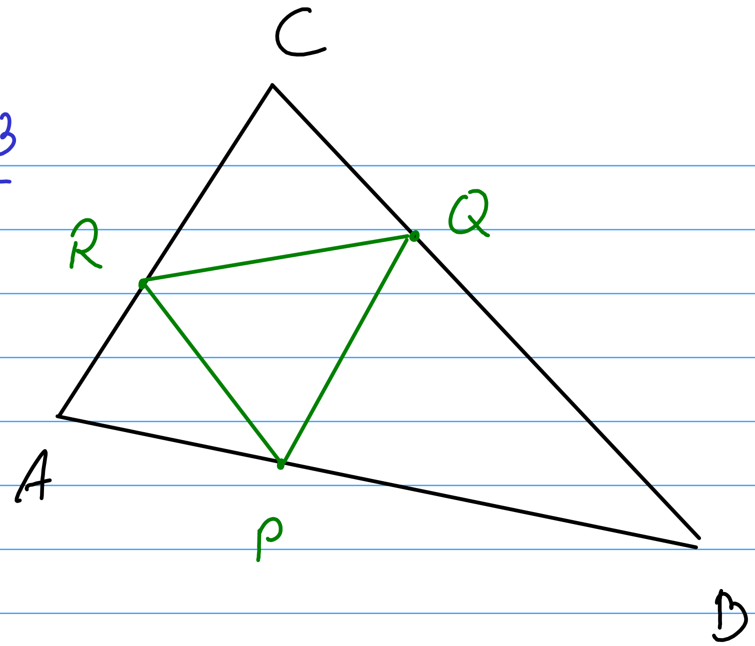
$\sphericalangle(CAB) = \sphericalangle(CBA) = 2 \cdot 36° = 72°$

$\sphericalangle(ADB) = \sphericalangle(CAB) = 72°$ (siehe a))

$\sphericalangle(ADC) = 180° - \sphericalangle(ADB) = 108°.$ 4 Punkte

(Nebenwinkel).

Aufgabe 3



a) $PQ \parallel AC$ $\quad PR \parallel BC$

Strahlensatz $\Rightarrow$ $\dfrac{|PQ|}{|AC|} = \dfrac{|PB|}{|AB|} = x$

$$\frac{|PR|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AB| - |PB|}{|AB|} = 1 - \frac{|PB|}{|AB|} = 1 - x$$

3 Punkte

b) sei noch $QR \parallel AB$

Stufenwinkel	:	$\sphericalangle(CAB) \cong \sphericalangle(QPB)$	$AC \parallel PQ$
Wechselwinkel	:	$\sphericalangle(QPB) \cong \sphericalangle(RQP)$	$AB \parallel RQ$
Stufenwinkel	:	$\sphericalangle(ABC) \cong \sphericalangle(RQC)$	$AB \parallel RQ$
Wechselwinkel	:	$\sphericalangle(RQC) \cong \sphericalangle(PRQ)$	$BC \parallel RP$

[WWW]

$\Rightarrow$ $\Delta(A,B,C) \sim \Delta(Q,R,P)$ (ähnlich) 4 Punkte

c) Def. d. Ähnlichkeit

$$\Rightarrow \quad \frac{|QP|}{|AC|} = \frac{|PR|}{|CB|}$$

$$\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ x & 1-x \end{array} \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Das bedeutet P ist Mittelpunkt von AB.

Zyklisches Vertauschen von A, B, C ergibt: Q Mittelpunkt von BC
R –"– von AC.

3 Punkte

Aufgabe 4 a) Kreis um $M = (m_1, m_2)$ & Radius $r > 0$

$$K(M,r) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2\}$$

b) $A = (0,0)$, $B = (m+n, 0)$, $C = (m, 0)$

Beschreibe Menge der Punkte $P = (x_1, x_2)$

$$\{P = (x_1, x_2) \mid \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{m}{n}\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{(x_1 - m - n)^2 + x_2^2}} = \frac{m}{n}\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid n\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = m\sqrt{(x_1 - m - n)^2 + x_2^2}\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid n^2(x_1^2 + x_2^2) = m^2\left(x_1^2 - 2(m+n)x_1 + (m+n)^2 + x_2^2\right)\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid (m^2 - n^2)(x_1^2 + x_2^2) - 2m^2(m+n)x_1 + m^2(m+n)^2 = 0\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 - \frac{2m^2(m+n)}{m^2 - n^2}x_1 + \frac{m^2(m+n)^2}{m^2 - n^2} + x_2^2 = 0\}$$

