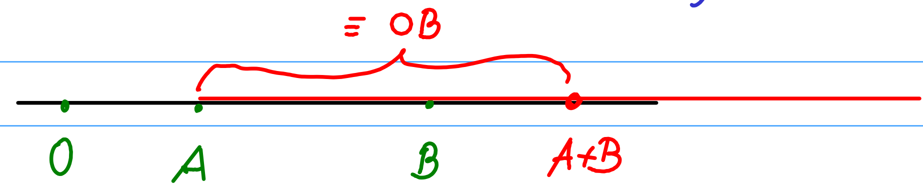
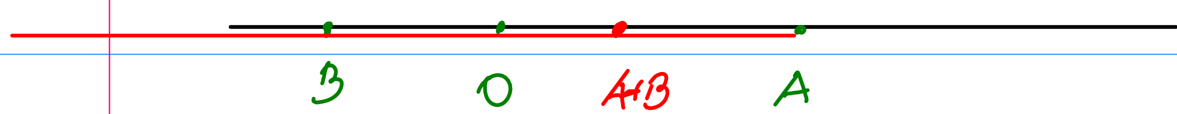
__Folgerung 10:__ Sei a eine Gerade & $O \in a$ ein ausgezeichneter Punkt. Definiere eine binäre Operation auf a wie folgt: für $A, B \in a$ sei $A+B \in a$ wie folgt definiert:

- ist $O \notin AB$, so wähle Strahl s in A auf a, der O <u>nicht</u> enthält. Dann ist $A+B \in s$ mit $A(A+B) \equiv OB$



- ist $O \in AB$, so wähle Strahl s in A auf a, der O enthält. Dann ist $A+B \in s$ mit $A(A+B) \equiv OB$

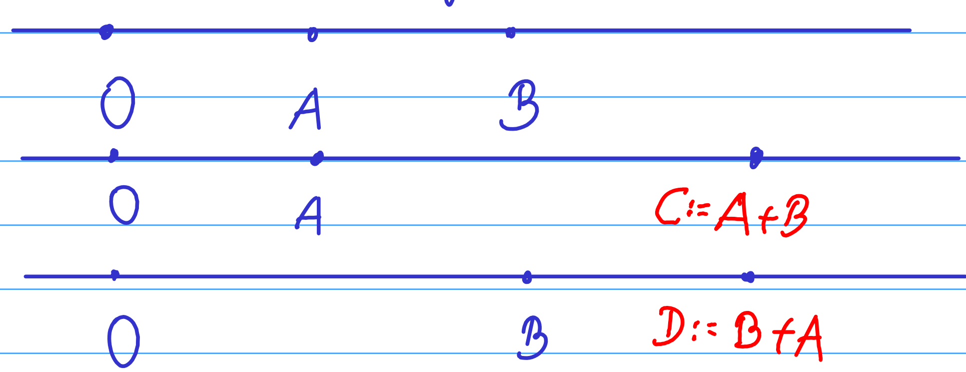


Behauptung: $(a,+)$ ist eine abelsche Gruppe. O ist das neutrale Element. Das Inverse zu $A \in a$ ist der Punkt $B \in a$ mit $O \in AB$ und $OB \cong OA$ (eindeutig nach (K1)!)

__Beweis:__ Zeigen zunächst Kommutativität

2 Fälle: $O \notin AB$, $O \in AB$

zeigen hier nur $O \notin AB$



Es gilt $\quad OA \cong BD \overset{(A1)}{=} DB$

$\qquad AC \cong OB = BO$

$\Rightarrow \quad OC \cong DO = OD \qquad$ (K2)

$\Rightarrow \quad C = D \qquad$ (K1) Eindeutigkeit

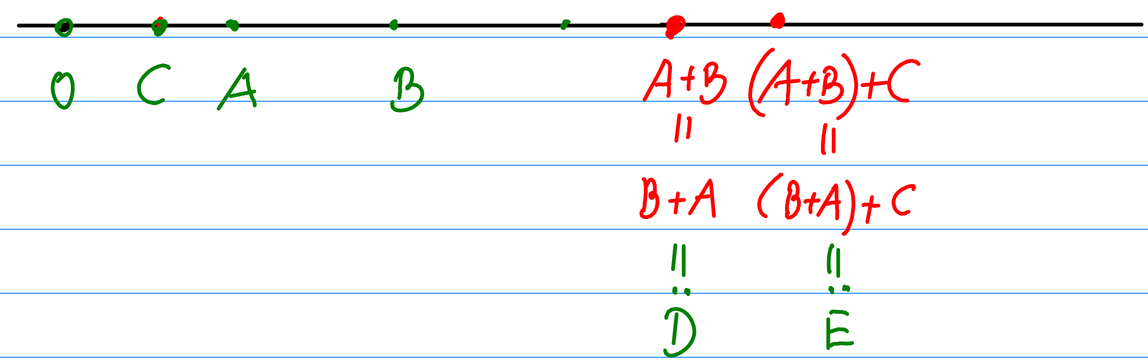
Assoziativität: 64 Fälle von Lagebeziehungen von A, B, C und O

Welche? (ÜA)

Zeigen Assoz. nur für den Fall: A, B, C liegen auf einer Seite von O.

Bezeichnen

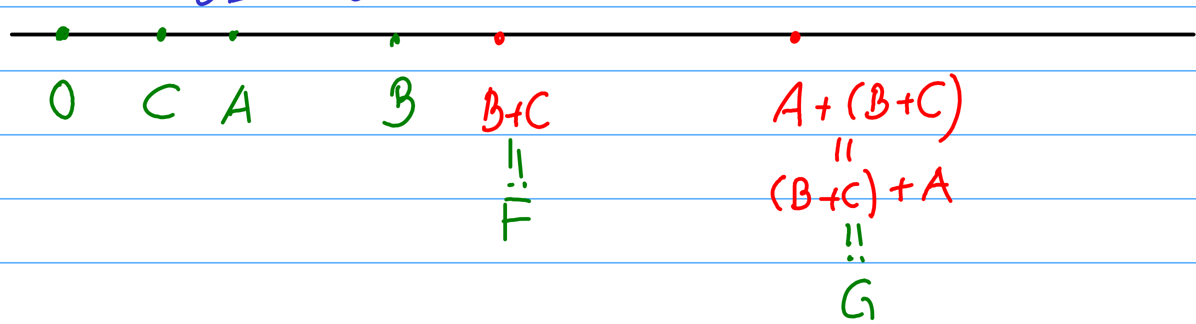
S_A, S_B, S_C Strahlen auf a in A, B bzw. C, die O nicht enthalten



$A+B =: D \in S_A, \; D+C =: E \in S_D \subset S_B$

$AD \cong OB$

$DE \cong OC$



$B+C =: F \in S_B, \; F+A =: G \in S_E \subset S_B$

$BF \cong OC$

$AG \cong OF$

$E, G \in S_B$.

$D \in BE$ und $F \in BG$

$BF \cong OC \quad DE \cong OC \quad \Rightarrow \quad BF \cong ED$

$FG \cong OA \quad BD \cong OA \quad \Rightarrow \quad FG \cong DB$

$\Rightarrow \quad BG \cong EB = BE \qquad (K2)$

$\Rightarrow \quad G = E \qquad (K1)$ Eindeutigkeit

$\quad\; \parallel \qquad\quad \parallel$

$A+(B+C) \qquad (A+B)+C$ $\square$