N.R.: $\frac{2m^2(m+n)}{m^2 - n^2} = \frac{2m^2}{m-n}$, $\frac{m^2(m+n)^2}{m^2 - n^2} = \frac{m^2(m+n)}{m-n}$

da $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ (Kürzen!)

$$= \{(x_1, x_2) \mid \left(x_1 - \frac{m^2}{m-n}\right)^2 - \frac{m^4}{(m-n)^2} + x_2^2 + \frac{m^2(m+n)}{m-n} = 0\}$$

mit Quadratischer Ergänzung

$$\frac{m^4}{(m-n)^2} - \frac{m^2(m+n)}{m-n} = \frac{m^4 - m^2(m+n)(m-n)}{(m-n)^2} = \frac{m^4 - m^2(m^2 - n^2)}{(m-n)^2}$$

$$= \frac{m^2 n^2}{(m-n)^2}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \left(x_1 - \frac{m^2}{m-n}\right)^2 + x_2^2 = \frac{m^2 n^2}{(m-n)^2} \right\}$$

Damit ist gezeigt, dass die Punktmenge ein Kreis ist mit

Mittelpunkt $M = \left(\frac{m^2}{m-n}, 0\right)$ & Radius

$$r = \frac{mn}{m-n}$$

8 Punkte

(geometrisch: $B \in AM$ mit $|AM| = \frac{m^2}{m-n}$)

Aufgabe 5 a)

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$\Rightarrow \varphi_1$ Isometrie (Satz aus VL)

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \text{Spiegelung}$$

$$\varphi_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \underline{-1}$$

$\Rightarrow$ Isometrie $\qquad\qquad \Rightarrow$ Spiegelung $\qquad$ 4 Punkte

b) $$\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \quad \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

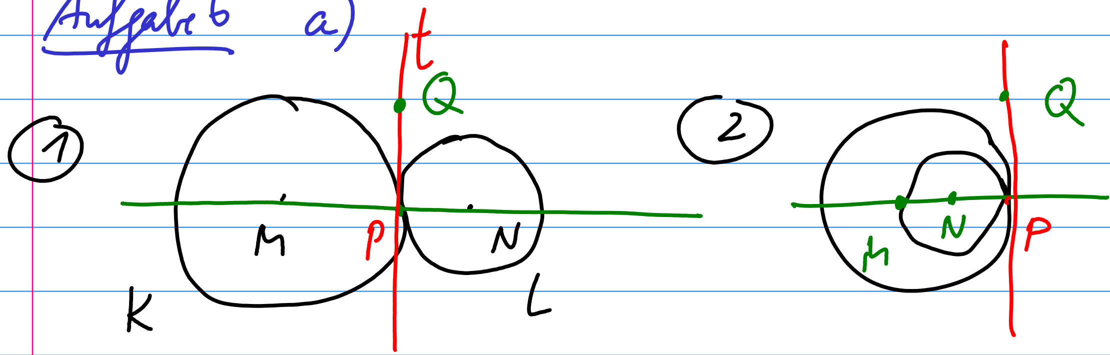
$$\text{Matrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \qquad \text{Rotationsmatrix}$$

10

$\Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1$ ist Rotation um $30°$ um $(0,0)$, den Ursprung

6 Punkte

Aufgabe 6 a)



2 Richtungen zu zeigen! $P \in K \cap L$

(⇒) Sei A gemeinsame Tangente in P an K & L.

$Q \neq P$, $Q \in A \Rightarrow \sphericalangle(QPM)$ rechter Winkel (A Tangente an K)

$\sphericalangle(QPN)$ rechter Winkel (A Tangente an L)

$\Rightarrow$ 1 Da rechter Winkel kongruent zu Nebenwinkel & der rechte Winkel eindeutig: $\sphericalangle(QPN)$ Nebenwinkel von $\sphericalangle(QPM)$, d.h. $P \in G(M,N)$

(2 Eindeutigkeit des rechten Winkels & Eindeutigkeit der Winkelabtragung: $N \in G(P,M)$)

(⇐) Sei $P \in G(M,N)$ & $P \in K \cap L$: P liegt auf Gerade durch M & N. und ist ein Schnittpunkt der Kreise.

Sei A die Tangente an K in P, $Q \in A$ $Q \neq P$.

$\Rightarrow$ $\sphericalangle(QPM)$ ist rechter Winkel

$\Rightarrow$ ① da $\sphericalangle QPN$ Nebenwinkel von $\sphericalangle QPM$ folgt $\sphericalangle QPN$ ist rechter Winkel $\Rightarrow$ A Tangente an L in P

(② da N auf Strahl in P der M enthält folgt $\sphericalangle QPN = \sphericalangle QPM \Rightarrow A$ Tangente an L in P.)

1+1 Punkt (jede Richtung)

b) Konstruktion: 1) Zeichne Gerade $G(M,A)$

2 Punkte

2) Konstruiere Mittelsenkrechte von AB

3) Bestimme Schnittpunkt der M.S. & $G(A,B)$: N

4) Zeichne Kreis L um N mit Radius NA.

Bew: L erfüllt Bedingung.

- L ist tangential an K : $N \in G(M,A)$

  $M \neq N \Rightarrow A \in G(M,N)$ 2 Pkt.

  $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ L tangential an K

  $M = N \Rightarrow K = L$

  (kein Punktabzug, wenn nicht separat gelistet!)

- $A, B \in L$: N liegt auf Mittelsenkrechte von AB

  $\Rightarrow NA \cong NB$ (Char. d. Mittelsenkr.)

  $\Rightarrow A, B \in L$ (Radius von L war NA)

Bew.: Konstruktion liefert alle Lösungen (Herleitung d. Konstr.)

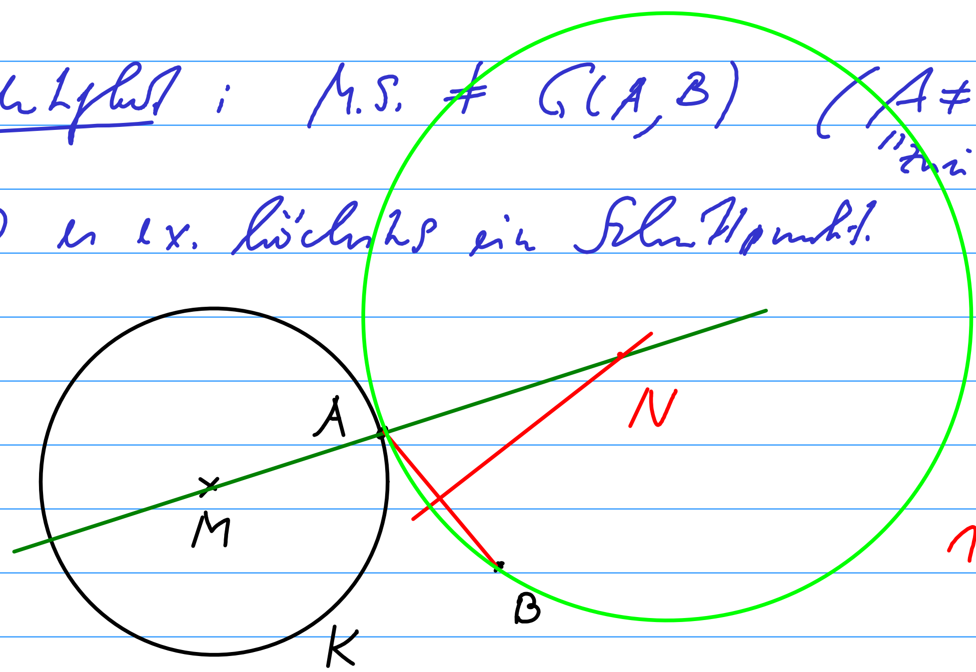
L tg. an K $\Rightarrow$ $N \in G(M,A)$ (wegen (a))
in A.

$A, B \in L \Rightarrow$ N liegt auf Mittelsenkrechte von AB 1 Pkt.

Existenz: Wenn Mittelsenkr. $\nparallel$ $G(M,A)$ 1 Pkt.
$\Rightarrow \exists$ Schnittpunkt
Das ist der Fall, wenn B nicht auf Tangente an K in A liegt.

Eindeutigkeit: M.S. $\neq G(A,B)$ ($A \neq B$ "zwei Punkte") 1 Pkt.

$\Rightarrow$ es ex. höchstens ein Schnittpunkt.



1 Punkt

Zusatzaufgabe: $\gamma(t) = (t^2, t^3/3 - t)$

Jede Komponente von γ ist differenzierbar

$\Rightarrow$ γ ist längenmessbar 1 Pkt.

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \| \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (t^2-1)^2} \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + (t^4 - 2t^2 + 1)} \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(t^2+1)^2} \, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2+1) \, dt$$

$$= \left(t^3/3 + t \right) \Big|_0^1$$

$$= (1/3 + 1) - 0 = \frac{4}{3}.$$

4 Punkte